DISCRETE MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 7
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

ПРЕДЕЛЬНО ПОЛНАЯ СИСТЕМА ЛОКАЛЬНЫХ ПРАВИЛ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРОГРАММ

Ю. И. ЯНОВ

Институт прикладной математики АН СССР им. М. В. Келдыша, Москва, СССР

0. Хорошо известно, что отношение (функциональной) эквивалентности алгоритмов, в частности программ, не является рекурсивно перечислимым, и следовательно, проблема эквивалентных преобразований для них, даже в самой слабой постановке [1], имеет отрицательное решение. В настоящей работе для класса программ в некотором полном базисе построена система локальных правил преобразований, полная в некотором предельном смысле, а именно, с помощью правил этой системы можно любые эквивалентные программы (вычисляющие всюду определенные функции) для всякого натурального числа m преобразовать в такие (m-канонические) программы, у которых начальные подпрограммы длины m изоморфны. Для класса же программ без существенных циклов эта система является полной в обычном смысле, т.е. любые эквивалентные программы такого вида можно преобразовать друг в друга за конечное число шагов. В общем случае с помощью предельно полной системы правил можно преобразовывать эквивалентные программы друг в друга, лишь используя предельный переход. Для бесконечных древовидных разверток программ — так называемых вычислительных деревьев — определяется каноническая форма, единственная в своем классе эквивалентности. Поэтому проблема эквивалентности для вычислительных деревьев, а следовательно и для программ, сводится, благодаря наличию указанной системы правил, к предельному распознаванию изоморфизма вычислительных деревьев.

1. Программы и вычислительные деревья

Пусть $\bar{x} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ — множество аргументных или входных переменных, $\bar{y} = \{y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}\}$ — множество рабочих переменных; $\bar{z} = \bar{x} \cup \bar{y}$; $Б = \{f_1, \ldots, f_k; p_1, \ldots, p_l\}$ — базис, где $f_1, \ldots, f_k$ — рекурсивные функции, а $p_1, \ldots, p_l$ — рекурсивные предикаты произвольной арности. Множества $\bar{z}$, $\bar{x}$, $\bar{y}$ назовем, соответственно, *памятью*, *входной памятью* и *рабочей памятью*. *Состояниями памяти* $\bar{z}$, соответственно, $\bar{x}$, $\bar{y}$ являются элементы множеств $Z = N^{m+n}$, $X = N^m$, $Y = N^n$, где N — множество всех натуральных чисел.

Элементарным оператором в базисе $Б$ над памятью $\bar{y}$ называется выражение вида

$$(*) \qquad y_i \Leftarrow f_j(y_{i_1}, \ldots, y_{i_r}), \quad \text{где} \quad f_j \in Б, y_i, y_{i_1}, \ldots, y_{i_r} \in \bar{y}.$$

Переменная y_i называется *левой частью* элементарного оператора $(*)$. *Оператор* (в базисе $Б$ над памятью $\bar{y}$) это — конечная, в частности — пустая, последовательность элементарных операторов (в базисе $Б$ над памятью y) с попарно различными левыми частями.

Каждый элементарный оператор вида $(*)$ реализует функцию $\varphi\colon\ Y \mapsto Y$ на множестве состояний рабочей памяти, а именно, для произвольного набора $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ из Y $\varphi(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1})$ тогда и только тогда, когда для $t \neq i$ $(0 \leqslant t < n)$ $b_t = a_t$, а $b_i = f_j(a_{i_1}, \ldots, a_{i_r})$. Оператор реализует функцию, являющуюся композицией функций, реализуемых входящими в него элементарными операторами.

В дальнейшем операторы и реализуемые ими функции мы будем обозначать одними и теми же символами. Кроме того, мы будем писать в этих случаях функциональный символ справа от аргумента, так что, если оператор φ является последовательностью $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_q$ элементарных операторов, то он реализует композицию $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_q$.

Отметим, что в операторах встречаются только рабочие переменные $y_0, y_1, \ldots$, однако при надобности мы будем рассматривать функции, реализуемые операторами, как функции над состояниями всей памяти $\bar{z}$ (у которых переменные из $\bar{x}$ несущественны).

Программа в базисе $Б$ над памятью $\bar{z}$ состоит из связного конечного ориентированного графа, называемого *носителем программы*, и некоторого функционального соответствия, приписывающего вершинам графа предикаты, а дугам — операторы, причем граф и это соответствие должны удовлетворять следующим условиям:

1. Из каждой вершины выходит либо две дуги, одна из которых называется 0-*дугой*, а другая 1-*дугой* (в изображениях программ 1-дуга будет отмечаться знаком $+$), либо — ни одной, и тогда вершина называется *заключительной*.

2. Выделена одна вершина, называемая *начальной вершиной* или *корнем* (в изображениях программ эта вершина будет указываться стрелкой).

3. Каждой не заключительной вершине приписан предикат вида $p_i(z_1, \ldots, z_q)$, где $z_1, \ldots, z_q \in \bar{z}$.

4. Каждой дуге приписан оператор в базисе $Б$ над памятью $\bar{y}$.

Вершина v', в которую ведет a-дуга ($a \in \{0, 1\}$), выходящая из вершины v, называется *a-последователем* вершины v, а v называется *непосредственным предшественником* вершины v'.

Состояниями программы будем называть пары (ζ, v), где $\zeta \in z$ — состояние памяти $\bar{z}$, а v — вершина программы.

Если $\zeta = (\zeta^{(1)}, \ldots, \zeta^{(m+n)})$ — состояние памяти $\bar{z}$, то для простоты вместо $p_i(\zeta^{(l_1)}, \ldots, \zeta^{(l_q)})$ будем писать $p_i(\zeta)$.

Если задано некоторое состояние ζ_0 памяти $\bar{z}$, что каждая программа $\mathfrak{A}$ над памятью $\bar{z}$ однозначно определяет последовательность своих состояний (ζ_0, v_0), (ζ_1, v_1), $\ldots$, называемую *вычислением с начальным состоянием* ζ_0 и удовлетворяющую следующим условиям:

(1) Вершина v_0 — начальная.

(2) Для любого $i \geqslant 0$, если вершине v_i приписан предикат p_j и $p_j(\zeta_i) = a \in \{0, 1\}$, то v_{i+1} — это a-последователь вершины v_i, и $\zeta_{i+1} = \zeta_i \varphi$, где φ — оператор, приписанный a-дуге, выходящей из вершины v_i.

(3) Вычисление конечно и состояние (ζ_i, v_i) является последним тогда и только тогда, когда вершина v_i — заключительная.

Выделим переменную y_0 и назовем ее *результирующей*.

Программа $\mathfrak{A}$ над памятью $\bar{z}$ (с результирующей переменной y_0) *вычисляет* или *реализует* (частичную) *функцию* $f_{\mathfrak{A}}$, если для любых натуральных чисел $a_1, \ldots, a_m$, b $f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m) = b$ тогда и только тогда, когда вычисление с начальным состоянием $(a_1, \ldots, a_m, 0, 0, \ldots, 0)$ заканчивается таким состоянием программы $((a_1, \ldots, a_m, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}), v_\varrho)$, в котором $b_0 = b$.

Из этого определения следует, что значение $f_{\mathfrak{A}}(a_1, \ldots, a_m)$ не определено тогда и только тогда, когда соответствующее вычисление бесконечно.

Две программы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ *эквивалентны*, $(\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B})$, если они вычисляют одну и ту же функцию, т.е. $f_{\mathfrak{A}} = f_{\mathfrak{B}}$.

Если в определении программы предположить, что носителем является, быть может бесконечное, дерево с корнем, причем начальной вершиной является корень, а всякая концевая вершина является заключительной, то мы получим определение вычислительного дерева (ВД).

ВД не является программой только в том случае, когда оно бесконечно. Чтобы охватить оба понятия, будем называть *вычислительными комплексами* (ВК) программы как с конечными, так и с бесконечными носителями. Понятия вычисления и функции, вычислимой ВК, определяются в точности так же, как и для программ. Таким образом, и отношение эквивалентности распространяется на все множество ВК.

