UNIVERSAL ALGEBRA AND APPLICATIONS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 9
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

INDUZIERTE SYMPLEKTISCHE MODULN

KURT ROSENBAUM

Pädagogische Hochschule „Dr. Theodor Neubauer", Sektion Mathematik und Physik, 50–Erfurt, D.D.R.

1. Einleitung

Sei G eine endliche Gruppe, χ ein linearer Charakter von G in K, d.h. eine Darstellung vom Grad 1, M ein Darstellungsmodul für G in K und $\Phi\colon M\times M\to K$ eine K-Bilinear-form. Das Tripel (M,χ,Φ) heißt ein *symplektischer Modul* bezüglich χ, wenn Φ nicht ausgeartet, schiefsymmetrisch und bezüglich χ auch G-invariant ist. Letzteres bedeutet

$$\Phi(a\sigma, b) = \chi(\sigma)\Phi(a, b\sigma^{-1})$$

für alle $a, b\in M$ und $\sigma\in G$.

Zwei symplektische Moduln (M,χ,Φ) und (M',χ,Φ') heißen *isomorph*, wenn es eine isomorphe Abbildung φ der Darstellungsmoduln M auf M' gibt, die zusätzlich noch isometrisch ist, d.h. wenn gilt:

1. $\varphi\colon M\to M'$ ist ein $K[G]$-Isomorphismus.
2. $\Phi(a, b) = \Phi'(\varphi(a), \varphi(b))$ für alle $a, b\in M$.

Diese Begriffe lassen sich leicht in die gleichberechtigte Sprache der Matrixdarstellungen übersetzen:

Sei $\sigma\to A_\sigma$ die bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte zu M gehörende Darstellung von G. (M,χ,Φ) ist genau dann ein symplektischer Modul, wenn es eine reguläre schief-symmetrische Matrix C gibt mit

$$A_\sigma C = \chi_{(\delta)} C(A_\sigma^T)^{-1}$$

für alle $\sigma\in G$. Die Matrix C ist die Formenmatrix der K-Bilinearform Φ in der Basis, die auch der Darstellung $\sigma\mapsto A_\sigma$ zugrunde liegt. Seien $\sigma\mapsto A_\sigma$ und $\sigma\mapsto A'_\sigma$ die zu den Darstellungsmoduln M bzw. M' für G in K gehörenden Darstellungen. Die symplektischen Moduln (M,χ,Φ) und (M',χ,Φ') sind genau dann isomorph, wenn es eine reguläre Matrix B gibt mit den Eigenschaften:

1. $A_\sigma B = BA'_\sigma$ für alle $\sigma \in G$,

2. $C = BC'B^T$.

Hierbei bedeuten C und C' die zu Φ bzw. zu Φ' gehörenden Formenmatrizen.

In dieser Arbeit zeigen wir, daß sich die Methode des Induzierens von Darstellungsmoduln auch auf symplektische Moduln übertragen läßt. Unser Hauptergebnis (Satz 1) gestattet zwei Folgerungen über die Konjugiertheit des einem induzierten symplektischen Modul zugrunde liegenden Darstellungsmoduls sowie über die Formenmatrix eines induzierten symplektischen Moduls mit absolut irreduziblem Darstellungsmodul. Wenn der „kleine" Darstellungsmodul absolut irreduzibel und nicht selbstkonjugiert ist, und wenn der induzierte Darstellungsmodul ebenfalls absolut irreduzibel ist, so kann man über das symplektische Verhalten desselben nichts aussagen. Beispiele zeigen, daß alle möglichen Fälle eintreten können.

Die Fertigstellung dieser Arbeit haben folgende Mathematiker in dankenswerter Weise unterstützt. L. A. Bokuth ermöglichte es mir, die hier entwickelten Grundgedanken während der 14. Allunionskonferenz über Algebra in September 1977 in Nowosibirsk vorzutragen.

