DISCRETE MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 7
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

УСЛОВИЯ ПОЛНОТЫ СЕМЕЙСТВ ЭВРИСТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ

БАК ХЫНГ КХАНГ

Вычислительный центр АН СССР, Москва, СССР

§ 1. Введение

Настоящая работа относится к циклу исследований, посвященных алгебраической теории эвристических (некорректных) алгоритмов. Поэтому неприведенные в этой работе определения можно найти, например в [5], [6], [1]. В качестве эвристических алгоритмов рассматриваются алгоритмы распознавания.

Пусть $M = \bigcup_{i=1}^{l} K_i$ — множество, элементы которого назовем *объектами*. Подмножества K_i, $i = \overline{1, l}$ назовем *классами*. Каждому объекту $s \in M$ соответствует описание $I(s)$, определяемое n характеристиками $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называемыми *признаками*, причём $x_i \in M_i$, где M_i — множество значений i-ого признака с полуметрикой ϱ_i, $i = \overline{1, n}$ (метрика без аксиомы треугольника).

Пусть задано подмножество $M_0 \subseteq M$ мощности m, для которого известны описания объектов $I(s_i)$; $s_i \in M_0$, $i = \overline{1, m}$ и истинные значения предикатов $P_j(s_i) = \alpha_j(s_i)$, где $\alpha_j(s_i) \in \{0, 1\}$. Причём $\alpha_j(s_i) = 1$ означает, что объект $s_i \in K_j$, $\alpha_j(s_i) = 0$ означает $s_i \notin K_j$. Совокупность описаний объектов $I(s_1), I(s_2), \ldots, I(s_m)$ и истинных значений предикатов $\alpha(s_1), \alpha(s_2), \ldots, \alpha(s_m)$ обозначим через I_0. M_0 обычно называют *обучающим множеством*.

Пусть задана конечная выборка $\tilde{s}^q = s^1, s^2, \ldots, s^q$; $s^i \notin M$; $\tilde{s}^i \notin M_0$ для которой известны описания её объектов $I(s^1), I(s^2), \ldots, I(s^q)$. Совокупность этих описаний обозначим через $I(\tilde{s}^q)$.

Задача распознавания заключается в том, чтобы на основании начальной информации $(I_0, I(\tilde{s}^q))$ вычислить значения $P_j(s^i)$ для всех $j = \overline{1, l}$; $i = \overline{1, q}$. Вычисляемые алгоритмом A значения $P_j(s^i)$ обозначим через β_{ij}.

Пару $(I_0, I(\tilde{s}^q))$ назовем *данной начальной информацией*. Совокупность всех возможных $(I_0, (\tilde{s}^q))$ будем называть *классом начальных информаций* и обозначим через $\tilde{\mathscr{I}}_0$.

В [5] было показано, что любой алгоритм A, реализующий процесс распознавания можно представить в каноническом виде

$$A = R_A \cdot r_A$$

где

$$R_A\big(I_0, I(\tilde{s}^q)\big) = \{\Gamma_{ij}\}_{q\times l},$$
$$r_A\{\Gamma_{ij}\}_{q\times l} = \{\beta_{ij}\}_{q\times l}.$$

R_A называется *распознающим оператором*, $\{\Gamma_{ij}\}_{q\times l}$ — *матрицей оценок*, V_A — *решающим правилом*.

Каждая модель распознающих алгоритмов, определяемая набором параметров [2], [3], [4] порождает соответствующее множество распознающих операторов $\mathscr{R} = \{R_A\}$. Распознающий оператор R_A переводит начальную информацию $\big(I_0, I(\tilde{s}^q)\big)$ в числовую матрицу $\{\Gamma_{ij}\}_{q\times l}$. Поэтому для множества $\mathscr{R}$ можно ввести понятия *линейных замыканий* $L(\mathscr{R})$ и *алгебраических замыканий* $\mathfrak{A}^k(\mathscr{R})$ *степени* k.

Было установлено, что если множество операторов $\mathscr{R}$ полно на классе начальных информаций $\tilde{\mathscr{I}}_0$, решающее правило r корректно, то в модели $\{L(\mathscr{R})\cdot r\}$ существует корректный алгоритм, т.е. алгоритм, правильно решающий задачу на $\tilde{\mathscr{I}}_0$ [6]. Такие модели алгоритмов называются *полными*.

Вопрос полноты множества операторов является одним из центральных вопросов в алгебраической теории некорректных алгоритмов. Поэтому очень важно уметь установить полноту или неполноту того или другого множества операторов $\mathscr{R}$. Если полнота множества $\mathscr{R}$ установлена, то независимо от того, является ли модель эвристической или строго обоснованной, выбор корректного алгоритма представляет собой лишь техническую задачу.

