SUR UNE EXTENSION DU THÉORÈME DE CONVEXITÉ DE M. MARCEL RIESZ

PAR

R. SALEM (CAMBRIDGE, MASS.)

On doit à M. Marcel Riesz le théorème fondamental suivant[1]):

Soit $M(\alpha, \beta)$ le maximum de la forme bilinéaire complexe

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_j y_k$$

sous les conditions:

$$\sum |x_j|^{1/\alpha} \leqslant 1, \qquad \sum |y_k|^{1/\beta} \leqslant 1.$$

La fonction $\log M(\alpha, \beta)$ *est une fonction convexe du point* (α, β) *dans le triangle* $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $\alpha + \beta \geqslant 1$.

En 1939, M. Thorin a généralisé ce théorème de la façon suivante[2]):

Soit $f(z_1, \dots, z_n)$ *une fonction entière des* n *variables complexes* $z_1, \dots, z_n$. *Soit* V *un domaine borné dans l'espace euclidien à* n *dimensions de coordonnées* $v_1, \dots, v_n$. *Soit* $M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *le maximum de* $|f(z_1, \dots, z_n)|$ *sous les conditions:*

$$|z_1| = v_1^{\alpha_1}, \quad \dots, \quad |z_n| = v_n^{\alpha_n}, \qquad (v_1, \dots, v_n) \in V.$$

Dans ces hypothèses:

1° *si* $0 < A \leqslant v_k \leqslant B < \infty$ *pour* $k = 1, \dots, n$, $\log M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *est une fonction convexe du point* $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *dans tout l'espace*

$$-\infty < \alpha_k < +\infty \qquad (k = 1, \dots, n).$$

2° *si* $v_k \geqslant 0$ *pour* $k = 1, \dots, n$, $\log M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ *est convexe dans le domaine*

$$0 \leqslant \alpha_k < +\infty \qquad (k = 1, \dots, n).$$

[1]) M. Riesz, *Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires*, Acta Mathematica 49 (1926), pp. 465-497.

[2]) G. O. Thorin, *An extension of a convexity theorem due to M. Riesz*, Kungl. Fysiografiska Sällskapets i Lund Forhändlinger 8 (1939), nr. 14.

En 1944, MM. Tamarkin et Zygmund ont fait connaître une démonstration simple et élégante de ce résultat[8]). Le but de la présente note, inspirée par la méthode de MM. Tamarkin et Zygmund, est de montrer que le théorème de M. Thorin est une conséquence presque immédiate de la théorie des fonctions sous-harmoniques; de plus, notre démonstration nous permettra d'étendre encore le théorème *en supposant seulement que la fonction* $|f(z_1, \dots, z_n)|$ *est une fonction sous-harmonique des* n *variables complexes* $z_1, \dots, z_n$.

Il est bien connu que la deuxième partie du théorème est une simple conséquence de la première. Nous nous bornons donc à en démontrer la première partie.

Le point $(v_1, \dots, v_n)$ appartenant au domaine V, nous pouvons poser:

$$z_k = e^{\alpha_k \xi_k + i\eta_k} \qquad (k = 1, \dots, n),$$

où $\eta_1, \dots, \eta_n$ sont complètement arbitraires et où le point $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ appartient à un domaine *borné* D correspondant à $(e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_n}) \in V$.

Posons

$$\alpha_k = a_k + \lambda_k \log t \qquad (k = 1, \dots, n),$$

les a_k et λ_k étant des quantités réelles fixes, et t étant une variable réelle positive. $M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ devient une fonction de t, soit $M(t)$, et nous avons à montrer que $\log M(t)$ est une fonction convexe de $\log t$.

