THEOREM 3. *Let A, B be double Stone algebras and let $\varphi\colon A \to B$ be a weak homomorphism. Then one of the following statement holds:*

(i) *φ is a homomorphism;*

(ii) *φ is a dual homomorphism, i.e.* $0\varphi = 1$, $1\varphi = 0$, $x^*\varphi = (x\varphi)^+$, $x^+\varphi = (x\varphi)^*$, $(x \vee y)\varphi = x\varphi \wedge y\varphi$ *and* $(x \wedge y)\varphi = x\varphi \vee y\varphi$ *for every* $x, y \in A$;

(iii) $0\varphi = 0$, $1\varphi = 1$, $x^*\varphi = (x\varphi)^*$, $x^+\varphi = (x\varphi)^+$, $(x \vee y)\varphi = h(x\varphi, y\varphi)$ *and* $(x \wedge y)\varphi = \bar{h}(x\varphi, y\varphi)$ *for every* $x, y \in A$;

(iv) $0\varphi = 1$, $1\varphi = 0$, $x^*\varphi = (x\varphi)^+$, $x^+\varphi = (x\varphi)^*$, $(x \vee y)\varphi = \bar{h}(x\varphi, y\varphi)$ *and* $(x \wedge y)\varphi = h(x\varphi, y\varphi)$ *for every* $x, y \in A$, *where* $h(x, y)$ *and* $\bar{h}(x, y)$ *are defined in Proposition* 5.

References

[0] G. Birkhoff, *Lattice theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 25, 3rd ed., 1967.

[1] —, *Some applications of universal algebra*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, v. 29: Universal Algebra, Esztergom (Hungary), 1977, North-Holland, 1981, 107–128.

[2] I. Chajda, *Direct products of weak homomorphisms*, Arch. Math. (Brno) 12 (1976), 143–152.

[3] K. Głazek and J. Michalski, *On weak homomorphisms of general non-indexed algebras*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. math. astr. phys., 22 (1974), 651–656.

[4] —, —, *Weak homomorphisms of general algebras*, Comment. Math. 19 (1976), 231–248.

[5] K. Głazek, T. Hecht and T. Katriňák, *On weak homomorphisms of Stone algebras*, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, v. 17: Contributions to Universal Algebra, Szeged (Hungary), 1975, North-Holland, 1977, 145–159.

[6] A. Goetz, *On weak isomorphisms and weak homomorphisms of abstract algebras*, Colloq. Math. 14 (1966), 163–167.

[7] G. Grätzer, *Universal algebra*, D. van Nostrand Co., 1968.

[8] —, *Lattice theory. First concepts and distributive lattices*, W. H. Freeman and Co., 1971.

[9] T. Katriňák, *Injective double Stone algebras*, Algebra Univ. 4 (1974), 259–267.

[10] T. Traczyk, *Weak isomorphisms of Boolean and Post algebras*, Colloq. Math. 13 (1965), 159–164.

Presented to the Semester
Universal Algebra and Applications
(February 15 – June 9, 1978)

UNIVERSAL ALGEBRA AND APPLICATIONS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 9
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

PRÄPRIMALE ALGEBREN, DIE ARITHMETISCHE VARIETÄTEN ERZEUGEN

K. DENECKE

Pädagogische Hochschule, Sektion Mathematik und Physik, Potsdam, G.D.R.

Diese Arbeit beschäftigt sich mit endlichen Algebren, bei denen die Menge aller abgeleiteten Operationen, der Operationenklon, maximal in der Klasse aller Funktionen über der Trägermenge der Algebra ist, den präprimalen Algebren. Maximale Klassen der Klasse aller Funktionen über einer endlichen Menge spielen bei der Lösung des Vollständigkeitsproblems in den mehrwertigen Logiken eine Rolle. Hier werden präprimale Algebren betrachtet, die arithmetische Varietäten erzeugen. In Theorem 3.2 wird eine algebraische Charakterisierung dieser präprimalen Algebren gegeben und damit teilweise ein für beliebige präprimale Algebren noch offenes Problem gelöst. Ausgangspunkt ist einerseits die von Rosenberg [9] vorgenommene Klassifizierung der maximalen Klassen von Funktionen über einer endlichen Menge, andererseits die Behandlung von Vollständigkeitsfragen in universalen Algebren in Arbeiten von Foster und Pixley.