Ihre jetzige Form erhielten sie während meines Aufenthaltes am Banach-Zentrum in Mai 1978 durch das fördernde Interesse von A. Fröhlich.

2. Das Hauptergebnis

Von nun an setzen wir voraus, daß die Ordnung g kein Vielfaches der Charakteristik des algebraisch abgeschlossenen Körpers K ist. Sei $H \subseteq G$ eine Untergruppe von G und N ein Darstellungsmodul für H in K mit der zugehörigen Darstellung $\tau \mapsto B_\tau$. Die induzierte Darstellung $\sigma \mapsto A_\sigma$ der Gruppe G ist dann bekanntlich erklärt durch

$$A_\sigma = (A_{ik}) \quad \text{mit} \quad A_{ik} = \begin{cases} B_{\sigma_i\sigma\sigma_k^{-1}}, & \text{falls } \sigma_i\sigma\sigma_k^{-1} \in H, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{1}$$

Dabei ist $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ ein Repräsentantensystem der Zerlegung von G in Rechtsnebenklassen nach H. Der zugehörige induzierte Darstellungsmodul für G in K ist

$$M = N \otimes_{K[H]} K[G] .$$

Ein Charakter χ_H von H läßt sich genau dann zu einem Charakter χ von G fortsetzen, wenn die Einschränkung von χ_H auf $H \cap G'$ mit dem Einheitscharakter zusammenfällt.

Satz 1. *Sei* (N, χ_H, Φ_H) *ein symplektischer Modul bezüglich eines Charakters* $\chi_H\colon H \to K$, *der sich einem Charakter* $\chi\colon G \to K$ *fortsetzen läßt. Dann ist auch der induzierte Darstellungsmodul* $M = N \otimes_{K[H]} K[G]$ *ein symplektischer Modul* (M, χ, Φ) *bezüglich* χ. *Die K-Bilinearform* Φ *ist definiert durch*

$$\Phi(a, b) = \sum_{i=1}^{r} \chi(\sigma_i)\Phi_H(n_i, n'_i). \tag{2}$$

Dabei ist $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ *ein Repräsentantensystem der Zerlegung von* G *in Rechtsnebenklassen nach* H *und*

$$a = \sum_{i=1}^{r} n_i \otimes \sigma_i, \qquad b = \sum_{i=1}^{r} n'_i \otimes \sigma_i .$$

Beweis. Wir führen den Beweis in der Sprache der Matrixdarstellungen. Die zu N gehörende Darstellung von H sei gegeben durch $\tau \mapsto B_\tau$. Da (M, χ_H, Φ_H) ein symplektischer Modul ist, gibt es eine reguläre schiefsymmetrische Matrix D mit

$$B_\tau D = \chi_H(\tau) D (B_\tau^T)^{-1}$$

für alle $\tau \in H$. Für die von $\tau \mapsto B_\tau$ gemäß (1) induzierte Darstellung $\sigma \mapsto A_\sigma$ und die Forsetzung χ gilt dann

$$A_\sigma C = \chi(\sigma) C (A_\sigma^T)^{-1}$$

für alle $\sigma \in G$ und die reguläre schiefsymmetrische Kästchendiagonalmatrix

$$C = \begin{bmatrix} \chi(\sigma_1)D & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \chi(\sigma_r)D \end{bmatrix}. \tag{3}$$

In der Tat, sei in $A_\sigma = (A_{ik})$ der Teilmatrix $A_{ik_i} \neq 0$, d.h. sei in der i-ten „Zeile" nur die an der k-ten Stelle stehende Teilmatrix von der Nullmatrix verschieden, so wird

$$\begin{aligned} A_\sigma C A_\sigma^T &= \begin{bmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{r1} & \ldots & A_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi(\sigma_1)D & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \chi(\sigma_r)D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11}^T & \ldots & A_{r1}^T \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1r}^T & \ldots & A_{rr}^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \chi(\sigma_{k_1})A_{1k_1}DA_{1k_1}^T & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \chi(\sigma_{k_r})A_{rk_r}DA_{rk_r}^T \end{bmatrix} \\ &= \chi(\sigma)C . \end{aligned}$$