В данной работе получено необходимое и достаточное условие полноты множества операторов. Доказана неполнота множества операторов нескольких моделей распознающих алгоритмов.

§ 2. Необходимое и достаточное условие полноты множества операторов

Определение 1. Множество операторов $\mathscr{R}$ называется *полным на данной информации* $\big(I_0, I(s^q)\big)$, если совокупность матриц оценок, порождаемых им содержит базис в пространстве числовых матриц размерности $(q\times l)$.

Если множество $\mathscr{R}$ полно на любой начальной информации $\big(I_0, I(\tilde{s}^q)\big) \in \tilde{\mathscr{I}}_0$, то $\mathscr{R}$ называется *полным множеством на классе начальных информаций* $\tilde{\mathscr{I}}_0$.

Пусть θ — мощность множества операторов $\mathscr{R}$, порождаемых моделью алгоритмов, определяемой набором параметров. Пусть каждый оператор $R_t \in \mathscr{R}$ порождает матрицу оценок $\Gamma(R_t) = \{\Gamma^t_{ij}\}_{q\times l}$; $t = \overline{1,\theta}$. Рассмотрим матрицу $G = \{g_{uv}\}$, образуемую совокупностью матриц $\Gamma(R_t)$ следующим образом. В матрице G строка с номером u получена путем последовательного выписывания всех строк матрицы оценок $\Gamma(R_u)$, т.е. $g_{uv} = \Gamma^u_{ij}$, $v = (i, j)$; $i = \overline{1, q}$; $j = \overline{1, l}$. Таким образом, каждый оператор $R \in \mathscr{R}$ порождает одну строку в матрице G. Размерность этой матрицы равна $\theta \times (q\cdot l)$.

Имеет место следующая теорема

Теорема 1. *Для того, чтобы множество операторов $\mathscr{R}$ было полно на классе начальных информаций $\tilde{\mathscr{I}}_0$ необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы G, порождаемой множеством $\mathscr{R}$ на любой $\big(I_0, I(\tilde{s}^q)\big) \in \tilde{\mathscr{I}}_0$ выл равен $q\times l$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть множество операторов $\mathscr{R}$ полно на $\mathscr{I}_0$. Тогда по опеределению на любой начальной информации $\big(I_0, I(\tilde{s}^q)\big) \in \in \mathscr{I}_0$ множество $\mathscr{R}$ порождает совокупность матриц, содержащую базис в пространстве числовых матриц размерности $q\times l$. Нетрудно видеть, что этот базис содержит равно $(q\cdot l)$ матриц. Эти матрицы в свою очередь образуют $(q\cdot l)$ линейно-независимых строк в матрице G. Таким образом матрица G имеет ранг равный $(q\cdot l)$.

Достаточность. Пусть матрица G, порождаемая множеством операторов $\mathscr{R}$ на любой начальной информации $\big(I_0, I(\tilde{s}^q)\big) \in \tilde{\mathscr{I}}_0$, имеет ранг равный $q\cdot l$. Тогда в G существует $q\cdot l$ линейно-независимых векторов-строк. Эти строки образуют базис в пространстве числовых матриц размерности $q\cdot l$. $\mathscr{R}$ таким образом является полным множеством на классе начальных информаций $\tilde{\mathscr{I}}_0$ по определению. Теорема доказана.

Теорема 1 служит критерием для определения полноты или неполноты того или другого множества операторов. Для этого, вообще говоря, необходимо вычислить ранг матрицы G, порождаемой этим множеством на классе начальных информаций. Во многих случаях исходя из природы класса решаемых задач (т.е. класса начальных информаций) и специфики моделей агоритмов, решающих задачи можно без вычислений указать на данном классе информаций какие семейства алгоритмов порождают полные, а какие — неполные множества операторов.

§ 3. Неполные множества распознающих операторов

3.1. Рассмотрим следующий класс алгоритмов из модели вычисления оценок [6]. Приводим только этапы задания алгоритмов, определяющие распознающие операторы в данном классе.

1. *Система опорных множеств.* В качестве системы опорных множеств возьмём всевозможные подмножества мощности k множества $\{1, 2, \ldots, n\}$; $1 \leqslant k \leqslant n$. Обозначим её через Ω_k.