1. Grundbegriffe

Sei $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ und $\boldsymbol{F}(E_k)$ die Menge aller Funktionen, die auf E_k definiert sind, d.h. $\boldsymbol{F}(E_k) = \bigcup_{n=0}^{\infty} F_n(E_k)$ mit $F_n(E_k) = \{f\colon E_k^n \to E_k\}$.

$\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ sei eine endliche Algebra mit $F \subseteq \boldsymbol{F}(E_k)$ als Menge der Fundamentaloperationen. $\bar{F}$ bezeichne die aus F durch Superposition von Funktionen entstehende Klasse von Funktionen aus $\boldsymbol{F}(E_k)$, die alle Projektionen $e_i^n \in F_n(E_k)$ mit $e_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, enthalten soll. Dann ist $\bar{F}$ Polynomialklasse oder Operationenklon von $\boldsymbol{A}$.

Zwei Algebren heißen *äquivalent*, wenn sie den gleichen Operationenklon erzeugen.

In den Arbeiten von Foster wird der Begriff der primalen Algebra definiert:

DEFINITION 1.1. $\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ $(k \geqslant 1)$ ist *genau dann primal*, wenn alle Funktionen aus $\boldsymbol{F}(E_k)$ Polynomiale von $\boldsymbol{A}$ sind, d.h. $\overline{F} = \boldsymbol{F}(E_k)$.

Für primale Algebren gilt folgende Charakterisierung:

THEOREM 1.1. *$\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ $(k \geqslant 1)$ ist genau dann primal, wenn folgendes gilt:*

(a) *$\boldsymbol{A}$ hat keine echte Teilalgebra,*

(b) *$\boldsymbol{A}$ hat keine nichttrivialen Automorphismen ($\boldsymbol{A}$ ist rigid),*

(c) *$\boldsymbol{A}$ ist einfach,*

(d) *$V_{\boldsymbol{A}}$ (die von $\boldsymbol{A}$ erzeugte Varietät: $V_{\boldsymbol{A}} = \mathrm{HSP}\boldsymbol{A}$) besteht nur aus Algebren, deren Kongruenzenverbände distributiv sind und deren Kongruenzen paarweise vertauschbar sind.*

Wir nennen $\boldsymbol{A}$ arithmetisch, wenn der Kongruenzenverband $\theta(\boldsymbol{A})$ permutierbar und distributiv ist. Eine Varietät V ist arithmetisch, wenn jedes $\boldsymbol{A} \in V$ arithmetisch ist.

In [6] wird bewiesen:

THEOREM 1.2. *Eine Varietät V ist genau dann arithmetisch, wenn ein Polynomial p so existiert, daß folgende Gleichungen Identitäten in V sind: $p(x, x, z) = p(z, x, x) = p(z, x, z) = z$.*

Beispiele für Algebren, die arithmetische Varietäten erzeugen, sind primale, aber auch semiprimale; jede Funktion $f\colon E_k^n \to E_k$, die alle Teilalgebren von $\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ bewahrt, ist Polynomial; demiprimale, jede Funktion, die alle Automorphismen von $\boldsymbol{A}$ bewahrt, ist Polynomial; und quasiprimale, jede Funktion f, die alle Teilalgebren und alle Isomorphismen zwischen nichttrivialen Teilalgebren von $\boldsymbol{A}$ bewahrt, ist Polynomial. Semi- und demiprimale Algebren sind Spezialfälle von quasiprimalen.