Для любого ВК $\mathfrak{A}$ мы определим эквивалентное ему ВД, называемое разверткой ВК $\mathfrak{A}$. А именно, *разверткой* ВК $\mathfrak{A}$ мы назовем такое ВД $\mathfrak{A}'$, для которого существует функция ϱ, отображающая множества его вершин и дуг на множества вершин и дуг ВК $\mathfrak{A}$ так, что выполняются следующие условия:

(1) Вершина v развертки $\mathfrak{A}'$ — начальная (заключительная) тогда и только тогда, когда вершина ϱv — начальная (заключительная).

(2) Если вершина v развертки $\mathfrak{A}'$ не заключительная и $v' = \varrho v$, то $v'_a = \varrho v_a$ и $d'_a = \varrho d_a$, где v_a (v'_a) — a-последователь вершины v (v') и d_a (d'_a) — a-дуга, выходящая из вершины v (v'), $a = 0,1$.

(3) Для любой вершины v и для любой дуги d развертки $\mathfrak{A}'$ $p_v = p_{\varrho v}$ и $\varphi_d = \varphi_{\varrho d}$, где $p_v(p_{\varrho v})$ — предикат, приписанный вершине $v(\varrho v)$, а $\varphi_d(\varphi_{\varrho d})$ — оператор, приписанный дуге $d(\varrho d)$.

Алгоритм построения развертки по произвольному ВК очевиден: начиная с корня и далее поярусно строятся вершины и дуги дерева с соблюдением условий (1)–(3).

Отображение ϱ, удовлетворяющее условиям (1)–(3), называется *гомоморфизмом*. Нетрудно убедиться, что гомоморфные ВК эквивалентны, поэтому развертка $\mathfrak{A}'$ ВК $\mathfrak{A}$ эквивалентна $\mathfrak{A}$.

2. Фрагменты ВК и правила преобразований

Фрагментом ВК будем называть такую его часть (подграф), которая наряду с каждой своей вершиной содержит либо обе дуги, выходящие из нее (и следовательно — оба её непосредственных последователя), либо — ни одной.

Фрагмент будем называть *начальным*, если он содержит начальную вершину ВК. Вершины, в которые ведут дуги ВК, не входящие в данный фрагмент, будем называть *входными вершинами* или *входами* этого фрагмента, остальные вершины будем называть *внутренними вершинами* фрагмента. Не заключительные концевые вершины фрагмента (т.е. вершины, не имеющие последователей) будем называть *выходными вершинами* или *выходами* фрагмента.

Как обычно, правилами преобразований ВК будут служить пары фрагментов, между подмножествами вершин которых установлено некоторое 1-1-соответствие. Это соответствие мы будем задавать с помощью однозначных нумераций вершин так, что соответствующие вершины и только они будут иметь одинаковые номера. При этом начальные вершины всегда будут считаться соответствующими, и поэтому их номера иногда будут опускаться. Номера заключительных вершин, как правило, тоже будут опускаться, если соответствие между ними несущественно.

Соответствие между вершинами естественно порождает соответствие и между дугами, а именно, будем считать соответственными a-дуги, выходящие из соответственных вершин, $a = 0,1$.

Фрагменты (в частности, ВК) $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются *изоморфными*, если между множествами всех их вершин (и дуг) существует такое 1-1-соответствие, что выполняются следующие условия:

(1) Начальные вершины (если они имеются) являются соответствующими.

(2) Положительные (отрицательные) степени соответствующих вершин одинаковы.

(3) Для любого $a \in \{0, 1\}$ a-последователи соответствующих вершин являются соответствующими вершинами.

(4) Соответствующим вершинам (дугам) приписаны эквивалентные предикаты (операторы).

Если речь идет о фрагментах с занумерованными вершинами, то условиям (1)—(4) должно удовлетворять соответствие, определяемое нумерацией, т.е. соответствующими считаются вершины с одинаковыми номерами.

Поскольку в функциональном отношении изоморфные фрагменты неотличимы, то мы будем рассматривать фрагменты и ВК с точностью до изоморфизма.

Правила преобразований мы будем записывать в виде $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ (такая запись оправдывается тем, что если распространить отношение эквивалентности на фрагменты, то все рассматриваемые нами правила будут парами эквивалентных фрагментов).

Применение правила $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ (*слева направо*) к ВК $\mathfrak{C}$ состоит в том, что некоторое вхождение фрагмента $\mathfrak{A}$(1) в ВК $\mathfrak{C}$ удаляется из $\mathfrak{C}$ и на его место ,,вставляется'' фрагмент $\mathfrak{B}$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

(1) Соответствующие входные вершины фрагментов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ должны быть a-последователями одних и тех же вершин $\mathfrak{C}$.

(2) Соответствующие выходные вершины фрагментов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ должны иметь в $\mathfrak{C}$ одинаковых a-последователей.

Отметим, что если для некоторой выходной вершины фрагмента $\mathfrak{A}$ нет соответствующей выходной вершины во фрагменте $\mathfrak{B}$, то после замены $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ могут получиться несколько связных компонент. В этом случае результатом применения правила $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ к $\mathfrak{C}$ будем считать ту компоненту, которая содержит начальную вершину. Если же в $\mathfrak{B}$ имеется выходная вершина, для которой нет соответствующей в $\mathfrak{A}$, то при применении правила $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ к такой вершине может быть присоединен произвольный ВК. Применением правила $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ мы будем называть также и применение (слева направо) правила $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{A}$. В случае, когда $\mathfrak{B}$ не содержит фрагментов, изоморфных $\mathfrak{A}$ или $\mathfrak{B}$, результатом применения правила $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ к $\mathfrak{C}$ будем считать само $\mathfrak{C}$. Очевидно, что в качестве $\mathfrak{C}$ мы можем брать не только ВК, но и фрагменты, так что мы можем говорить о преобразованиях фрагментов. Как обычно, правило $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ называется *выводимым* из некоторого множества правил, если с помощью правил из этого множества фрагмент $\mathfrak{A}$ можно преобразовать во фрагмент $\mathfrak{B}$.

Мы будем использовать правила, на применение которых могут быть наложены некоторые условия, разрешимые с помощью ограниченных окрестностей заменяемых фрагментов. Например, может требоваться, чтобы определенные вершины фрагментов были внутренними. Такое правило называется *локальным*, если результат его применения к любому ВК $\mathfrak{B}$, для которого указанное условие выполняется, эквивалентен $\mathfrak{B}$.

(1) Здесь и в некоторых других местах следовало бы говорить о фрагменте, изоморфном $\mathfrak{A}$, но в силу сказанного выше, мы не различаем изоморфные фрагменты.

3. Некоторые свойства ВК в базисе $Б_0$

Мы будем рассматривать ВК в базисе $Б_0 = \{0, s; =\}$, где $0x = 0$, $sx = x+1$. Этот базис является полным в том смысле, что программами в нем вычислимы все частичнорекурсивные функции. При этом полнота базиса $Б_0$ не нарушается, если на программы наложить следующие ограничения:

(1) Элементарные операторы имеют вид $y_i \Leftarrow fy_i$, где $f \in \{0, s\}$.

(2) Результирующая переменная y_0 не входит в предикаты, приписанные вершинам программ.

Класс программ (ВК) в базисе $Б_0$, удовлетворяющих этим двум требованиям, обозначим $\Pi_0(\text{ВК}_0)$. В дальнейшем мы для простоты ограничимся рассмотрением программ, и вообще ВК, вычисляющих функции от одного аргумента. Подкласс таких программ (ВК) из класса $\Pi_0(\text{ВК}_0)$ обозначим $\Pi_0^1(\text{ВК}_0^1)$.

Вместо $y_i \Leftarrow fy_i$ будем писать f^i. Очевидно, что в ВК из ВК_0 элементарные операторы (с различными левыми частями) перестановочны, и поэтому любой непустой оператор можно задать в виде набора $f_0^{i_0} f_1^{i_1} \ldots f_k^{i_k}$, где $i_0 < i_1 < \ldots < i_k$, $f_j \in \{0, s\}$, $j = 0, 1, \ldots, k$; $0 \leqslant k < n$ (n — число рабочих переменных). Например, $s^0 0^3 s^5$ обозначает оператор ($y_0 \Leftarrow sy_0$, $y_3 \Leftarrow 0y_3$, $y_5 \Leftarrow sy_5$). Запись $\varphi(f^i)$ обозначает, что i-ая компонента φ^i оператора φ есть f, где $f \in \{0, s, e\}$, т.е. в этом случае мы рассматриваем оператор φ как n-мерный вектор, некоторые компоненты которого могут быть пустыми (e).