2. *Оценка близости.* Пусть описаниям объектов $s_u \in M_0$ и $s^i \in \tilde{s}^q$ соответствуют наборы $s_u = (x_1\, x_2\, \ldots\, x_n)$; $s^i = (\tilde{x}_1\, \tilde{x}_2\, \ldots\, \tilde{x}_n)$. Рассмотрим $\tilde{w}$-части $\tilde{w}s_u$ и $\tilde{w}s^i$. Пусть $\tilde{w}s_u = (x_{i1}\, x_{i2}\, \ldots\, x_{ik})$; $\tilde{w}s^i = (\tilde{x}_{i1}\tilde{x}_{i2}\, \ldots\, \tilde{x}_{ik})$. Тогда оценку похожести соответствующих $\tilde{w}$-частей можно задавать следующим образом:

$$r(\tilde{w}s_u, \tilde{w}s^i) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \tilde{w}s_u = \tilde{w}s^i, \\ 0, & \text{если} \quad \tilde{w}s_u \neq \tilde{w}s^i. \end{cases}$$

3. *Способ вычисления оценок по фиксированному опорному множеству*:

(1) $$\tilde{w}\Gamma(s_u, s^i) = r(\tilde{w}s_u, \tilde{w}s^i).$$

4. *Вычисление оценки для класса по опорному множеству*:

(2) $$\Gamma_j(\tilde{w}) = \frac{1}{m_j - m_{j-1}} \sum_{u=m_{j-1}+1}^{m_j} \tilde{w}\Gamma(s_u, s^i).$$

5. *Оценка для класса по системе опорных множеств*

(3) $$\Gamma_{ij} = \frac{1}{m_j - m_{j-1}} \frac{1}{N_k} \sum_{\tilde{w} \in \Omega_k} \Gamma_j(\tilde{w}),$$

где N_k — нормирующий множитель.

Множество распознающих операторов описанного класса алгоритмов полностью определяется параметром k. Обозначим его через $\mathscr{R}(k)$.

Обозначим через $\varrho_{\min}(M_0, \tilde{S}^q)$ — минимальное расстояние между обучающим множеством M_0 и множеством элементов конечной выборки. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если класс начальной информации $\tilde{\mathscr{I}}_0$ содержит начальную информацию $(I_0, I(\tilde{S}^q))$, для которой $\varrho_{\min}(M_0, \tilde{S}^q) > n - q \cdot l$, то множество $\mathscr{R}(k)$ является неполным на $\tilde{\mathscr{I}}_0$.*

Доказательство. Теорема верна в случае $n < q \cdot l$, где n — число признаков, определяющих объекты. Действительно, по определению этого семейства алгоритмов, $k \leqslant n$; следовательно число операторов в $\mathscr{R}(k)$ в этом случае не может быть больше n. Поэтому $0 < q \cdot l$.

Рассмотрим случай, когда $n \geqslant q \cdot l$. Допустим $n = q \cdot l + b$; $b = 0, 1, 2, \ldots$ Пусть операторы $R_t \in \mathscr{R}(k)$ будут упорядочены по возрастанию мощности их опорных множеств, т.е. $R_1, \ldots, R_{q \cdot l}, \ldots, R_{q \cdot l+b}$. В этом семействе алгоритмов число голосов, поданных строкой s^i за класс K_j вычисляется по формуле [6]:

$$\Gamma_{ij}^t = \sum_{u=m_{j-1}+1}^{m_j} c^t_{\tilde{\varrho}(s^i, s_u)},$$

где $\tilde{\varrho}(s^i, s_u) = n - \varrho(s^i, s_u)$; $\varrho(s^i, s_u)$ — расстояние между объектами s^i и s_u; t — мощность опорных множеств.

Рассмотрим строку номера t матрицы G

$$g_{tv} = \sum_{u=m_{j-1}+1}^{m_j} c^t_{\tilde{\varrho}(s^i, s_u)}; \quad i = \overline{1, q};\ j = \overline{1, l}.$$

Для того, чтобы в этой строке хотя бы один элемент был отличен от нуля необходимо выполнение неравенства $t \leqslant n - \varrho(s^i, s_u)$ по крайней мере для одного элемента $s^i \in \tilde{S}^q$ и одного элемента $s_u \in M_0$. Это означает, что в выборке $\tilde{S}^q$ существует хотя бы один объект, который совпадал с одним эталоном в M_0 по крайней мере в t разрядах.

По условию теоремы в классе начальных информаций $\tilde{\mathscr{I}}_0$ существует начальная информация $(I_0, I(\tilde{S}^q))$, для которой $\varrho_{\min}(M_0, \tilde{S}^q) > n - q \cdot l$. Поэтому, начиная со значения $t \geqslant q \cdot l$, в этой начальной информации неравенство $n - \varrho(s^i, s_u) \geqslant t$ не выполняется для всех $s^i \in \tilde{S}^q$ и $s_u \in M_0$, так как для них $n - \varrho(s^i, s_u) < q \cdot l$. Это значит, что все строки матрицы G, начиная с номера $t = q \cdot l$, тождественно равны нулю. Следовательно, ранг матрицы G меньше $(q \cdot l)$. Из теоремы 1 следует, что $\mathscr{R}(k)$ есть неполное множество.