Für semi- bzw. quasiprimale Algebren gilt folgende Charakterisierung:

THEOREM 1.3 ([3]). *$\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ $(k \geqslant 1)$ ist genau dann semiprimal, wenn folgendes gilt:*

(a) *$V_{\boldsymbol{A}}$ ist arithmetisch,*

(b) *alle Teilalgebren von $\boldsymbol{A}$ sind einfach,*

(c) *alle Teilalgebren von $\boldsymbol{A}$ sind rigid,*

(d) *keine zwei verschiedenen Teilalgebren mit mehr als einem Element sind isomorph.*

THEOREM 1.4 ([5]). *$\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ $(k \geqslant 1)$ ist genau dann quasiprimal, wenn folgendes gilt:*

(a) *$V_{\boldsymbol{A}}$ ist arithmetisch,*

(b) *jede nichttriviale Teilalgebra von $\boldsymbol{A}$ ist einfach.*

Quasiprimale Algebren sind einfach. Der Gedanke, in gewissem Sinn vollständige Algebren zu erhalten, die nicht einfach sind, führte zum Begriff der hemiprimalen Algebra ([2]).

$\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ ist genau dann hemiprimal, wenn jede Funktion, die alle Kongruenzen von $\boldsymbol{A}$ bewahrt, Polynomial von $\boldsymbol{A}$ ist. In [8] charakterisierte Pixley die arithmetischen Algebren, die hemiprimal sind.

THEOREM 1.5. *$\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ sei eine arithmetische Algebra. Dann ist $\boldsymbol{A}$ genau dann hemiprimal, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(a) *$\boldsymbol{A}$ hat keine echten Teilalgebren,*

(b) *Wenn $\theta_1, \theta_2 \in \theta(\boldsymbol{A})$, dann ist ein beliebiger Isomorphismus $g\colon \boldsymbol{A}/\theta_1 \to \boldsymbol{A}/\theta_2$ die Identität,*

(c) *$V_{\boldsymbol{A}}$ ist arithmetisch.*

Weiter gilt: hemiprimale Algebren haben keine nichtidentischen Automorphismen.

Eine spezielle Klasse hemiprimaler Algebren sind die linear hemiprimalen. Ihr Kongruenzenverband ist eine Kette, d.h. $\theta \leqslant \theta'$ oder $\theta' \leqslant \theta$ für alle θ, θ'. Linear hemiprimale Algebren sind arithmetisch.

2. Präprimale Algebren

Bei der Lösung des Problems der funktionalen Vollständigkeit in der k-wertigen Logik spielen die maximalen Klassen eine wesentliche Rolle. $F \subset \boldsymbol{F}(E_k)$ heißt *maximale Klasse*, wenn für jede Funktion $f \in \boldsymbol{F}(E_k)$, $f \notin \overline{F}$ gilt: $\overline{\{F \cup f\}} = \boldsymbol{F}(E_k)$. Maximale Klassen sind im Verband der abgeschlossenen Klassen von Funktionen aus $\boldsymbol{F}(E_k)$ maximale Elemente. Rosenberg hat in [9] alle maximalen Klassen der k-wertigen Logik bestimmt. Damit wurde das Vollständigkeitsproblem gelöst: Ein System F von Funktionen ist genau dann vollstandig, d.h. $\boldsymbol{F}(E_k) = \overline{F}$, wenn es in keiner der maximalen Klassen vollstandig enthalten ist.

Eine Algebra $\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$, für die F in $\boldsymbol{F}(E_k)$ vollständig ist, ist nach Definition 1.1 primal.

Es ergibt sich die Frage, welche Eigenschaften Algebren $\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ haben, wo $\overline{F}$ eine maximale Klasse in $\boldsymbol{F}(E_k)$ ist. Das führt zu folgender Definition ([4]):

DEFINITION 2.1. Eine Algebra $\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ $(k \geqslant 1)$ ist genau dann *präprimal*, wenn $\overline{F}$ eine maximale Klasse in $\boldsymbol{F}(E_k)$ ist.

In [1] wird, ausgehend von der Rosenbergschen Klassifizierung aller maximalen Klassen in $\boldsymbol{F}(E_k)$, eine vollständige Klassifizierung aller präprimalen Algebren (bis auf Äquivalenz) vorgenommen.