Если ζ — состояние памяти $\bar{z}$, то обозначим через $\zeta_{\bar{x}}$ ($\zeta_{\bar{y}}$) соответствующее состояние памяти x ($\bar{y}$), т.е. первые m (последние n) компонент вектора ζ.

Вычисление с начальным состоянием ζ таким, что $\zeta_{\bar{y}} = \bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ будем называть *нормальным*.

Для произвольной вершины v ВК $\mathfrak{A}$ обозначим через Z_v множество всех состояний памяти $\bar{z}$, которые встречаются в нормальных вычислениях в паре с вершиной v, т.е. $Z_v = \{\zeta \in Z\colon (\zeta, v)$ содержится в некотором нормальном вычислении$\}$. Обозначим также: $X_v = \{\zeta_{\bar{x}}\colon \zeta \in Z_v\}$, $Y_v = \{\zeta_{\bar{y}}\colon \zeta \in Z_v\}$.

Если $(\zeta, v_0), (\zeta_1, v_1), \ldots, (\zeta_l, v_l), \ldots$ — нормальное вычисление для ВК $\mathfrak{A}$, то путь $v_0 d_1 v_1 \ldots d_l v_l \ldots$, где d_i — дуга, ведущая из вершины v_{i-1} в вершину v_i, $i = 1, 2, \ldots$, обозначим через $\mathfrak{A}(\zeta_{\bar{x}})$ и назовем *путем, реализуемым аргументом* $\zeta_{\bar{x}}$. При этом будем говорить, что аргумент $\zeta_{\bar{x}}$ *реализует путь* $\mathfrak{A}(\zeta_{\bar{x}})$. Путь в ВК называется *реализуемым*, если он реализуем каким-либо аргументом, либо является отрезком такого пути. Поскольку во всех состояниях одного вычисления состояние памяти $\bar{x}$ остается неизменным, то $X_v = \{\dot{x} \in X\colon$ путь $\mathfrak{A}(\dot{x})$ проходит через вершину $v\}$. Если $X_v \neq \varnothing$, то вершину v назовем *существенной*, в противном случае — *несущественной*. Вершину v в ВК назовем *древесной*, если существует не более одного реализуемого пути из начальной вершины в вершину v. (Таким образом, начальная вершина v_0 является древесной, если не существует реализуемого цикла, содержащего v_0). Очевидно, что для существенной древесной вершины v множество Y_v состоит ровно из одного элемента $\bar{0}\varphi_1\varphi_2 \ldots, \varphi_l$, где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_l$ — операторы, приписанные дугам реализуемого пути из начальной вершины в вершину v. Таким образом, если отождествить одноэлементное множество Y_v со своим элементом, то мы получим

Предложение 1. *Для любого ВК и для всякого нормального вычисления* $(\zeta_0, v_0), (\zeta_1, v_1), \ldots, (\zeta, v), \ldots$, *если вершина v древесная, то* $Y_v = \zeta_{\bar{y}}$.

Для произвольного ВК обозначим через p_v предикат, приписанный вершине v. Предикат p_v в данном ВК назовем *константным*, если $Z_v = \varnothing$, либо $\forall \zeta, \zeta' \in Z_v$ $(p_v(\zeta) = p_v(\zeta'))$.

Если для произвольного ζ из Z_v $p_v(\zeta) = a$, $a \in \{0, 1\}$, то будем говорить, что константный предикат p_v *имеет значение* a.

Ниже предполагается, что все рассматриваемые нами ВК принадлежат классу ВК_0^1. Вместо x_1 будем писать x, так что $\bar{x} = \{x\}$. Очевидно, что такие ВК могут содержать предикаты только следующих трех видов: (1) $x = x$, (2) $y_i = y_j$, и (3) $x = y_i$ (поскольку нас интересуют предикаты с точностью до эквивалентности, то мы отождествляем предикаты $x = y_i$ и $y_i = x$). Предикаты первого вида тождественно истинны и потому константны. В силу предложения 1 для древесных вершин предикаты второго вида также являются констаитными. Поэтому получаем

Предложение 2. *Во всяком ВК для любой древесной вершины v предикат p_v либо константен, либо имеет вид* $x = y_i$.

Путь из начальной вершины будем называть *начальным путем*. *Ветвью* ВК назовем начальный путь, либо заканчивающийся в заключительной вершине, либо бесконечный. Ветвь древовидного фрагмента начинается в корне и может заканчиваться в любой концевой вершине.

Дугу d, выходящую из вершины v, назовем *главной*, если выполняется одно из следующих условий:

(1) Предикат p_v константный со значением $a \in \{0, 1\}$ и дуга d является a-дугой.

(2) Предикат p_v — не константный, имеет вид $x = y_i$ и d является 0-дугой.

(3) Предикат p_v — не константный, имеет вид $y_i = y_j$ и d — любая из дуг, выходящих из v.

Путь в ВД назовем *главным*, если он содержит только главные дуги, либо состоит из одного корня.

В силу предложения 2 из каждой древесной вершины выходит ровно одна главная дуга. Поэтому во всяком ВД из любой вершины выходит не более одного главного пути данной длины, в частности, во всяком ВД существует ровно одна главная ветвь.

Путь $v_0 d_0 v_1 d_1 \ldots$ в произвольном ВК $\mathfrak{A}$ назовем *главным*, если он является гомоморфным образом главного пути $v_0' d_0' v_1' d_1' \ldots$ в развертке $\mathfrak{A}'$, т.е.

$v_i = \varrho v_i'$ и $d_i = \varrho d_i'$, $i = 0, 1, \ldots$ (см. определение развертки). Таким образом, во всяком ВК также существует ровно одна главная ветвь.

Вершину ВК назовем *главной*, если в нее ведет главный начальный путь (в частности, начальная вершина — главная).

Предложение 3. *Во всяком* ВК *для любой не главной древесной вершины* v *множество* X_v *(а потому и* Z_v*) состоит не более, чем из одного элемента, и следовательно, предикат* p_v *— константный.*

Доказательство. Если вершина v — несущественная, то $X_v = \varnothing$, и утверждение выполнено. Предположим, что вершина v — существенная. Поскольку она древесная, то существует только один реализуемый начальный путь w в вершину v: $v_0 d_0 v_1 d_1 \ldots v_l d_l \ldots v$. Так как этот путь не главный, то в нем найдется не главная дуга d_l, выходящая из некоторой главной вершины v_l с предикатом p_{v_l}. Если предикат p_{v_l} константный и имеет значение a, то не главная дуга d_l является $\bar{a}$-дугой, где $\bar{a} = 1-a$, и тогда путь w не может быть реализуемым. Следовательно, предикат p_{v_l} — не константный. Поскольку обе дуги, выходящие из вершины с неконстантным предикатом вида $y_j = y_k$, главные, то предикат p_{v_l} имеет вид $x = y_j$, причем дуга d_l является 1-дугой. Рассматриваемому вхождению вершины v_l в путь w соответствует некоторое (единственное) состояние $\zeta_{\bar{y}}$ рабочей памяти $\bar{y}$. Пусть путь w реализуется некоторым аргументом $\dot{x}$. Так как d_l — это 1-дуга, то $p_{v_l}(\dot{x}, \zeta_{\bar{y}}) = 1$, т.е. $\dot{x} = \zeta_{\bar{y}}^j$. Но поскольку $\zeta_{\bar{y}}^j$ — фиксированное для пути w число, то это означает, что $\dot{x}$-единственный аргумент, реализующий путь w, т.е. $X_v = \{\dot{x}\}$.