Если на третьем этапе задания алгоритмов в модели вычислений оценок введем параметры, определяющие меру представительности эталона $\tilde{\gamma} = (\gamma(s_1)\gamma(s_2) \ldots \gamma(s_m))$; $\gamma(s_u) \geqslant 0$; $s_u \in M_0$, то (1) имеет вид

$$\tilde{w}\Gamma(s_u, s^i) = \gamma(s_u) r(\tilde{w}s_u, \tilde{w}s^i).$$

На четвертом этапе введем параметры, характеризующие представительность класса $\tilde{\beta} = (\beta(K_1)\beta(K_2) \ldots \beta(K_l))$, то (2) имеет вид

$$\Gamma_j(\tilde{w}) = \frac{1}{m_j - m_{j-1}} \beta(K_j) \sum_{u=m_{j-1}+1}^{m_j} \gamma(s_u) r(\tilde{w}s_u, \tilde{w}s^i).$$

Множество распознающих операторов этого семейства алгоритмов определяется $(m+l+1)$ параметрами. Его обозначим через $\mathscr{R}(k, \tilde{\gamma}, \tilde{\beta})$.

Определение 2. Операторы $R_1, R_2, \ldots, R_n$ называются *линейно-зависимыми*, если существуют такие числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не все равны нулю, что

$$a_1\Gamma(R_1) + a_2\Gamma(R_2) + \ldots + a_n\Gamma(R_n) = 0.$$

В противном случае эти операторы называются *линейно-независимыми*.

Линейно-зависимые операторы порождают линейно-зависимые строки в матрице G. Линейно-независимые операторы порождают линейно-независимые строки в G. Докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Если два вектора параметров $\tilde{\gamma}_\nu = (\gamma_\nu(s_1)\ \gamma_\nu(s_2) \ldots \gamma_\nu(s_m))$ и $\tilde{\gamma}_\delta = (\gamma_\delta(s_1)\ \gamma_\delta(s_2) \ldots \gamma_\delta(s_m))$; $\nu \neq \delta$, линейно-зависимы, то операторы $R(\bar{k}, \tilde{\gamma}_\nu)$ и $R(\bar{k}, \tilde{\gamma}_\delta)$, где $\bar{k}$ фиксированное значение k, являются линейно-зависимыми.*

Доказательство. Матрица оценок, порождаемая оператором $R \in \mathscr{R}(k, \tilde{\gamma}, \tilde{\beta})$, вычисляется по формуле [6]:

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{m_j - m_{j-1}} \sum_{u=m_{j-1}+1}^{m_j} \gamma(s_u)\, c^k_{\tilde{\varrho}(s_u, s^i)}.$$

Для фиксированного значения $k = \bar{k}$ мы имеем

(4) $$\Gamma_{ij}^\nu = \frac{1}{m_j - m_{j-1}} \sum_{u=m_{j-1}+1}^{m_j} \gamma_\nu(s_u)\, c^{\bar{k}}_{\tilde{\varrho}(s_u, s^i)},$$
$$\Gamma_{ij}^\delta = \frac{1}{m_j - m_{j-1}} \sum_{u=m_{j-1}+1}^{m_j} \gamma_\delta(s_u)\, c^{\bar{k}}_{\tilde{\varrho}(s_u, s^i)}.$$

По условию леммы, $\tilde{\gamma}_\nu$ и $\tilde{\gamma}_\delta$ являются линейно-зависимыми векторами, поэтому для $\gamma_\nu(s_u)$ и $\gamma_\delta(s_u)$; $u = \overline{1, m}$, существует отличное от нуля число λ такое, что $\gamma_\delta(s_u) = \lambda\gamma_\nu(s_u)$; $u = \overline{1, m}$. Подставляя эти значения в (4) мы имеем

$$\Gamma^{\delta}_{ij} = \frac{1}{m_j - m_{j-1}} \lambda \sum_{u=m_{j-1}+1}^{m_j} \gamma_\nu(s_u)\, c^{\bar{k}}_{\tilde{\gamma}(s_u, s^l)} = \lambda \Gamma^{\nu}_{ij}. \tag{5}$$

Из (5) следует, что $\Gamma(R(\bar{k}, \tilde{\gamma}_\nu)) = \lambda\Gamma(R(\bar{k}, \tilde{\gamma}_\delta))$. По определению $R(\bar{k}, \tilde{\gamma}_\nu)$ и $R(\bar{k}, \tilde{\gamma}_\delta)$ линейно-зависимы. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если векторы параметров $\tilde{\gamma}_\nu$ и $\tilde{\gamma}_\delta$, $\tilde{\beta}_\nu$ и $\tilde{\beta}_\delta$ соответственно линейно-зависимы, то операторы $R(\bar{k}, \tilde{\gamma}_\nu, \tilde{\beta}_\nu)$ и $R(\bar{k}, \tilde{\gamma}_\delta, \tilde{\beta}_\delta)$ линейно-зависимы.*

Доказательство. Элементы матрицы оценок, порождаемой оператором $R \in \mathcal{R}(k, \tilde{\gamma}, \tilde{\beta})$ вычисляются по формуле

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{m_j - m_{j-1}} \beta(K_j) \sum_{u=m_{j-1}+1}^{m_j} \gamma(s_u)\, c^{k}_{\varrho(s_u, s^l)}.$$

Дальнейшее рассуждение аналогично доказательству леммы 1.