Dabei werden folgende Klassen unterschieden:

$\boldsymbol{A}^k_\varrho = \langle E_k, F_0\rangle \overline{F}_0 = A^k_\varrho$: Klasse aller Funktionen aus $\boldsymbol{F}(E_k)$, die eine Ordnungsrelation mit großtem und kleinstem Element bewahren.

$\boldsymbol{S}^k_{s(x)} = \langle E_k, F_d\rangle \overline{F}_d = S^k_{s(x)}$: Klasse aller Funktionen, die bzgl. einer Permutation s von E_k mit Zyklen gleicher Primzahllange ohne invariante Elemente selbstdual sind: für alle $f \in S^k_{s(x)}$ gilt: $f(s(x), s(y), \ldots) = s(f(x, y, \ldots))$.

$\boldsymbol{L}^k_G = \langle E_k, F_p\rangle \overline{F}_p = L^k_G$: für $k = p^m$ (p Primzahl) Klasse aller Funktionen, die bzgl. einer abelschen Gruppe $\boldsymbol{G}$ auf E_k, deren von Null verschiedenen Elemente die Ordnung p haben, quasilinear sind.

$\boldsymbol{A}^k_\gamma = \langle E_k, F_q\rangle \overline{F}_q = A^k_\gamma$: Klasse aller Funktionen, die eine zentrale, total reflexive, total symmetrische h-äre Relation bewahren: $2 \leqslant h \leqslant k$.

$\boldsymbol{T}^k_{A,0} = \langle E_k, F_s\rangle \overline{F}_s = T^k_{A,0}$: Klasse aller Funktionen, die eine Teilmenge $\emptyset \neq A \subset E_k$ bewahren.

$\boldsymbol{U}^k_\theta = \langle E_k, F_h\rangle \overline{F}_h = U^k_\theta$: Klasse aller Funktionen, die eine Äquivalenzrelation θ auf E_k bewahren, θ ist dabei verschieden von der Null- und der Einheitsrelation.

$\boldsymbol{A}^k_\delta = \langle E_k, F_u\rangle \overline{F}_u = A^k_\delta$: Klasse aller Funktionen, die eine h-universelle Relation auf E_k bewahren: $3 \leqslant h < k$.

$\boldsymbol{T}^k_{N,k-1} = \langle E_k, F_l\rangle \overline{F}_l = T_{N,k-1}$: Klasse, die alle Funktionen einer Variablen und alle Funktionen, die einen Wert auslassen, enthält.

In [1] werden für präprimale Algebren folgende Eigenschaften bewiesen:

LEMMA 2.1. *Eine präprimale Algebra, die nicht von der Form $\boldsymbol{T}^k_{A,0}$ ist, hat keine echten Teilalgebren. Eine präprimale Algebra, die nicht von der Form $\boldsymbol{U}^k_\theta$ ist, einfach. Eine präprimale Algebra, die nicht von der Form $\boldsymbol{S}^k_{s(x)}$ ist, hat keine nichtidentischen Automorphismen.*

Aus den Definitionen folgt sofort, daß $\boldsymbol{T}^k_{A,0}$ semiprimal, $\boldsymbol{S}^k_{s(x)}$ demiprimal und $\boldsymbol{U}^k_\theta$ linear hemiprimal ist.

Diese Algebren erzeugen demnach arithmetische Varietäten. Weiter folgt unter Verwendung von Lemma 2.1:

THEOREM 2.2. *Sei $\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ eine präprimale Algebra, dann gilt:*

(a) *jede echte nichttriviale Teilalgebra von $\boldsymbol{A}$ ist primal,*

(b) *jedes echte nichttriviale homomorphe Bild von $\boldsymbol{A}$ ist primal,*

(c) *jede nichttriviale Automorphismengruppe einer präprimalen Algebra ist zyklisch und von Primzahlordnung.*

Nennt man eine Algebra $\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ konstantiv, wenn jedes Element von E_k (abgeleitete) nullstellige Operation der Algebra ist, so gilt:

LEMMA 2.3. *Eine präprimale Algebra ist entweder quasiprimal oder konstantiv.*

Quasiprimale präprimale Algebren sind die Algebren der Form $\boldsymbol{S}^k_{s(x)}$ und $\boldsymbol{T}^k_{A,0}$.