Wegen $\sigma_i\sigma\sigma_{k_i}^{-1} = \tau \in H$ erhalten wir nämlich unter Verwendung von $B_\tau D B_\tau^T = \chi_H(\tau)D$ für alle $\tau \in H$ sofort

$$\chi(\sigma_{k_i})A_{ik_i}DA_{ik_i} = \chi(\sigma_{k_i})\chi_H(\sigma_i\sigma\sigma_{k_i}^{-1})D = \chi(\sigma)\chi(\sigma_i)D .$$

Die Matrix C ist regulär, denn $\det C = \chi(\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_r)\det D \neq 0$. Die Schiefsymmetrie von C folgt aus der Schiefsymmetrie von D.

Hieraus ergibt sich (2), denn D und C sind die Formenmatrizen der K-Bilinearformen Φ_H bzw. Φ. Damit ist Satz 1 bewiesen.

Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ der Zerlegung von G in Rechtsnebenklassen nach H.

Satz 2. *Ist (N, χ_H, Φ_H) ein symplektischer Modul bezüglich eines von H auf G zu χ fortsetzbaren Charakters und sind $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$ und $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots, \sigma'_r$ zwei Repräsentatensysteme der Zerlegung von G in Rechtsnebenklassen nach H, so sind die induzierten Darstellungsmoduln M bzw. M' als symplektische Moduln isomorph.*

Beweis. Aus der Darstellungstheorie ist bekannt ([4], S. 174), daß die induzierten Darstellungen $\sigma \mapsto A_\sigma$ und $\sigma \mapsto A'_\sigma$ zueinander äquivalent sind. Sei $\sigma_i = \tau_i\sigma'_i$ mit $\tau_i \in H$, so ist für die reguläre Matrix

$$B = \begin{bmatrix} B_{\tau_1} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & B_{\tau_r} \end{bmatrix}$$

offenbar $A_\sigma B = BA'_\sigma$ für alle $\sigma \in G$. Sind nun C und C' die gemäß (3) gebildeten Formenmatrizen der von N induzierten Darstellungsmoduln, so gilt darüber hinaus sogar

$$C = BC'B^T.$$

Die Rechnung verläuft analog zu der im Beweis von Satz 1 durchgeführten. Damit ist Satz 2 bewiesen.

Wir nennen (M, χ, Φ) mit $M = N \otimes_{K[H]} K[G]$ den von (N, χ_H, Φ_H) induzierten symplektischen Modul und Φ die von Φ_H induzierte K-Bilinearform.

Jeder symplektische Modul (M, χ, Φ) ist als Darstellungsmodul bezüglich χ selbstkonjugiert, d.h., es besteht ein $K[G]$-Isomorphismus

$$\varphi\colon M \to \mathrm{Hom}_K(M, K)$$

vermöge $a \mapsto \varphi(a)$ mit $\varphi(a)(b) = \Phi(a, b)$ und $[\varphi(a)\sigma](b) = \chi(\sigma)\varphi(a)(b\sigma^{-1})$ für alle $a, b \in M$ und $\sigma \in G$.

Satz 1 liefert sofort

Folgerung 1. *Sei (N, χ_H, Φ_H) ein symplektischer Modul und (M, χ, Φ) ein induzierter symplektischer Modul, so gilt*

$$\mathrm{Hom}_K(N \otimes_{K[H]} K[G]) \cong \mathrm{Hom}_K(N, K) \otimes_{K[H]} K[G]. \tag{4}$$