Теорема 3. *Если*

(1) *Класс начальных информаций $\tilde{\mathcal{I}}_0$ содержит $(I_0, I(\tilde{s}^q))$ такую, что $\varrho_{\min}(M_0, \tilde{s}^q) > n - q \cdot l$;*

(2) *Векторы параметров $\tilde{\gamma}$ линейно-зависимы;*

(3) *Векторы параметров $\tilde{\beta}$ линейно-зависимы,*

то множество $\mathcal{R}(k, \tilde{\gamma}, \tilde{\beta})$ является неполным.

Доказательство. Пусть $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \ldots, \tilde{\gamma}_\pi$; $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \ldots, \tilde{\beta}_\sigma$. Зафиксируем значения параметров $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\beta}$. Допустим $\tilde{\gamma}_1$ и $\tilde{\beta}_1$. Аналогичным рассуждением, как в доказательстве теоремы 2, варируя параметры k мы имеем только $\theta < q \cdot l$ операторов $R(\bar{k}_1, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\beta}_1)$, $R(\bar{k}_2, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\beta}_1)$, ..., $R(\bar{k}_\theta, \tilde{\gamma}_1, \tilde{\beta}_1)$, порождающих θ отличных от нуля строк в матрице G.

Теперь для каждого $\bar{k}_i$, $i = \overline{1, \theta}$ варируем параметры $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\beta}$. На основании леммы 2 операторы $R(\bar{k}_i, \tilde{\gamma}_{t_1}, \tilde{\beta}_{t_2})$ $t_1 = \overline{1, \pi}$, $t_2 = \overline{1, \sigma}$ являются линейно-зависимыми. Таким образом, число линейно-независимых операторов в $R(k, \tilde{\gamma}, \tilde{\beta})$ не может быть больше θ. Следовательно, в матрице G, порождаемой множеством операторов $R(k, \tilde{\gamma}, \tilde{\beta})$, существует не больше чем θ линейно-независимых строк. Так как $\theta < q \times l$, то ранг матрицы G меньше $q \times l$. На основании теоремы 1 $R(k, \tilde{\gamma}, \tilde{\beta})$ является неполным множеством операторов. Теорема доказана.

На основании леммы 1 и теоремы 3 легко получить следующие утверждения.

Следствие 1. *Если*

(1) *Класс начальных информаций содержит $(I_0, I(\tilde{s}^q))$ такую, что $\varrho_{\min}(M_0, s^q) > n - q \cdot l$;*

(2) *Векторы параметров $\tilde{\gamma}$ линейно-зависимы,*

то множество $\mathcal{R}(k, \tilde{\gamma})$ является неполным.

Следствие 2. *Если*

(1) *Класс начальных информаций содержит $(I_0, I(\tilde{s}^q))$, такую, что $\varrho_{\min}(M_0, \tilde{s}^q) > n - q \cdot l$;*

(2) *Векторы параметров $\tilde{\beta}$ линейно-зависимы,*

то множество $\mathcal{R}(k, \tilde{\beta})$ является неполным.

Следствие 3. *Если*

(1) *Векторы $\tilde{\beta}$ (или $\tilde{\gamma}$) линейно-зависимы;*

(2) *Число линейно-независимых векторов $\tilde{\gamma}$ (или $\tilde{\beta}$) меньше $q \times l$,*

то множество $\mathcal{R}(\tilde{\gamma}\tilde{\beta})$ является неполным.