Eine konstantive Algebra ist rigid und hat keine echten Teilalgebren.

3. Präprimale Algebren der Formen $\boldsymbol{T}^k_{A,0}$, $\boldsymbol{U}^k_\theta$, $\boldsymbol{S}^k_{s(x)}$

Präprimale Algebren der Formen $\boldsymbol{T}^k_{A,0}$, $\boldsymbol{U}^k_\theta$, $\boldsymbol{S}^k_{s(x)}$ erzeugen arithmetische Varietäten. Es sind auch die einzigen präprimalen Algebren, die arithmetische Varietäten erzeugen. Aus Lemma 2.1 folgt, daß alle anderen präprimalen Algebren einfach und rigid sind und keine echten Teilalgebren haben. Wenn eine Algebra mit diesen Eigenschaften eine arithmetische Varietät erzeugt, so ist sie nach Theorem 1.1 primal. Eine Folgerung aus Lemma 2.1 und Lemma 2.3 ist demnach:

THEOREM 3.1. *Eine präprimale Algebra erzeugt entweder eine arithmetische Varietät oder ist konstantiv und einfach.*

In diesem Abschnitt sollen die präprimalen Algebren betrachtet werden, die arithmetische Varietäten erzeugen.

Theorem 1.1 kann auch so formuliert werden:

Erzeugt eine Algebra $\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ $(k \geqslant 1)$ eine arithmetische Varietät, so ist sie genau dann primal, wenn folgendes gilt:

(a) $\boldsymbol{A}$ hat keine echte Teilalgebra,

(b) $\boldsymbol{A}$ hat keine echten Automorphismen, ist rigid,

(c) $\boldsymbol{A}$ ist einfach.

Algebren der Form $\boldsymbol{T}^k_{A,0}$ erfüllen als semiprimale Algebren nach Theorem 1.3 die Bedingungen (b) und (c), während an Stelle von (a) gilt:

(a′) $\boldsymbol{A}$ hat genau eine echte Teilalgebra, die primal oder trivial (d.h. einelementig) ist.

$\boldsymbol{U}^k_\theta$ erfüllt als hemiprimale Algebra nach Theorem 1.5 die Bedingungen (a) und (b), statt (c) gilt:

(c′) $\boldsymbol{A}$ hat genau ein nichttriviales homomorphes Bild, und zwar eine primale Algebra. $\boldsymbol{S}^k_{s(x)}$ erfüllt nach Theorem 1.4 (c), und da demiprimale

Algebren keine echten Teilalgebren haben, die Bedingung (a). Statt (b) gilt:

(b′) $\boldsymbol{A}$ hat eine zyklische Automorphismengruppe von Primzahlordnung.

Für eine präprimale Algebra, die eine arithmetische Varietät erzeugt, gilt also einer der drei Fälle, den man erhält, wenn eine der drei Bedingungen (a), (b), (c) durch eine der Bedingungen (a′), (b′), (c′) ersetzt wird, die anderen beibehalten werden.

Es gilt auch die Umkehrung und damit:

THEOREM 3.2. *Eine Algebra* $\boldsymbol{A} = \langle E_k, F\rangle$ $(k \geqslant 1)$, *die eine arithmetische Varietät erzeugt, ist genau dann präprimal, wenn einer der folgenden drei (einander ausschließenden) Fälle vorliegt*:

1. (a′) *$\boldsymbol{A}$ hat genau eine Teilalgebra $\boldsymbol{B}$, die trivial oder primal ist,*
 (b) *$\boldsymbol{A}$ ist rigid,*
 (c) *$\boldsymbol{A}$ ist einfach.*
2. (a) *$\boldsymbol{A}$ hat keine echte Teilalgebra,*
 (b) *$\boldsymbol{A}$ ist rigit,*
 (c′) *$\boldsymbol{A}$ hat genau ein nichttriviales kanonisches homomorphes Bild, dieses Bild ist eine primale Algebra.*
3. (a) *$\boldsymbol{A}$ hat keine echte Teilalgebra,*
 (b′) *Die Automorphismengruppe von $\boldsymbol{A}$ ist zyklisch und von Primzahlordnung,*
 (c) *$\boldsymbol{A}$ ist einfach.*