Wie im Beweis von Satz 1 läßt sich zeigen, daß die obige $K[G]$-Isomorphie auch besteht, wenn N ein beliebiger Darstellungsmodul für H in K, χ_H ein auf G fortsetzbarer Charakter von H und $M = N \otimes_{K[H]} K[G]$ der von N induzierte Darstellungsmodul für G in K ist. Falls χ_H mehrere Fortsetzungen zu Charakteren von G hat, so gilt (4) bezüglich jeder dieser Fortsetzungen. Aus dem Lemma von Schur folgt ([1], Lemma 5): Ist N ein absolut irreduzibler Darstellungsmodul für H in K mit der zugehörigen Darstellung $\tau \mapsto B_\tau$, so folgt aus der Selbstkonjugiertheit von N bezüglich χ_H, d.h. aus

$$B_\tau D = \chi_H(\tau) D (B_\tau^T)^{-1}$$

für alle $\tau \in H$, daß die reguläre Matrix D entweder schiefsymmetrisch oder symmetrisch und bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig bestimmt ist. Genauer wird das symplektische Verhalten von N beschrieben durch das folgende Ergebnis ([3], Satz 11):

Ist N ein absolut irreduzibler Darstellungsmodul für H in K und χ_H ein Charakter von H, so gilt genau einer der drei Fälle

$$\frac{1}{g_H} \sum_{\tau \in H} \chi_H(\tau^{-1}) \mathrm{Sp}_H(\tau^2) = \begin{cases} -1, \\ +1, \\ 0. \end{cases} \tag{5}$$

Im ersten Fall ist N bezüglich χ_H selbstkonjugiert und gestattet die Einführung einer symplektischen Struktur.

Im zweiten Fall ist N ebenfalls selbstkonjugiert und gestattet die Einführung einer nicht ausgearteten, symmetrischen und G-invarianten Bilinearform.

Im dritten Fall ist N nicht selbstkonjugiert.

Hierbei bedeuten g_H die Ordnung der Gruppe H und Sp_H die Spur der Darstellung $\tau \mapsto B_\tau$ der Gruppe H. Aus Satz 1 ergibt sich nun.

Folgerung 2. *Sei (N, χ_H, Φ_H) ein symplektischer Modul über einem absolut irreduziblen Darstellungsmodul N für G in K und χ_H ein auf G fortsetzbarer Charakter. Wenn der induzierte Darstellungsmodul $M = N \otimes_{K[H]} K[G]$ ebenfalls absolut irreduzibel ist, so ist (bezüglich jeder Fortsetzung χ von χ_H)*

$$\frac{1}{g} \sum_{\sigma \in G} \chi(\sigma^{-1}) \mathrm{Sp}(\sigma^2) = -1,$$

d.h., die in Satz 1 aus Φ_H konstruierte Bilinearform Φ ist bis auf ein skalares Vielfaches die einzige in M.

Hierbei bedeuten g die Ordnung der Gruppe G und Sp die Spur der von $\tau \mapsto B_\tau$ induzierten Darstellung $\sigma \mapsto A_\sigma$ der Gruppe G.

Ebenso ergibt sich: Wenn

$$\frac{1}{g_H} \sum_{\tau \in H} \chi_H(\tau^{-1}) \mathrm{Sp}_H(\tau^2) = +1,$$

d.h. wenn sich in N eine nicht ausgeartete, symmetrische und G-invariante Bilinearform einführen läßt, so gilt im Falle der absoluten Irreduzibilität des induzierten Darstellungsmoduls

$$\frac{1}{g}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})\mathrm{Sp}(\sigma^2) = +1.$$

3. Beispiele

Ist N ein absolut irreduzibler Darstellungsmodul für H in K, der bezüglich eines Charakters χ_H nicht selbstkonjugiert ist, d.h. ist

$$\frac{1}{g_H}\sum_{\tau\in H}\chi_H(\tau^{-1})\mathrm{Sp}_H(\tau^2) = 0$$

und ist der induzierte Darstellungsmodul $M = N\otimes_{K[H]}K[G]$ ebenfalls absolut irreduzibel, so kann sich M bezüglich verschiedener Fortsetzungen von χ_H verschieden verhalten. Insbesondere kann jeder der drei möglichen Fälle

$$\frac{1}{g}\sum_{\sigma\in G}\chi(\sigma^{-1})\mathrm{Sp}(\sigma^2) = \begin{cases}-1,\\ +1,\\ 0\end{cases}$$

auftreten.