Posons, pour $p \geqslant 1$:

$$I_p(t) = \int \left| f\left(e^{\xi_1(a_1 + \lambda_1 \log t) + i\eta_1}, \dots, e^{\xi_n(a_n + \lambda_n \log t) + i\eta_n}\right)\right| d\xi_1 \dots d\xi_n d\eta_1 \dots d\eta_n,$$

l'intégrale étant étendue au domaine

$$0 \leqslant \eta_k \leqslant 2\pi \qquad (k = 1, \dots, n), \qquad (\xi_1, \dots, \xi_n) \in D.$$

Si on considère maintenant t comme une variable complexe, $t = \varrho e^{i\sigma}$ $(\varrho > 0)$, l'intégrale $I_p(t)$ est, pour un choix déterminé du logarithme, une fonction sous-harmonique de t. De plus, il est aisé de voir que cette fonction est uniforme et que $I_p(t) = I_p(\varrho)$, la fonction ne dépendant que du module de t. Nous avons, en effet:

$$\xi_k(\alpha_k + \lambda_k \log \varrho + \lambda_k i\sigma) + i\eta_k = \xi_k(\alpha_k + \lambda_k \log .) + i(\eta_k + \lambda_k \sigma)$$

[8]) J. D. Tamarkin and A. Zygmund, *Proof of a theorem of Thorin*, Bulletin of the American Mathematical Society 50 (1944), pp. 279-282.

et notre assertion est une conséquence immédiate du fait que l'intégrale est étendue à toutes les valeurs possibles des variables η_k (mod 2π).

Or il est bien connu que, $I_p(\varrho)$ étant sous-harmonique, $\log I_p(\varrho)$ est une fonction convexe de $\log\varrho$ et, puisque $M(t)=\lim\,[I_p(t)]^{1/p}$, il suffit de faire croître p indéfiniment pour obtenir le résultat annoncé.

REMARQUE SUR UNE HYPOTHÈSE DES CHINOIS CONCERNANT LES NOMBRES $(2^n-2)/n$

PAR

W. SIERPIŃSKI (VARSOVIE)

Les mathématiciens chinois pensaient que le nombre $(2^n-2)/n$ ne peut pas être entier lorsque n est un nombre composé.

M. Banachiewicz[1]) a trouvé en 1909 cinq nombres naturels $n\leqslant 2000$ pour lesquels l'hypothèse des Chinois est en défaut[2]). Le plus petit de ces nombres est $341=11\cdot 31$.

Je vais établir ici *l'existence d'une infinité de nombres composés n pour lesquels $(2^n-2)/n$ est un entier.*

A ce but, puisqu'il existe

(*) *un nombre impair composé n pour lequel $(2^n-2)/n$ est un entier,*

il suffit de montrer que, pour tout n jouissant de la propriété (*), il existe un $k>n$ qui en jouit aussi. Or, il suffit de poser:

$$k=2^n-1.$$

En effet, soit q un diviseur de n et $1<q<n$. Alors, on a d'abord $1<2^q-1<2^n-1=k$ et on voit sans peine que 2^q-1 est un diviseur du nombre k, qui est par conséquent composé et par définition impair. Enfin, n étant impair par hypothèse, $(2^n-2)/n$ est évidemment pair et par conséquent sa moitié $m=(2^{n-1}-1)/n$ est un entier; comme $2^{n-1}-1=mn$, on a:

$$2^{k-1}=2^{2(2^{n-1}-1)}=2^{2mn}=(2^n)^{2m},\quad \text{d'où}\quad 2^{k-1}-1=(2^n)^{2m}-1,$$

de sorte que $2^{k-1}-1$ est divisible par $2^n-1=k$ et il est évidemment de-même du nombre $2(2^{k-1}-1)=2^k-2$, c.-à-d. $(2^k-2)/k$ est un entier. Ainsi, k jouit de la propriété (*), c. q. f. d.

[1]) T. Banachiewicz, Comptes rendus de la Soc. des Sc. et de Lettres de Varsovie, Classe III, Année 2 (1909), p. 9.

[2]) La Rédaction vient d'apprendre par une lettre récente de M. Banachiewicz qu'il y en a exactement sept (mais qu'il n'en a trouvé le troisième et le quatrième que plus tard), à savoir: $341=11\cdot 31$, $561=3\cdot 11\cdot 17$, $645=3\cdot 5\cdot 43$, $1105=5\cdot 13\cdot 17$, $1387=19\cdot 73$, $1729=7\cdot 13\cdot 19$ et $1905=3\cdot 5\cdot 127$.