Следствие 4. *Если число линейно-независимых векторов $\tilde{\gamma}$ (или $\tilde{\beta}$) меньше $(q \cdot l)$, то множество $\mathcal{R}(\tilde{\gamma})$ (или $\mathcal{R}(\tilde{\beta})$) является неполным.*

В $\mathcal{R}(k, \tilde{\gamma}, \tilde{\beta})$ зафиксируем параметр k. Кроме того введем группу параметров $\tilde{P} = (P(1)\, P(2) \ldots P(n))$, определяющих меру важности признаков. Тогда мы имеем множество операторов $\mathcal{R}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, \tilde{P})$, определяемых параметрами $\tilde{\gamma} = (\gamma(s_1)\gamma(s_2) \ldots \gamma(s_m))$; $\tilde{\beta} = (\beta(K_1)\beta(K_2) \ldots \beta(K_l))$ и $\tilde{P} = (P(1)P(2) \ldots P(n))$. В этом случае (3) имеет вид [4]:

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{m_j - m_{j-1}} \beta(K_j) \sum_{u=m_{j-1}+1}^{m_j} \gamma(s_u) \sum_{t=1}^{n} P(t)\, V_t(s_u, s^l). \tag{6}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если в одной из групп параметров $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{P}$ число линейно-независимых векторов меньше $q \cdot l$, а в остальных все векторы параметров линейно-зависимы, то множество $\mathcal{R}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, \tilde{P})$ является неполным.*

Доказательство. Без ограничения общности допустим, что группа $\tilde{P} = \tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \ldots, \tilde{P}_\Sigma$ имеет θ линейно-независимых векторов. Пусть ими являются векторы $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \ldots, \tilde{P}_\theta$; $\theta \leqslant \Sigma$. По условиям теоремы число линейно-независимых векторов в группе $\tilde{P}$ меньше $q \cdot l$, т.е. $\theta < q \cdot l$. В (6) зафиксируем значения параметров $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\beta}$. Допустим $\tilde{\gamma}_1 = (\gamma_1(s_1)\gamma_1(s_2) \ldots \gamma_1(s_m))$ и $\tilde{\beta}_1 = (\beta_1(K_1)\beta_1(K_2) \ldots \beta_1(K_l))$. Из (6) видно, что в $\mathcal{R}(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{P})$ с фиксированными значениями $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\beta}_1$ число линейно-независимых операторов, полученных путем вариации параметров $\tilde{P}$ не может быть больше θ. Пусть этими линейно-независимыми операторами являются $R(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{P}_1)$, $R(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{P}_2)$, ..., $R(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\beta}_1, \tilde{P}_\theta)$; $\theta < q \cdot l$.

Теперь для каждого значения $\tilde{P}_i$, $i = \overline{1, \theta}$, варируем параметры $\tilde{\gamma}$ и $\tilde{\beta}$. По условию теоремы все векторы $\tilde{\gamma}_1, \tilde{\gamma}_2, \ldots \tilde{\gamma}_\pi$ и $\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2, \ldots, \tilde{\beta}_\sigma$ линейно-зависимы. Поэтому из леммы 2 следует, что все операторы $R(\tilde{\gamma}_{t_1}, \tilde{\beta}_{t_2}, \tilde{P}_i)$, $t_1 = \overline{1, \pi}$; $t_2 = \overline{1, \sigma}$, с фиксированным значением параметров $\tilde{P} = \tilde{P}_i$ являются линейно-зависимыми. Таким образом, число линейно-независимых операторов в множестве $\mathcal{R}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, \tilde{P})$ не может быть больше θ. Напомним, что каждый оператор в $\mathscr{R}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, \tilde{P})$ порождает одну строку в матрице G. Поэтому число линейно-независимых строк в матрице G, порождаемой множеством операторов $\mathscr{R}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, \tilde{P})$ не может быть больше θ. Ранг матрицы G меньше $q \cdot l$ ввиду $\theta < q \cdot l$. По условию теоремы 1 $\mathscr{R}(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}, \tilde{P})$ является неполным множеством на любой начальной информации. Теорема доказана.

На основании доказанной теоремы легко получить следующие утверждения.

Следствие 1. *Если число линейно-независимых векторов $\tilde{\gamma}$ (или $\tilde{P}$) меньше $(q \cdot l)$, а все векторы $\tilde{P}$ (или $\tilde{\gamma}$) линейно-зависимы, то множество $\mathscr{R}(\tilde{\gamma}, \tilde{P})$ является неполным множеством.*

Следствие 2. *Если число линейно-независимых векторов $\tilde{\beta}$ (или $\tilde{P}$) меньше $(q \cdot l)$, а все векторы $\tilde{P}$ (или $\tilde{\beta}$) линейно-зависимы, то множество $\mathscr{R}(\tilde{\beta}, \tilde{P})$ является неполным множеством.*

Следствие 3. *Если число линейно-независимых векторов $\tilde{P}$ меньше $(q \cdot l)$, то множество $\mathscr{R}(\tilde{P})$ является неполным множеством.*

3.2. Рассмотрим множество операторов в модели с разделяющими поверхностями. Каждый распознающий оператор этой модели опеределяется заданием набора разделяющих поверхностей $F = (F_1 F_2 \ldots F_l)$ и набора параметров $\tilde{\gamma} = (\gamma(s_1), \gamma(s_2) \ldots \gamma(s_m))$. Множество таких операторов обозначим через $\mathscr{R}(F, \tilde{\gamma})$.