Beweis. $\boldsymbol{A}$ erzeugt eine arithmetische Varietät und es gelten die Bedingungen (a′), (b), (c). Damit sind die Bedingungen des Theorems 1.3 erfüllt, denn da $\boldsymbol{A}$ einfach ist und die einzige nichttriviale, Teilalgebra primal, also auch einfach ist, sind alle Teilalgebren von $\boldsymbol{A}$ einfach. $\boldsymbol{A}$ ist rigid, die einzige nichttriviale Teilalgebra als primale Algebra ebenfalls, die Teilalgebren haben also keine echten Automorphismen. Die vierte Bedingung von Theorem 1.3 ist ebenfalls erfüllt, denn es gibt nur eine echte Teilalgebra von $\boldsymbol{A}$. Daher ist $\boldsymbol{A}$ semiprimal. Nach Definition der semiprimalen Algebren und da $\boldsymbol{A}$ nur eine echte Teilalgebra hat, ist jede Funktion, die die zugehörige Teilmenge B bewahrt, Polynomial über $\boldsymbol{A}$. $\boldsymbol{A}$ hat folglich die Form $T^k_{B,0}$ und ist damit präprimal.

Bemerkung. Von der Teilalgebra $\boldsymbol{B}$ wird nur verwendet, daß sie einfach und rigid ist. Da sie die einzige echte Teilalgebra ist, hat sie keine Teilalgebren, außerdem erzeugt sie eine arithmetische Varietät, ist also nach Theorem 1.1 primal.

Als nächstes setzen wir für eine Algebra $\boldsymbol{A}$, wo V_A arithmetisch ist, die Gultigkeit von (a), (b) und (c′) voraus. Dann sind alle Bedingungen von Theorem 1.5 erfüllt, denn da $\boldsymbol{A}$ nur eine Kongruenz hat, die von der Null- und der Binheitskongruenz verschieden ist, kommt als Isomorphismus nur ein Automorphismus von $\boldsymbol{A}/\theta$ in Frage. $\boldsymbol{A}/\theta$ ist aber primal, hat folglich keinen nichttrivialen Automorphismus. Nach Theorem 1.5 ist $\boldsymbol{A}$ damit hemiprimal. Nach Definition der hemiprimalen Algebren und da θ die einzige nichttriviale Kongruenz ist, besteht $\overline{F}$ aus allen Funktionen, die θ bewahren, hat also die Form $\overline{F} = U^k_\theta$, und damit ist $\boldsymbol{A}$ präprimal.

Jetzt setzen wir die Gültigkeit von (a), (b′), (c) voraus. Wegen (a) und (c) sind die Bedingungen von Theorem 1.4 erfüllt. $\boldsymbol{A}$ ist quasiprimal, d.h. nach Definition, daß alle Funktionen, die alle Teilalgebren und alle Isomorphismen zwischen nichttrivialen Teilalgebren von $\boldsymbol{A}$ bewahren, Polynomiale über $\boldsymbol{A}$ sind. $\boldsymbol{A}$ hat aber keine Teilalgebren, daher gibt es nur Automorphismen von $\boldsymbol{A}$. $\overline{F}$ besteht aus allen Funktionen, die alle Automorphismen von $\boldsymbol{A}$ bewahren, $\boldsymbol{A}$ ist demiprimal. Die Automorphismengruppe von $\boldsymbol{A}$ ist zyklisch und hat die Primzahlordnung p. Sie wird folglich von einer Permutation der Ordnung p über E_k erzeugt: $\boldsymbol{G} = \langle s\rangle$. s läßt sich eindeutig als Produkt elementfremder Zyklen schreiben, dabei ist die Ordnung von s das kleinste gemeinsame Vielfache der Ordnungen der einzelnen Zyklen. Da die Ordnung von s eine Primzahl ist, besteht s aus Zyklen gleicher Primzahllänge p.