Следствие. *Во всяком* ВК $\mathfrak{A}$ *для любой главной вершины* v *множество* X_v *— кофинитно, и следовательно, любая главная вершина — существенная.*

Доказательство. Если $\mathfrak{A}$ — ВД, то это утверждение непосредственно следует из предложения 3. Пусть $\mathfrak{A}$ — ВК и $\mathfrak{A}'$ — его развертка. Очевидно, что если v — главная вершина ВК $\mathfrak{A}$, то в развертке $\mathfrak{A}'$ в множестве $\varrho^{-1}v$ имеется по крайней мере одна главная вершина v'. При этом $X_{v'} \subseteq X_v$. А так как множество $X_{v'}$ — кофинитно, то и множество X_v — кофинитно. ■

4. Понятие предельной полноты системы правил преобразований

Назовем *длиной пути* число дуг в этом пути. *Длиной вершины* v назовем длину lv кратчайшего реализуемого пути из начальной вершины в вершину v. *Длиной* ВК будем называть длину его главной ветви.

(Начальным) поддеревом ВК будем называть (начальный) фрагмент, являющийся деревом и такой, что все его вершины, кроме корня, внутренние, причем, если корень — начальная вершина, то он не является входной вершиной.

Для краткости (ВД и начальные) поддеревья ВК будем называть *(начальными) деревьями.*

m-начальным поддеревом произвольного ВК назовем начальное поддерево длины m, любая не главная ветвь которого оканчивается либо заключительной, либо несущественной вершиной.

Систему Σ правил эквивалентных преобразований мы назовем *предельно полной* (для рассматриваемого класса ВК), если для всякой пары $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ эквивалентных ВК и для любого натурального числа m ВК $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ можно преобразовать с помощью правил из Σ в такие ВК $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, у которых m-начальные поддеревья существуют и изоморфны.

Это означает, что за бесконечное число шагов (т.е. в пределе при $m \to \infty$) любые эквивалентные ВК можно преобразовать в изоморфные ВД. В том случае, когда $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — эквивалентные программы, не содержащие реализуемых циклов, одну из них с помощью правил из Σ можно преобразовать в другую за конечное число шагов, т.е. для класса таких программ предельно полная система является полной в обычном смысле. Предельную полноту можно рассматривать как полноту относительно некоторой стратегии предельного перехода, поскольку с помощью такой стратегии возможен переход от одного ВК к другому, если для некоторого достаточно большого m их m-начальные поддеревья изоморфны.

5. Система Σ_0 локальных правил преобразований

Сначала сделаем некоторые пояснения. Условимся при изображении фрагментов и ВК пользоваться следующей символикой. Вершины будут изображаться кружками, внутри которых (иногда) вписаны предикаты или их обозначения в некотором метаязыке: $p, 1, \ldots,$ причем 1 обозначает тождественно истинный предикат $x = x$. Всякий заштрихованный кружок является заключительной вершиной. Если в некоторую вершину фрагмента ведет стрелка, не выходящая из какой-либо вершины, то такая вершина является начальной вершиной ВК. Вершина без стрелки также может быть начальной вершиной ВК, если она не является внутренней вершиной фрагмента. Буквами φ, ψ, ω (с индексами или без них) обозначаются операторы. Если в одном правиле встречаются выражения φ и $\varphi(f^i)$, то это означает, что в первом случае i-ая компонента оператора φ произвольна, а второй оператор получается из φ заменой его i-ой компоненты на f. С целью экономии мы иногда опускаем несущественные для данного правила элементы — предикаты, операторы, знаки + и др. При этом, если в правиле не указаны предикаты (операторы), приписанные каким-либо вершинам (дугам), то подразумевается, что соответствующим вершинам (дугам) приписаны произвольные, но одинаковые предикаты (операторы). Если для какой-либо вершины одного фрагмента правила, предикат которой опущен, нет соответствующей вершины в другом фрагменте, то такой вершине может быть приписан произвольный предикат. Аналогично — и для других элементов правил. В частности, отсутствие знака + означает, что расположение 0-

и 1-дуг может быть любым. В применении к системе Σ'_0 подобные сокращения означают, что некоторые её правила на самом деле являются схемами правил, из которых конкретные правила получаются путем восполнения недостающих элементов и замены метасимволов их конкретными значениями.

ВК будем называть *размеченным*, если некоторым его вершинам приписаны множества Z_v. Через ζ^i обозначается i-ая компонента вектора ζ. Вектор $\bar{0} = 0 \ldots 0$ в зависимости от контекста, может обозначать как состояние памяти, так и оператор с нулевыми компонентами. Выражение $M\varphi$, где φ —

01. Если вершина 0 внутренняя, то

~ Λ , где Λ – пустой фрагмент.

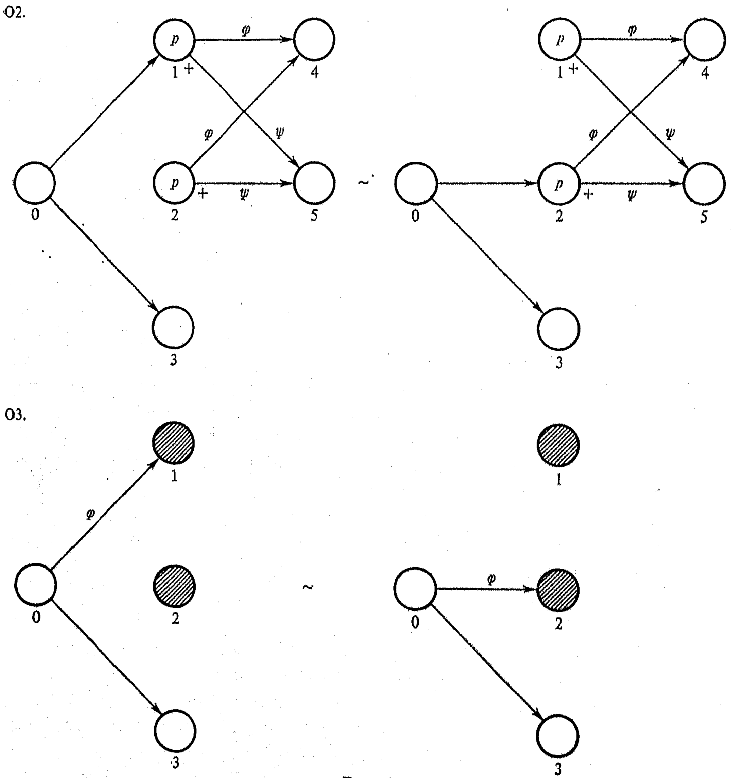


Рис. 1

функция, а M — некоторое множество значений аргумента, обозначает, как обычно, множество $\{c\varphi\colon\ c \in M\}$. Предполагается также, что в правилах любая выходная вершина может быть заключительной.

Система Σ_0 состоит из шести групп правил 0, А–Д.

Первая группа 0 (рис. 1) состоит из трех правил 01–03. При этом, в соответствии с описанными выше соглашениями, вершина 0 в правиле 01 может быть заключительной, все вершины 0–5 правила 02 и вершины 0–3 правила 03 могут быть входными и любая из них может быть начальной (за исключением вершины 0 в правиле 01). Остальные группы правил изображены на рисунках 2–6.