Будем считать, что $F_j = F(x_1, \ldots, x_n)$ и F_j разделяет n-мерное числовое пространство на две непересекающиеся области, обозначаемые в дальнейшем через F_j^+ и F_j^-.

Множество операторов $\mathscr{R}(F, \tilde{\gamma})$ определяется следующим образом.

(1) Обучающая выборка $M_0 = (s_1 s_2 \ldots s_m)$ разделяется поверхностью F_j на четыре части по свойствам $s_u \in F_j^+$ и $s_u \in K_j$ следующим образом:

$$W_\alpha^j = \{s_u\}, \quad \text{где} \quad s_u \in K_j;\ s_u \in F_j^+,$$
$$W_\beta^j = \{s_u\}, \quad \text{где} \quad s_u \in K_j;\ s_u \in F_j^-,$$
$$W_\sigma^j = \{s_u\}, \quad \text{где} \quad s_u \notin K_j;\ s_u \in F_j^+,$$
$$W_\delta^j = \{s_u\}, \quad \text{где} \quad s_u \notin K_j;\ s_u \in F_j^-.$$

(2) Оценка близости по классу. Пусть каждому эталону $s_u \in M_0$ присвоен параметр $\gamma(s_u)$ — степень представительности эталона (вес эталона). Пусть необходимо провести классификацию вновь поступившего объекта $s^i \in \tilde{s}^q$. Тогда элементы матрицы оценок вычисляются следующим образом:

$$\Gamma_{ij} = \begin{cases} \dfrac{\sum\limits_{s_u \in W_\alpha^j} \gamma(s_u) + \sum\limits_{s_u \in W_\delta^j} \gamma(s_u)}{\sum\limits_{s_u \in W_\beta^j} \gamma(s_u) + \sum\limits_{s_u \in W_\sigma^j} \gamma(s_u) + 1} & \text{если} \quad s^i \in F_j^+, \\[4ex] \dfrac{\sum\limits_{s_u \in W_\beta^j} \gamma(s_u) + \sum\limits_{s_u \in W_\sigma^j} \gamma(s_u)}{\sum\limits_{s_u \in W_\alpha^j} \gamma(s_u) + \sum\limits_{s_u \in W_\delta^j} \gamma(s_u) + 1} & \text{если} \quad s^i \in F_j^-. \end{cases} \tag{7}$$

Замечание: если $W_i^j = \varnothing$, то $\sum\limits_{s \in W_i^j} \gamma(s) = 0$.

Обозначим через $N(l)$ число элементов Γ_{ij}, вычисляемых по (7) и таких, что если $s \neq i$, $r \neq j$, то $\Gamma_{sr} \neq \Gamma_{ij}$, $i, s = \overline{1, q}$; $j, r = \overline{1, l}$.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3. *Имеем*

$$N(l) \leqslant 2l,$$

где l — число разделяющих поверхностей в наборе $\bar{F}$.

Доказательство. Пусть элементы Γ_{ij} порождены оператором $R(\bar{F}, \bar{\gamma})$, где $\bar{F} = (\bar{F}_1 \bar{F}_2 \ldots \bar{F}_l)$; $\bar{\gamma} = (\bar{\gamma}(s_1) \bar{\gamma}(s_2) \ldots \bar{\gamma}(s_m))$. Поверхность $\bar{F}_j$ разделяет n-мерное числовое пространство на две непересекающиеся области, обозначаемые через $\bar{F}_j^+$ и $\bar{F}_j^-$. Из (7) следует заметить, что если $s^{i_1}, s^{i_2}, \ldots, s^{i_t} \in \tilde{s}^q$ поподают в одну и ту же область, например $\bar{F}^+$, то $\Gamma_{i_1 j} = \Gamma_{i_2 j} = \ldots = \Gamma_{i_t j}$. Отсюда следует $N(1) \leqslant 2$.

Теперь допустим, что лемма верна для $j = w$ и любого значения i, т.е. $N(w) \leqslant 2w$. Рассмотрим случай $j = w+1$. Возможен один из следующих случаев.

(1) Все объекты из конечной выборки $\tilde{s}^q$ находятся в одной области пространства, разделяемой поверхностью $\bar{F}_j = \bar{F}_{w+1}$. Из замечания следует $\Gamma_{1w+1} = \Gamma_{2w+1} = \ldots = \Gamma_{qw+1}$. В этом случае мы имеем $N(w+1) \leqslant 2w+1 < < 2j$.

(2) Объекты из $\tilde{s}^q$ находятся в обеих частях пространства. Тогда $N(w+1) \leqslant \leqslant 2w+2 = 2j$. Лемма доказана.