Beispiel 1. In der Diedergruppe $G = D_m = \langle\sigma, \tau\rangle$ mit $m \geqslant 3$ und den Relationen

$$\sigma^m = \tau^2 = 1, \quad \tau\sigma\tau = \sigma^{-1}$$

hat die Untergruppe $H = \langle\sigma\rangle$ die absolut irreduzible Darstellung

$$d\colon\ \sigma \mapsto e^{2\pi i/m} = \zeta,$$

die bezüglich des Einheitscharakters χ_0 nicht selbstkonjugiert ist. χ_0 hat zwei Fortsetzungen zu Charakteren von G, nämlich

$$\chi_1\colon\ \begin{matrix}\sigma\mapsto 1\\ \tau\mapsto 1\end{matrix} \quad\text{und}\quad \chi_2\colon\ \begin{matrix}\sigma\mapsto 1,\\ \tau\mapsto -1.\end{matrix}$$

Für die absolut irreduzible induzierte Darstellung $\mathrm{Ind}_H^G d$, die gegeben ist durch

$$\sigma\mapsto\begin{bmatrix}\zeta & 0\\ 0 & \zeta^{-1}\end{bmatrix}, \quad \tau\mapsto\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},$$

ist dann

$$\frac{1}{2m}\sum_{a\in G}\chi_1(a^{-1})\mathrm{Sp}(a^2) = +1 \quad\text{und}\quad \frac{1}{2m}\sum_{a\in G}\chi_2(a^{-1})\mathrm{Sp}(a^2) = -1.$$

Beispiel 2. Die verallgemeinerte Quaternionengruppe $Q_n = \langle\sigma, \tau\rangle$ mit den Relationen

$$\sigma^n = \tau^2, \quad \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}, \quad \tau^4 = 1$$

enthält die zyklische Untergruppe $H = \langle\sigma\rangle$ der Ordnung $2n$. Die absolut irreduzible Darstellung

$$d\colon\ \sigma\mapsto e^{\pi i/n} = \eta$$

ist bezüglich des Einheitscharakters χ_0 nicht selbstkonjugert. χ_0 hat zwei Fortsetzungen zu Charakteren von G, nämlich

$$\chi_1\colon\ \begin{matrix}\sigma\mapsto 1\\ \tau\mapsto 1\end{matrix} \quad\text{und}\quad \chi_2\colon\ \begin{matrix}\sigma\mapsto 1,\\ \tau\mapsto -1.\end{matrix}$$

Auch hier ist die induzierte Darstellung $\mathrm{Ind}_H^G d$ vermöge

$$\sigma\mapsto\begin{bmatrix}\eta & 0\\ 0 & \eta^{-1}\end{bmatrix}, \quad \tau\mapsto\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

absolut irreduzibel, und es gilt

$$\frac{1}{4n}\sum_{a\in G}\chi_1(a^{-1})\mathrm{Sp}(a^2) = -1 \quad\text{und}\quad \frac{1}{4n}\sum_{a\in G}\chi_2(a^{-1})\mathrm{Sp}(a^2) = +1.$$

Beispiel 3. Die symmetrische Gruppe $G = S_4$ hat die Untergruppe $H = \langle(13), (14)(23)\rangle$. Die absolut irreduzible Darstellung

$$d\colon\ (13)\mapsto 1, \quad (14)(23)\mapsto -1$$

ist bezüglich des (alternierenden) Charakters χ_0, der jede Permutation aus H auf ihr Vorzeichen abbildet, nicht selbstkonjugiert.