А. Если вершины 1 и 2 внутренние, то

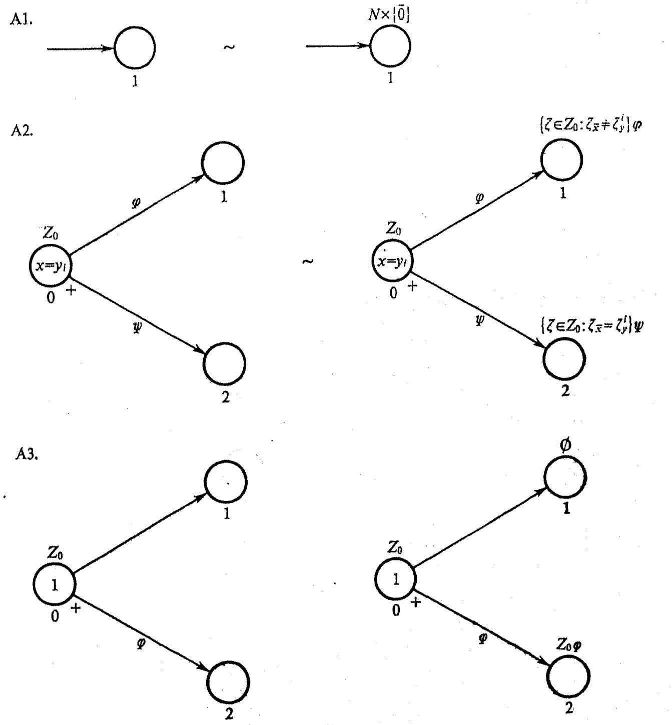
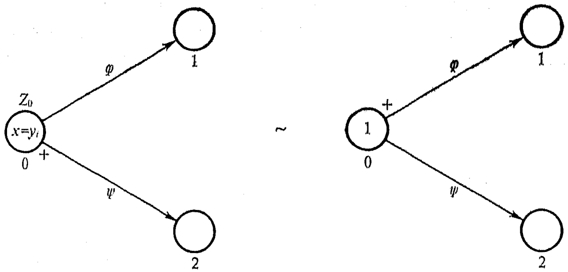


Рис. 2

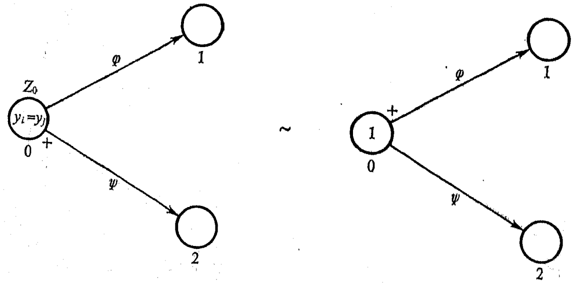
Б1. Если $\forall\zeta \in Z_0(\zeta_{\bar{x}} = \zeta_{\bar{y}}^i)$, то

Б2. Если $\forall\zeta \in Z_0(\zeta_{\bar{x}} \neq \zeta^{i}_{\bar{y}})$, то



Б3. Если $\forall\zeta \in Z_0(\zeta^{i}_{\bar{y}} = \zeta^{j}_{\bar{y}})$, то

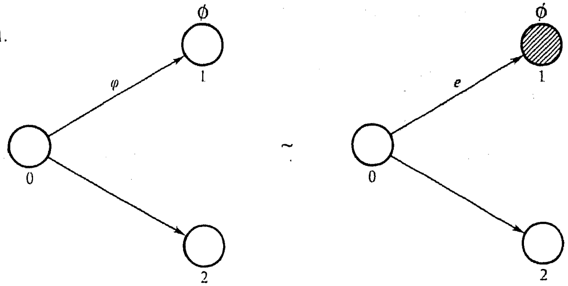
Б4. Если $\forall\zeta \in Z_0(\zeta^{i}_{\bar{y}} \neq \zeta^{j}_{\bar{y}})$, то



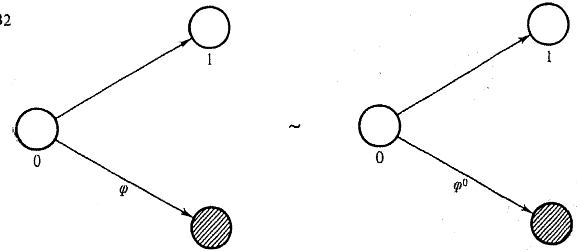
Б5. Если $\forall\zeta \in Z_0(\zeta^{i}_{\bar{y}} = \zeta^{j}_{\bar{y}})$, то

Рис. 3

В1.



В2



В3. Если $\varphi^0 = \psi^0$, то

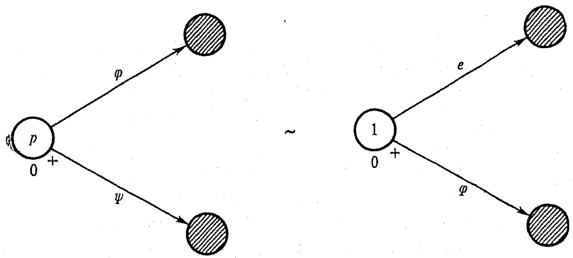
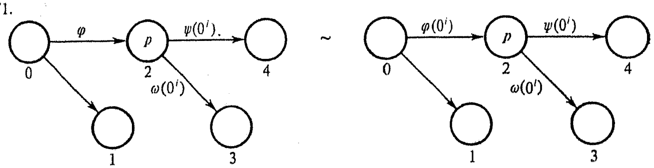


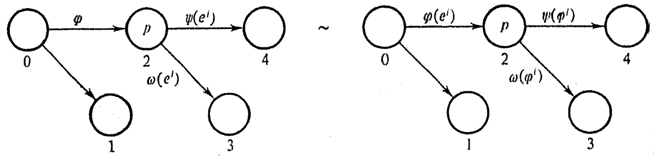
Рис. 4

Г. Если предикат p не зависит от y_i и вершина 2 внутренняя, то

Г1.



Г2.



Г3.

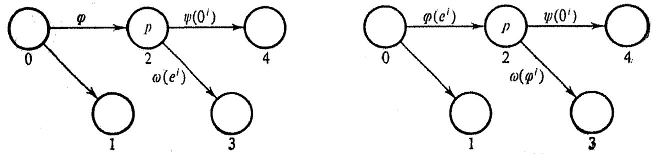
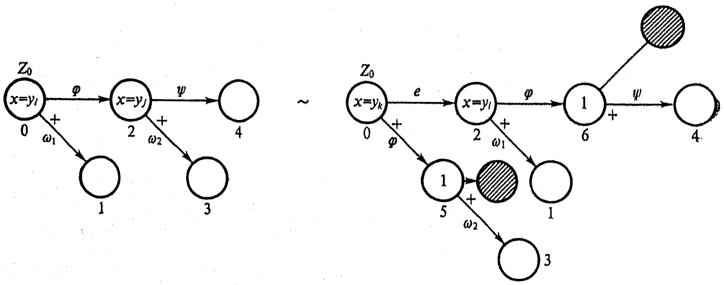
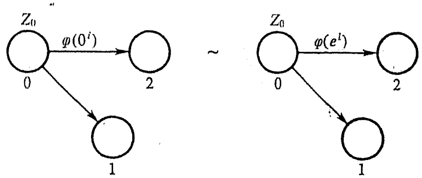


Рис. 5

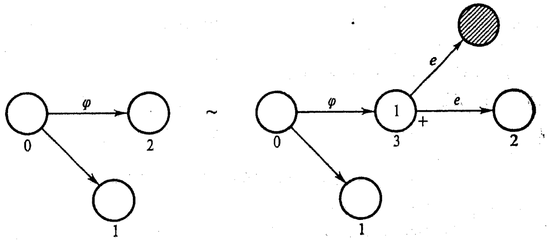
Д1. Если вершина 2 внутренняя и существует k такое, что для любого ζ из Z_0: $\zeta^k_{\bar y} = \xi^j_{\bar y}$, или $\zeta^k_{\bar y} = \zeta^j_{\bar y} - 1$, или $\zeta^k_{\bar y} = 0$ соответственно для случаев $\varphi^j = e$, $\varphi^j = s$ и $\varphi^j = 0$, то



Д2. Если $\forall\zeta \in Z_0(\zeta^i_{\bar y} = 0)$, то



Д3. Если вершина 3 внутренняя, то



Д4.

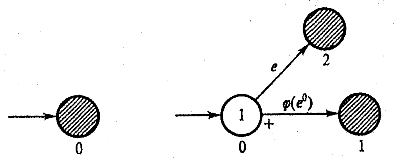


Рис. 6

Поясним значение некоторых правил. С помощью правила 01 можно вводить в ВК „двойники" некоторых вершин, а затем с помощью правил 02 и 03 направлять в них подходящие дуги так, чтобы в результате получались древовидные фрагменты (см. лемму 3). В частности, из правил 01 и 02 выводимо правило 04, изображенное на рис. 7.

