COLLOQUIUM MATHEMATICUM

VOL. I. WROCŁAW 1947 FASC. 1

C O M M U N I C A T I O N S

SUR UN THÉORÈME DE M. V. JARNÍK

PAR

H. STEINHAUS (WROCŁAW)

Il s'agit du théorème suivant, énoncé et démontré par M. V. Jarník dans une lettre à moi du 3 janvier 1947, en réponse à une question que j'avais posée:

J étant une courbe de Jordan fermée rectifiable, l — sa longueur, I — la région intérieure à J, a — l'aire de I et w — le nombre des points de coordonnées entières situés dans I, on a pour $l \geqslant 1$

$$|a - w| < l. \tag{1}$$

La démonstration que je donne ici diffère de celle de M. Jarník en certain détail; elle n'a recours à aucune approximation par polygones et à aucune hypothèse sur la longueur du diamètre de J.

Désignons par P_i les points de coordonnées entières x_i et y_i; chaque P_i est le centre d'un carré Q_i défini par les inégalités

$$x_i - {}^1/_2 < x < x_i + {}^1/_2, \qquad y_i - {}^1/_2 < y < y_i + {}^1/_2.$$

Soit C_i le contour de Q_i. La courbe J détermine deux régions: la région intérieure I et la région extérieure E. Supprimons dans les suites $\{P_i\}$ et $\{Q_i\}$ tous les termes pour lesquels on a $Q_i \subset E$; pour ne pas introduire une nouvelle notation, désignons par $P_1, P_2, \ldots, P_n$ et $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ les deux suites finies qui restent. La deuxième suite contient des termes de deux sortes:

$$\text{(I)}\quad Q_k \subset I, \qquad\qquad \text{(II)}\quad Q_k J \neq 0,$$

la disjonction étant parfaite.

Désignons d'une façon générale par $|D|$ l'aire d'une région quarrable D et par $|A|$ la longueur d'un arc rectifiable A. Soit Ω_k la région $Q_k I$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ et

$$w_k = \begin{cases} 1 & \text{si } P_k \in \Omega_k \\ 0 & \text{si } P_k \text{ non } \in \Omega_k. \end{cases} \tag{2}$$

Il est évident que la différence $a - w$, qui figure dans la formule (1), est égale à la somme

$$\sum_{k=1}^{n} (|\Omega_k| - w_k). \tag{3}$$

Or, les termes de cette somme qui correspondent au cas (I) sont nuls; pour démontrer (1), il n'y a donc à considérer que les termes correspondant au cas (II); en supposant cette nouvelle réduction accomplie, conservons les mêmes notations P_k et Q_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ pour les termes qui restent.

Soit donc $Q_k J \neq 0$ pour tous les $k = 1, 2, \ldots, n$. L'arc $Q_k J$ peut être identique à J. On a dans ce cas exceptionnel $I = \Omega_k$; comme $Q_k - \Omega_k$ est non vide et $|Q_k| = 1$, on aura alors dans (1) $0 < a < 1$; en vertu de (2), on aura donc en tout cas

$$|a - w| < 1,$$

ce qui implique (1), puisque $|J| \geqslant 1$. Nous pouvons donc nous borner au cas $Q_k J \neq J$.

Dans ce cas, $Q_k J$ est somme d'arcs simples ouverts (sans extrémités) et disjoints:

$$Q_k J = A_1^{(k)} + A_2^{(k)} + \ldots + A_r^{(k)} + \ldots,$$

qui peut d'ailleurs n'avoir qu'un seul terme aussi bien qu'en contenir une infinité. On aura donc

$$|Q_k J| = \sum_r |A_r^{(k)}|.$$

Notre but actuel est d'établir l'inégalité

$$||\Omega_k| - w_k| < |Q_k J| \qquad \text{pour } k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

car elle implique la thèse (1) en vertu des inégalités évidentes:

$$|a - w| = |\sum_{k=1}^{n} (|\Omega_k| - w_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} ||\Omega_k| - w_k| < \sum_{k=1}^{n} |Q_k J| \leqslant |J| = l.$$

Considérons désormais un seul carré Q_k en supprimant partout l'indice k. Ainsi Q désignera Q_k, A_r désignera $A_r^{(k)}$, P désignera P_k et ainsi de suite.

L'ensemble $Q - J$ est somme des régions disjointes D_s; il y en aura au moins deux et au plus une infinité dénombrable.

Deux cas sont à distinguer:

1° P n'appartient à aucun D_s. Dans ce cas, $P \in J$ et $w = 0$. Or, comme $QJ \neq 0$, on a $0 < |\Omega| < 1$, d'où

$$||\Omega| - w| < 1; \tag{5}$$

d'autre part, $P \in J$ implique $P \in A_r$ pour un certain r; les extrémités de A_r (qui n'appartiennent pas à A_r) sont situées sur C et peuvent être confondues ou distinctes; comme la distance entre P et C est égale à $^1/_2$, on aura toujours $|A_r| \geqslant 1$ et, en vertu de (5),

$$||\Omega| - w| < |A_r| \leqslant |QJ|,$$

ce qui implique (4).

2° P appartient à un $D_s = D$. La frontière de la région D est composée de certains arcs ouverts A_r et d'un ensemble fermé F contenu dans C. Désignons les A_r en question par S_j $(j = 1, 2, \ldots)$.