Als nächstes ist zu zeigen, daß s keine Fixelemente haben kann. Um dies einzusehen, bilde man die Menge Z aller Fixelemente von s. Angenommen, es wäre $Z \neq \emptyset$. Offenbar bildet Z eine Teilalgebra von $\boldsymbol{A}$. Da $\boldsymbol{A}$ zufolge (a) keine echten Teilalgebren enthält, so wäre $Z = E_k$, s die Identität und s von der Ordnung 1 entgegen der Annahme $p \neq 1$.

$\overline{F}$ besteht also aus allen Funktionen, die eine Permutation von Primzahlordnung ohne invariante Elemente bewahren, ist daher von der Form $\overline{F} = S^k_{s(x)}$, und $\boldsymbol{A}$ ist primal.

Literatur

[1] K. Denecke, *Algebraische Fragen nichtklassischer Aussagenkalküle*, Dissertation, Pädagogische Hochschule, Potsdam 1978.
[2] A. L. Foster, *Congruence relations and functional completeness in universal algebras: structure theory for hemi-primals. I*, Math. Zeitschr. 113 (1970), 293–308.
[3] A. L. Foster and A. F. Pixley, *Semi-categorical algebras. I, Semi-primal algebras*, ibid. 83 (1964), 147–169.
[4] J. Froemke, *Maximal pre-primal clusters*, Canad. J. Math. 27 (1975), 746–751.

[5] A. F. Pixley, *Functionally complete algebras generating distributive and permutable classes*, Math. Zeitschr. 114 (1970), 361–372.

[6] —, *The ternary discriminator function in universal algebra*, Math. Ann. 191 (1971), 167–180.

[7] —, *A note on hemi-primal algebras*, Math. Zeitschr. 124 (1972), 213–214.

[8] —, *Completeness in arithmetical algebras*, Algebra Universalis 2 (1972), 179–196.

[9] I. Rosenberg, *Über die functionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken*, Rozpravy Československé Akademie Věd, Řada Matematických a Přírodnich Věd, Praha 1970.

Presented to the Semester
Universal Algebra and Applications
(February 15 – June 9, 1978)

UNIVERSAL ALGEBRA AND APPLICATIONS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 9
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

CATEGORICAL, FUNCTORIAL AND ALGEBRAIC ASPECTS OF THE TYPE-FREE LAMBDA CALCULUS

ADAM OBTUŁOWICZ and ANTONI WIWEGER

Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warsaw, Poland

0. Introduction

From the set-theoretical point of view, the type-free λ-calculus initiated by A. Church around 1930 may be labelled as a deductive system fit for examining sets with the property

$$A = A^A. \tag{1}$$

Unfortunately, (1) is satisfied only if A is a one-element set and if we agree to identify the unique element in A with the unique function $A \to A$. The problem of finding non-trivial models of the type-free λ-calculus turned out to be difficult and was solved by D. Scott in 1969. Even the question what should be meant by a "model" of the type-free λ-calculus requires some consideration. In this paper we shall outline a certain new approach to the syntax and the semantics of the type-free λ-calculus. In Sections 2 and 3 some modifications of the classical syntax of the type-free λ-calculus are described. In Sections 4, 5 and 6 we "categorize" the syntax of the type-free λ-calculus: we construct some categories from λ-terms and we introduce the concept of a Church algebraic theory. In Section 7 "models" in the style of Wadsworth [5] are discussed; we give a new characterization of these "models", which is independent of the syntax of the type-free λ-calculus. In Section 8 a method of "functorializing" the semantics of the type-free λ-calculus is described; "models" of the type-free λ-calculus are identified with certain functors defined on Church algebraic theories. In Sections 9, 10, the new concepts of a hyperalgebra and hyperhomomorphism are introduced and discussed; it is shown that certain "models" of the type-free λ-calculus can be treated as hyperalgebras.