04. Если вершина 2 внутренняя, то

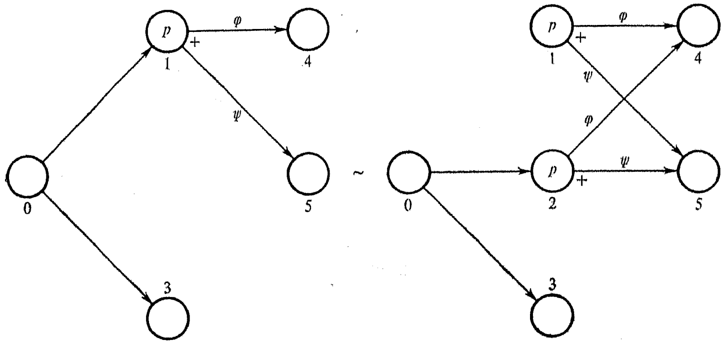


Рис. 7

Правила группы А служат для получения разметки начальных поддеревьев. Правила группы Б позволяют преобразовывать предикаты в размеченных фрагментах. Остальные правила служат для преобразования операторов и носителей ВК.

6. Локальность правил из Σ_0

Чтобы доказать локальность правил системы Σ_0, мы сначала определим функцию $F_{\mathfrak{A}}$, реализуемую произвольным фрагментом $\mathfrak{A}$ с занумерованными вершинами. Пусть во фрагменте $\mathfrak{A}$ имеются k входных и q выходных вершин соответственно с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и $j_1, \ldots, j_q$, причем начальную вершину (если она есть) считаем входной, а всякой заключительной вершине припишем некоторый специальный номер j_ω (одинаковый для всех фрагментов). Функция $F_{\mathfrak{A}}$ — это набор из k функций $F_{\mathfrak{A}}^{i_1}, \ldots, F_{\mathfrak{A}}^{i_k}$, определенных следующим образом. Для каждого входа v_s и произвольного состояния памяти $\zeta \in Z$ определено вычисление, начинающееся состоянием (ζ, v_s) (где v_s — вершина с номером i_s), которое может закончиться либо в заключительной, либо в выходной вершине, либо вообще не закончиться, если во фрагменте имеются реализуемые циклы. Если это вычисление заканчивается в вершине с номером j_t и последним состоянием памяти является $\tilde{\zeta}$, то значением $F_{\mathfrak{A}}^{i_s}(\zeta)$ функции $F_{\mathfrak{A}}^{i_s}$ считаем пару $(\tilde{\zeta}, j_t)$, если $t \neq \omega$, и — число $\tilde{\zeta}_y^0$, если $t = \omega$. Если же это вычисление не заканчивается, то значение $F_{\mathfrak{A}}^{i_s}(\zeta)$ не определено.

Если фрагмент $\mathfrak{A}$ — размеченный и входу v_s приписано множество Z_s, то функция $F_{\mathfrak{A}}^{i_s}$ рассматривается только на множестве Z_s.

Фрагменты $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются *сильно эквивалентными* ($\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$), если $F_{\mathfrak{A}} = F_{\mathfrak{B}}$, т.е. $\forall s$ $F_{\mathfrak{A}}^{i_s} = F_{\mathfrak{B}}^{i_s}$, $s = 1, \ldots, k$.

Ясно, что изоморфные фрагменты сильно эквивалентны.

Предложение 4. *Если фрагменты $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ сильно эквивалентны, то правило $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ локально.*

Доказательство. Предположим, что ВК $\mathfrak{B}$ содержит вхождение фрагмента $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}'$ получено из $\mathfrak{B}$ заменой $\mathfrak{A}$ на $\mathfrak{B}$ так, как это происходит при применении правила $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. Покажем, что если $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$, то $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}'$. Пусть τ и τ' — вычисления соответственно в ВК $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ для некоторого начального состояния $\zeta \in Z$. Ясно, что вычисление τ не содержит вершин фрагмента $\mathfrak{A}$ тогда и только тогда, когда вычисление τ' не содержит вершин фрагмента $\mathfrak{B}$, и в этом случае вычисления τ и τ' совпадают. Предположим, что вычисление τ содержит вершины из $\mathfrak{A}$, а вычисление τ' содержит вершины из $\mathfrak{B}$. Разобьем вычисления τ и τ' на части: $\tau = \tau_0\tau_1 \ldots \tau_l$; $\tau' = \tau'_0\tau'_1 \ldots \tau'_l$, так, что части τ_{2m} (τ'_{2m}) не содержат вершин из $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$), а части τ_{2m+1} (τ'_{2m+1}) содержат только вершины из $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{B}$), $m = 0, 1, \ldots$ (Части τ_0 и τ'_0 могут быть пустыми.) Очевидно, что $\tau_0 = \tau'_0$ и первые вершины частей τ_1 и τ'_1 являются соответствующими входами v и v' фрагментов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Так как $\tau_0 = \tau'_0$, то $Z_v = Z_{v'}$, и так как $\mathfrak{A} \approx \mathfrak{B}$, то последние вершины w и w' частей τ_1, τ'_1 являются соответствующими выходами фрагментов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. По условию применения правила $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ к $\mathfrak{B}$ соответствующие дуги из соответствующих выходов фрагментов $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ ведут в одну и ту же вершину той части ВК $\mathfrak{B}$, которая остается после удаления фрагмента $\mathfrak{A}$. Применив индукцию и аналогичное рассуждение, мы получим в результате совпадение значений переменной y_0 в последних состояниях вычислений τ и τ', если они конечны (ибо в этом случае оба вычисления заканчиваются в заключительной вершине), либо оба вычисления должны быть бесконечными. Отсюда следует, что $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{B}'$. ∎

В качестве следствия получаем:

Теорема 1. *Правила системы Σ_0 локальны.*

Для того, чтобы доказать это, достаточно, в силу предложения 4 показать, что фрагменты в любом из правил системы Σ_0 являются сильно эквивалентными, а это делается непосредственной проверкой.

7. Предельная полнота системы Σ_0

Теорема 2. *Система правил Σ_0 — предельно полная для класса* ВК *из* ВК_0^1, *вычисляющих всюду определенные функции.*

Прежде чем доказывать эту теорему, мы определим некоторые понятия и докажем ряд лемм.

Начальное дерево назовем *каноническим*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

(1) Любая несущественная вершина является заключительной.

(2) Всякой не главной не заключительной вершине приписан предикат 1.

(3) Всякой главной вершине приписан предикат $x = y_1$.

(4) Всякой дуге главной ветви приписан оператор s^1.

(5) Всякой дуге не главной ветви, если эта дуга ведет в несущественную вершину или выходит из главной вершины, то приписан пустой оператор e, в остальных случаях приписан оператор s^0.

Начальное дерево назовем *нормальным*, если оно удовлетворяет первым двум условиям из определения канонического дерева.

ВК назовем *m-каноническим* (*m-нормальным*), если он содержит каноническое (нормальное) m-начальное поддерево.

Докажем одно предложение, являющееся аналогом закона сохранения суммарного потока для деревьев. Назовем *полным сечением* дерева такое множество V его вершин, что любая ветвь этого дерева содержит ровно одну вершину из V. Две вершины v_1, v_2 назовем *соседними*, если они являются непосредственными последователями какой-либо одной вершины.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{A}_v$ — поддерево с корнем v некоторого* ВК $\mathfrak{A}$ *и V — конечное полное сечение дерева $\mathfrak{A}_v$. Тогда выполняется условие*

$$(\Delta) \qquad \bigcup_{u \in V} X_u = X_v.$$

Доказательство. Если сечение V состоит из одной вершины v или из двух её непосредственных последователей, то утверждение очевидно. Предположим, что оно верно для сечений, содержащих не более $m > 1$ вершин, и докажем его для сечений, содержащих $m+1$ вершину. Пусть полное сечение V поддерева $\mathfrak{A}_v$ содержит $m+1$ вершину. Рассмотрим произвольную вершину v_1 сечения V, находящуюся на максимальном расстоянии от корня v. Пусть v_0 — непосредственный предшественник вершины v_1, а v_2 — соседняя вершина с v_1. Поскольку предшественники вершины v_2 являются предшественниками и вершины v_1, то они не могут принадлежать сечению V. В то же время длина (относительно корня v) последователей вершины v_2 больше длины v_1, поэтому и они не могут принадлежать сечению V. Следовательно, вершина v_2 принадлежит сечению V. Но тогда множество $V_1 = (V - \{v_1, v_2\}) \cup \{v_0\}$ является полным сечением поддерева $\mathfrak{A}_v$, содержащим ровно m вершин, и следовательно, для него условие (Δ) выполнено согласно индуктивному предположению. А так как $X_{v_0} = X_{v_1} \cup X_{v_2}$, то $\bigcup_{u \in V} X_u = \bigcup_{u \in V_1} X_u = X_v$. ∎

Следствие. *Если поддерево $\mathfrak{A}_v$ конечно и $X_v \neq \emptyset$, то существует реализуемый путь из v в концевую вершину поддерева $\mathfrak{A}_v$.*

Лемма 2. *Во всяких эквивалентных m-канонических* ВК *m-начальные поддеревья изоморфны.*

Доказательство. Заметим сначала, что из определений m-начального поддерева и канонического дерева следует, что в m-начальном поддереве m-канонического ВК всякий реализуемый не главный путь можно продолжить до существенной заключительной вершины.