Die induzierte absolut irreduzible Darstellung $\mathrm{Ind}_H^G d$ der Gruppe S_4 vermöge

$$(12)\mapsto\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}, \quad (13)\mapsto\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ist bezüglich des alternierenden Charakters χ, der einzigen Fortsetzung von χ_0 auf G, ebenfalls nicht selbstkonjugiert, denn

$$\frac{1}{24}\sum_{\sigma\in S_3}\chi(\sigma^{-1})\mathrm{Sp}(\sigma^2) = 0.$$

Literatur

[1] З. И. Боребич, *О симплектических пространствах с группами операторов*, Мат. записки 7 (1970), 36–50.

[2] *14-я Всесоюзная алгебраическая конференция, Новосибирск*, Тезисы докладов 1 (1977), 58.

[3] H. Huß und K. Rosenbaum, *Über die symplektische Struktur von Gruppenalgebren*, Wiss. Z. PH Erfurt/Mühlhausen 2 (1974), 55–63.
[4] K. Rosenbaum, *Vorlesungen über symplektische Moduln*, Teil 4, Erfurt 1976.

Presented to the Semester
Universal Algebra and Applications
(February 15 – June 9, 1978)

UNIVERSAL ALGEBRA AND APPLICATIONS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 9
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

ON REGULARITY CLASSES OF BINARY RELATIONS

HANS-J. BANDELT

Oldenburg University, Oldenburg, G.F.R.

The regularity classes of the semigroup of all binary relations have been described in full generality by K. A. Zareckiĭ [7]. In this note we are concerned with special binary relations for which the diagrams immediately tell us whether or not the relation belongs to a certain regularity class. In particular, we give a complete characterization of those binary relations on a finite set belonging to a non-trivial regularity class which happen to be the complements of quasi-orders. To do this, we may restrict ourselves to complete lattice orders. A special case was already established in [2]: the complement of a partial order is regular if and only if the associated completion by cuts is completely distributive.

Let S be a semigroup with identity. Given non-negative integers m and n, the regularity class $\mathscr{C}_S(m, n)$ is the set of all elements $a \in S$ for which there exists an element $x \in S$ such that $a^m x a^n = a$. The elements of $\mathscr{C}_S(1, 1)$ and $\mathscr{C}_S(2, 2)$ are called *regular* and *completely regular*, respectively. For $m+n \leqslant 1$, $\mathscr{C}_S(m, n)$ is *trivial*, that is $\mathscr{C}_S(m, n) = S$. Every regularity class is already equal to $\mathscr{C}_S(m, n)$ for some $m, n \leqslant 2$. The non-trivial classes other than $\mathscr{C}_S(0, 2)$, $\mathscr{C}_S(1, 1)$, and $\mathscr{C}_S(2, 0)$ are given by trivial intersections (cf. [3]).

The semigroup of all binary relations on a set X is denoted by $\mathscr{B}(X)$. For $\varrho, \sigma \in \mathscr{B}(X)$ the product is written as $\varrho \circ \sigma = \{(x, z) \mid \exists y \in X, (x, y) \in \varrho, (y, z) \in \sigma\}$. ϱ^{-1} and ϱ' denote the converse of ϱ and the complement of ϱ respectively; ϱ^{-n} is written for $(\varrho^{-1})^n$.

Our first lemma is a straightforward extension of [5], Theorem 1. Lemma 2 is an immediate consequence of this (cf. [5], Theorem 2).

LEMMA 1. *Let $\varrho, \varrho_1, \varrho_2 \in \mathscr{B}(X)$ be binary relations and let $\sigma = \{(x, y) \mid \varrho_1 \circ \{(x, y)\} \circ \varrho_2 \subseteq \varrho\}$. Then $\sigma = (\varrho_1^{-1} \circ \varrho' \circ \varrho_2^{-1})'$.*

Proof. For $x, y \in X$, $(x, y) \notin \sigma$ if and only if there exists $(u, v) \in \varrho'$ such that $(u, x) \in \varrho_1$ and $(y, v) \in \varrho_2$ if and only if $(x, y) \in \varrho_1^{-1} \circ \varrho' \circ \varrho_2^{-1}$.