Обозначим через d число различных наборов разделяющих поверхностей $F = (F_1\ F_2 \ldots F_l)$. Справедлива следующая теорема:

Теорема 5. *Если $d <]q/2[$; $q \geqslant 3$ то $\mathscr{R}(F, \tilde{\gamma})$ является неполным множеством.*

Доказательство. Рассмотрим матрицу G, порождаемую множеством операторов $\mathscr{R}(F, \tilde{\gamma})$. Напомним, что каждая её строка порождается одним оператором $R(\bar{F}, \tilde{\gamma}) \in \mathscr{R}(F, \tilde{\gamma})$. На основании леммы 3, число различных элементов в каждой строке матрицы G не больше $2l$. Из (7) следует заметить, что для каждого набора $\bar{F} = (\bar{F}_1\ \bar{F}_2 \ldots \bar{F}_l)$, если $q_{t_1 v} = q_{t_1 s}$, то $q_{t_2 v} = q_{t_2 s}$; $s \neq v$, $\tilde{\gamma}_{t_1} \neq \tilde{\gamma}_{t_2}$. Отсюда следует, что для каждого набора F, число различных столбцов в этой части матрицы G не зависит от изменения вектора $\tilde{\gamma}$. Оно не больше $2l$. Таким образом число различных столбцов в матрице G не может быть больше $d \cdot 2l$.

В свою очередь $d \cdot 2l < q \cdot l$ по условию теоремы $d <]q/2[$, где $]q/2[$ есть наибольшее целое число, небольше $q/2$. Поэтому ранг матрицы G меньше $q \cdot l$ и $\mathscr{R}(F, \tilde{\gamma})$ является неполным множеством. Теорема доказана.

Литература

[1] Бак Хынг Кханг, *Достаточное условие полноты линейных замыканий алгоритмов распознавания*, Кибернетика. К. (сдана в печать).

[2] —, *О полноте статистических алгоритмов распознавания*, ЖВМ и МФ 18, 1 (1978).
[3] —, *О модели распознающих алгоритмов типа потенциальных функций*, ЖВМ и МФ 18, 2 (1978).
[4] Ю. И. Журавлев и др., *Алгоритмы вычисления оценок и их применение*, Фан, Ташкент 1974.
[5] —, *Экстремальные алгоритмы в математических моделях для задач распознавания и классификаций*, Доклады АН СССР 236, 3 (1976).
[6] —, *Корректные алгебры над множествами некорректных (эвристических) алгоритмов*, I, Кибернетика 4 (1977).

Presented to the Semester
Discrete Mathematics
(February 15–June 16, 1977)

DISCRETE MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 7
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

A FEW RESULTS ON THE COMPLEXITY OF CLASSES OF IDENTIFIABLE RECURSIVE FUNCTION SETS

REINHARD KLETTE

Department of Mathematics, Friedrich Schiller University, Jena, GDR

Recently there have been several studies of special classes of identifiable recursive function sets. The complexity of such classes is generally characterized in the literature in the theory of complexity classes of recursive functions. With respect to this question the present paper uses two additional view-points:

(A) The sorting of index sets of identifiable recursive function sets in the arithmetical hierarchy, and

(B) The sorting of the required functionals, to identify recursive function sets of a special type, in the arithmetical hierarchy of function sets.

In this way the paper contributes to the subject of the limiting decision procedures (cf. Gold [2], Barzdin' [1]).

1. Introduction

Let $\mathscr{R}$ be the class of all unary (total) recursive functions on the set N of all non-negative integers. $\mathscr{F}$ is the class of all unary total functions. Let $\{M_z\}_{z\in N}$ be a computable enumeration of Turing machines which defines a standard enumeration φ of all partial recursive functions of one variable. Let $\langle x_0, \ldots, x_t\rangle$, $t\in N$, be an effective enumeration of all finite tuples of non-negative integers.

Strategies (or *inductive inference machines*) are arbitrary recursive functions $F, G, \ldots$; if F is any strategy and if g is a total function,

$$F(g^t) =_{\mathrm{df}} F(\langle g(0), \ldots, g(t)\rangle), \quad t\in N,$$

is the *hypothesis* given by F about g under the assumption that there is considered g^t, where the fixed Gödel numbering φ, being a semantics, always underlies these hypotheses. A hypothesis $a = F(g^t)$ is "true" iff a is a Gödel number of g; therefore $g = \varphi_a$. Every strategy F generates a *limiting recursive functional* $\boldsymbol{F}$ in the following way:

$$\boldsymbol{F}(g) = a\in N \quad \text{iff} \quad \lim_{t\to\infty} F(g^t) = a;$$
$$\text{iff} \quad \exists t_0 \forall t[t\geqslant t_0 \to F(g^t) = a].$$