Пусть $\mathfrak{A}$ — m-канонический ВК и пусть v_i обозначает его главную вершину длины i, а w_i — 1-последователь вершины v_i, $i = 0, 1, \ldots, m-1$. Так как $X_{v_0} = N$, $Y^1_{v_0} = 0$ и p_{v_0} есть $x = y_1$, то $X_{w_0} = \{0\}$. С помощью индукции нетрудно доказать, что для любого i, меньшего m, $X_{w_i} = \{i\}$. Тогда в силу следствия из леммы 1 и замечания в начале доказательства, через w_i проходит реализуемая ветвь, заканчивающаяся в заключительной вершине. Поскольку $Y^0_{w_i} = 0$ и всем дугам реализуемого пути из w_i в заключительную вершину приписаны операторы s^0, то значение функции $f_{\mathfrak{A}}$ для аргумента i равно длине этого пути. Таким образом, если m-канонические ВК эквивалентны, то в их m-начальных поддеревьях реализуемые ветви, проходящие через 1-последователи главных вершин длины i, $0 \leqslant i < m$, имеют одинаковую длину. Но из определения канонического дерева следует, что такие поддеревья изоморфны. ∎

Лемма 3. *Любой* ВК, *вычисляющий всюду определенную функцию, для любого натурального числа m с помощью правил из Σ_0 можно преобразовать в* ВК, *содержащий m-начальное поддерево.*

Доказательство. Для $m = 0$ m-начальное поддерево состоит из одной начальной вершины. Если в рассматриваемом ВК в нее ведут какие-либо дуги, то с помощью правила 02 (или 03, если начальная вершина является заключительной) все эти дуги можно направить в „двойник" начальной вершины, который получается с помощью правила 01. Предположим, что утверждение верно для некоторого числа m и докажем его для $m+1$. Рассмотрим ВК, содержащий m-начальное поддерево. Так же, как и в случае $m = 0$ с помощью правил группы 0 можно добиться того, что в главную вершину v_{m+1} длины $m+1$ (если такая вершина имеется), а также в 1-последователь u главной вершины v_m длины m будет вести ровно по одной дуге. Если главной вершины длины $m+1$ нет, то это означает, что вершина v_m — заключительная, и тогда, применив правило ДЗ, мы получим главную вершину длины m с константным предикатом 1, а заключительная вершина приобретет длину $m+1$. В этом случае, очевидно, мы сразу получим ВК с $m+1$-начальным поддеревом. Поэтому будем считать, что ВК содержит главную вершину длины $m+1$. Произведем теперь с помощью правил групп А и Б разметку начального поддерева, содержащего вершины v_{m+1} и u. Согласно предложению 3 всякой не главной вершине v этого поддерева будет приписано либо пустое, либо одноэлементное множество Z_v, и потому через вершину u проходит не более одной существенной ветви. Если $Z_u = \emptyset$, то с помощью правила В1 мы сделаем вершину u заключительной и таким образом утверждение леммы будет выполнено. Предположим, что $|Z_u| = 1$. Поскольку мы рассматриваем ВК, вычисляющий всюду определенную функцию, то существенная ветвь, проходящая через вершину u, конечна и заканчивается заключительной вершиной. Если эта ветвь целиком лежит в некотором начальном поддереве, то все вершины этого поддерева, не входящие в данную ветвь и являющиеся последователями вершины u несущественны и потому с помощью правил групп А и Б им припишутся множества $Z_v = \varnothing$, а с помощью правила В1 все эти вершины можно сделать заключительными. В результате мы получим ВК с $m+1$-начальным поддеревом.

Предположим теперь, что существенная ветвь, проходящая через вершину u, не содержится ни в каком начальном поддереве рассматриваемого ВК. Это означает, что в множестве V вершин этой ветви и их непосредственных последователей имеются такие, в которые ведут две или более дуги. Назовем такие вершины плохими. Поскольку рассматриваемый ВК содержит m-начальное поддерево, то все плохие вершины из V являются последователями вершины u. Вводя с помощью правила 01 двойники ближайших к u плохих вершин из V, и направляя в них по правилам 02 или 03 все „лишние" дуги, мы увеличим таким образом минимальное расстояние от u до плохой вершины из V. Поскольку существенная ветвь конечна, то продолжая этот процесс, мы в конце концов добьемся того, что в множестве V не будет плохих вершин, а это означает, что существенная ветвь, проходящая через вершину u, будет целиком лежать в некотором начальном поддереве рассматриваемого ВК. Таким образом мы получаем случай, который уже был рассмотрен ранее. ■

Следствие. *Любой* ВК *для всякого натурального числа m с помощью правил из Σ_0 можно преобразовать в m-нормальный* ВК.

Действительно, сначала произвольный ВК преобразуется в ВК, содержащий m-начальное поддерево, затем с помощью правил групп А и Б производится разметка начального дерева и замена константных предикатов в неглавных вершинах на предикат 1 и, наконец, с помощью правила В1 все несущественные вершины m-начального поддерева делаются заключительными.

Если v — древесная вершина с неконстантным предикатом $x = y_i$, то число Y_v^i назовем *характеристикой* вершины v.

Заметим, что если ВК содержит вершину v с характеристикой c, то ветвь, реализуемая аргументом c, проходит через вершину v. Действительно, если ветвь, реализуемая аргументом c, не проходит через древесную вершину v с предикатом $x = y_i$ и для которой $Y_v^i = c$, то этот предикат константный (со значением 0). Но это противоречит определению характеристики.

Лемма 4. *Во всяком* ВК *для любого натурального числа c существует не более одной вершины с характеристикой c.*

Доказательство. Предположим, что в некотором ВК существуют две вершины v_1 и v_2 с характеристикой c. Из определения характеристики следует, что предикаты p_{v_1} и p_{v_2} — не константные. Поэтому, в силу предложения 3, обе вершины v_1 и v_2 — главные, а так как обе они древесные, то в главной ветви одна из них предшествует другой (относительно порядка в главной ветви развертки). Пусть, например, вершина v_1 предшествует вершине v_2. В силу предыдущего замечания $c \in X_{v_1}$. Ясно, что $c \in X_{v'}$, где v' — 1-последователь вершины v_1, и следовательно, $c \notin X_{v''}$, где v'' — 0-последователь вершины v_1. Так как вершина v'' — главная, то вершина v_2 либо совпадает с ней, либо является ее последователем, и потому $c \notin X_{v_2}$. Но это противоречит тому, что c является характеристикой вершины v_2. ■

Лемма 5. *Любой* ВК $\mathfrak{A}$, *вычисляющий всюду определенную функцию, для всякого натурального числа m с помощью правил из Σ_0 можно преобразовать в такой* ВК $\mathfrak{A}_1$, *который содержит вершину с характеристикой m.*

Доказательство. Предположим сначала, что главная ветвь ВК $\mathfrak{A}$ конечна (и следовательно, заканчивается заключительной вершиной) и в ней нет вершины с характеристикой m. Применяя правила группы 0, мы сделаем все вершины главной ветви древесными. Выберем какую-либо не результирующую переменную y_i, значение которой в последней вершине v главной ветви не превосходит m. Если такой переменной нет, то ее можно получить с помощью правила В2. Применим теперь к последним вершинам главной ветви правило Д3 и с помощью правила В3 заменим предикат 1 в возникшей вершине v' на предикат $x = y_i$ (см. рис. 8).