Il y a deux possibilités

$$D \subset E, \qquad D \subset I,$$

qui donnent respectivement

$$P \in E, \text{ donc } w = 0, \qquad P \in I, \text{ donc } w = 1,$$

$$\Omega \subset Q - D, \qquad Q \supset \Omega \supset D.$$

Pour obtenir (4), il suffit d'avoir respectivement

$$|\Omega| < |QJ|, \qquad 1 - |\Omega| < |QJ|. \tag{6}$$

Or, on a $|QJ| \geqslant \sum_j S_j$ et respectivement

$$|\Omega| \leqslant 1 - |D|, \qquad 1 - |\Omega| \leqslant 1 - |D|,$$

de sorte que, pour démontrer (6), il suffit d'établir l'inégalité

$$1 - |D| \leqslant \sum_j |S_j|. \tag{7}$$

Chaque arc S_j joint deux points de C; ainsi l'ensemble $Q - \sum_j S_j$ se compose de régions disjointes $D, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ où chaque Δ_j est limitée par S_j et par une partie fermée F_i de C d'un seul tenant.

L'égalité évidente

$$|D|+|\Delta_1|+|\Delta_2|+\ldots=1$$

réduit (7) à

(8) $$\sum_j |\Delta_j| < \sum_j |S_j|;$$

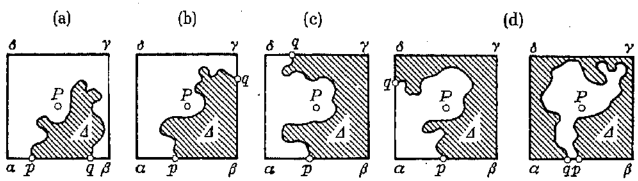
il suffit donc, pour démontrer le théorème, d'établir pour tout j l'inégalité

(9) $$|\Delta_j| < |S_j|.$$

Le problème revient ainsi à la question suivante:

Un arc simple ouvert S joignant deux points p, q (qui peuvent être confondus) du contour C du carré-unité Q (aux sommets α, β, γ et δ), divise $Q-S$ en deux régions, dont l'une — soit Δ — ne contient pas le centre P de Q. Il s'agit de prouver que l'aire $|\Delta|$ est inférieure à la longueur $|S|$.

Les cas suivants sont à examiner:



(a) F (qui a été designé auparavant par F_j) est un segment $\langle p,q\rangle$ situé sur le côté $\langle\alpha,\beta\rangle$ de C. Dans ce cas, S ne peut pas atteindre la droite parallèle à $\langle\alpha,\beta\rangle$ et distante de $|S|/2$ de ce côté. La région Δ étant contenue dans un rectangle de base 1 et de hauteur $|S|/2$, on a $|\Delta|<|S|/2<|S|$.

(b) F est composé de deux segments $\langle p,\beta\rangle$ et $\langle\beta,q\rangle$ appartenant respectivement à deux côtés adjacents de C. Dans ce cas, la distance maximum d'un point de S au côté $\langle\alpha,\beta\rangle$ est inférieure à $|S|$; en effet, la distance $|S|$ ne saurait être atteinte que dans le cas où S est un segment rectiligne normal à $\langle\alpha,\beta\rangle$; ce segment serait alors identique au côté $\langle\beta,\gamma\rangle$, ce qui est le cas (a) dans une autre notation. On voit que Δ fait partie d'un rectangle de base 1 et de hauteur inférieure à $|S|$, d'où encore $|\Delta|<|S|$.

(c) F est composé de trois segments $\langle p,\beta\rangle$, $\langle\beta,\gamma\rangle$ et $\langle\gamma,q\rangle$, dont le moyen est un côté de C et dont les deux autres sont situés sur les côtés qui lui sont adjacents. Dans ce cas, S joint deux côtés parallèles de Q, donc $|S|\geqslant 1$. Comme Δ ne contient pas P, on a $|\Delta|<1\leqslant|S|$.

(d) F est composé de quatre segments $\langle p,\beta\rangle$, $\langle\beta,\gamma\rangle$, $\langle\gamma,\delta\rangle$ et $\langle\delta,q\rangle$, dont le deuxième et le troisième sont des côtés adjacents de C, le premier et le quatrième étant situés sur deux autres côtés. Ou enfin F est composé de cinq segments $\langle p,\beta\rangle$, $\langle\beta,\gamma\rangle$, $\langle\gamma,\delta\rangle$, $\langle\delta,\alpha\rangle$ et $\langle\alpha,q\rangle$, dont le deuxième, troisième et quatrième sont des côtés de C, les extrêmes étant des segments disjoints situés sur le dernier côté de C. Dans ce cas, γ est un point intérieur de F, de sorte que tous les points de la diagonale $\langle\alpha,\gamma\rangle$ suffisamment proches de γ sont situés dans Δ. Comme P est extérieur à Δ, le segment $\langle p,\gamma\rangle$ coupe S. Soit T le point d'intersection. T divise S en deux arcs simples ouverts et il est évident que $|S|$ est au moins égal à la somme des longueurs des deux cordes $\langle p,T\rangle$ et $\langle T,q\rangle$. Or, cette somme est au moins égale à celle des longueurs de $\langle P,p\rangle$ et $\langle P,q\rangle$, qui n'est pas inférieure à 1. On a donc, comme dans le cas (c), $|\Delta|<1\leqslant|S|$.

Il est à remarquer que dans tous les cas sauf (c) les points p et q peuvent coïncider; les raisonnements restent valables, pourvu que l'on tienne compte de ce que l'arc ouvert S a toujours une longueur positive.

La condition $l\geqslant 1$ est essentielle. En effet, pour un petit cercle entourant un point P_i, la différence $|a-m|$ dans (1) est proche de 1, tandis que l est proche de 0.