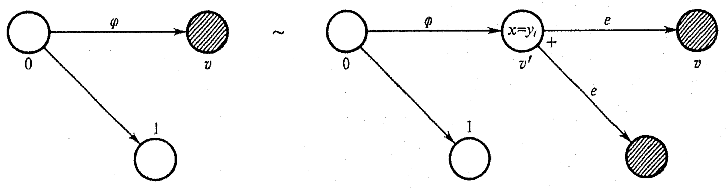


Рис. 8

Так как среди главных вершин, предшествующих v', нет вершины с характеристикой m, то $m \in X_{v'}$. Поэтому, если $Y_{v'}^i = m$, то предикат $p_{v'}$ — не константный и тогда вершина v' имеет характеристику m. Предположим, что утверждение верно для случаев, когда $m - Y_{v'}^i \leqslant q$, $q \geqslant 0$, и пусть $m - Y_{v'}^i = q+1$. Применив правило В2 (справа налево), мы заменим оператор e, приписанный последней дуге главной ветви, на s^i. Таким образом в заключительной вершине v значение Y_v^i увеличится на 1. Применяя, как и в первом случае, правила Д3 и В3, мы вставим еще одну главную вершину v'' с предикатом $x = y_i$, для которой будет выполнено равенство $Y_{v''}^i = Y_{v'}^i+1$, и следовательно, $m - Y_{v''}^i = q$.

Согласно индуктивному предположению такой ВК мы можем преобразовать в ВК, содержащий вершину с характеристикой m.

Предположим теперь, что главная ветвь ВК $\mathfrak{A}$ бесконечна, и следовательно, любой аргумент реализует не главную ветвь. Будем преобразовывать ВК $\mathfrak{A}$ с помощью правил группы 0 так, чтобы вершины, входящие в путь, реализуемый аргументом m, последовательно (в порядке вхождения в этот путь) становились древесными. Поскольку всякий аргумент реализует не главную ветвь, то через конечное число шагов мы получим ВК $\mathfrak{A}_1$, в котором ветвь $v_0 d_0 v_1 d_1 \ldots v_t$, реализуемая аргументом m такова, что для некоторого k вершины $v_0, v_1, \ldots, v_{k+1}$ — древесные, причем вершины $v_0, v_1, \ldots, v_k$ — главные, а вершина v_{k+1} — не главная, $0 \leqslant k < t$. Поскольку вершина v_{k+1} — не главная, то в силу предложения 3 $X_{v_{k+1}} = \{m\}$, и следовательно, предикат p_{v_k} — не константный. Согласно предложению 2 этот предикат имеет вид $x = y_i$, а так как в вершину v_{k+1} из вершины v_k ведет 1-дуга, то $Y^i_{v_k} = m$, т.е. m является характеристикой вершины v_k. ■

Следствие. *Произвольный ВК $\mathfrak{A}$, вычисляющий всюду определенную функцию, для любого натурального числа m можно преобразовать с помощью правил из Σ_0 в такой ВК $\mathfrak{A}_1$, в котором имеются вершины с характеристиками $0, 1, \ldots, m$.*

Действительно, преобразования, описанные в доказательстве леммы 5, очевидно, не изменяют характеристики тех вершин из $\mathfrak{A}$, которые их уже имеют.

Древесную вершину с неконстантным предикатом назовем *канонической*, если ее длина равна ее характеристике; если же длина древесной вершины больше ее характеристики, то такую вершину будем называть *неканонической*.

Заметим, что в силу предложения 3 каноническими и неканоническими могут быть только главные вершины.

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольный m-нормальный ВК, вычисляющий всюду определенную функцию, в котором все главные вершины длины не более h — канонические и v — ближайшая к корню неканоническая вершина длины l и с характеристикой c, $c < l < m$. Тогда ВК $\mathfrak{A}$ с помощью правил из Σ_0 можно преобразовать в такой m-нормальный ВК $\mathfrak{A}_1$, в котором все главные вершины длины не более h — канонические и вершина с характеристикой c существует и имеет длину $l-1$.*

Доказательство. Сначала заметим, что если главной древесной вершине v с неконстантным предикатом $x = y_i$ предшествуют только канонические вершины, то вершина v — также каноническая. Действительно, если бы она не была канонической, то это означало бы, что $Y^i_v < lv$. Но если все вершины, предшествующие вершине v, канонические, то для любого q, меньшего lv, в частности, для $q = Y^i_v$ существует главная вершина v' длины q с предикатом $x = y_j$ и такая, что $Y^j_{v'} = q$. Это означает, что ветвь, реализуемая аргументом $q = Y^i_v$ проходит через 1-последователь вершины v',

и следовательно, $q \notin X_v$, т.е. предикат $x = y_i$ в вершине v — константный со значением 0, что противоречит условию.

Пусть предикат p_v имеет вид $x = y_i$. Так как вершина v неканоническая, то $Y^i_v < lv$ и потому среди операторов, приписанных дугам начального пути в вершину v существуют такие, у которых i-ая компонента отлична от S. Обозначим через v_k, $k = 0, 1, \ldots$, главную вершину длины k, через φ_k — оператор, приписанный главной дуге, выходящей из вершины v_k, через ω_k — оператор, приписанный не главной дуге, выходящей из вершины v_k. Вместо p_{v_k} будем писать p_k. Пусть φ_r $(0 \leqslant r < l)$ — последний из операторов, приписанных дугам начального пути в вершину v, i-ая компонента которых отлична от s, т.е. $\varphi^i_r \neq s$, а $\varphi^i_{r+1} = \varphi^i_{r+2} = \ldots = \varphi^i_{l-1} = s$ (см. рис. 9, на котором схематически изображено начальное поддерево ВК $\mathfrak{A}$, причем некоторые из не главных вершин могут быть заключительными).

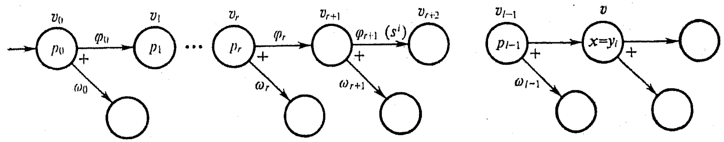


Рис. 9

Применим индукцию по величине расстояния $l-r$ от вершины v_r до вершины v.

(1) Пусть $l-r = 1$, т.е. $r = l-1$. Возможны два случая.

(1.1) $\varphi^i_{l-1} = e$. Тогда $Y^i_{v_{l-1}} = Y^i_v$, и следовательно, мы можем применить к фрагменту с корнем в вершине v_{l-1} правило Д1 (где роль j и k в данном случае играет i). В результате вершина с характеристикой c приобретет длину $l-1$. В силу замечания в начале доказательства $h < l-1$, поэтому вершины $v_0, \ldots, v_h$ останутся каноническими.

(1.2) $\varphi^i_{l-1} = 0$. Сначала покажем, что с помощью правил групп В и Г мы можем преобразовать оператор ω_{l-1} так, чтобы его i-ая компонента стала равной 0. Действительно, если предикат p_{l-1} — константный, то не главный последователь вершины v_{l-1} является несущественной вершиной, и тогда по правилу В1 оператор ω_{l-1} может быть заменен любым другом оператором. Если же предикат p_{l-1} — не константный, то поскольку $\mathfrak{A}$ вычисляет всюду определенную функцию и является m-нормальным для $m > l$, то реализуемая ветвь, проходящая через не главный последователь вершины v_{l-1}, конечна и заканчивается заключительной вершиной. Применив правило В3, мы сначала сделаем i-ую компоненту оператора, приписанного последней дуге этой ветви, равной 0, в то время как дуге, ведущей в несущественную заключительную вершину, припишем оператор $\overline{0}$. Далее по правилу Г1 мы сделаем равной 0 i-ую компоненту оператора, приписанного предпоследней дуге упомянутой существенной ветви и т.д., пока не дойдем до оператора ω_{l-1}. Если предикат p_{l-2} не зависит от y_i, то теперь мы можем применить правило Г1 и сделать i-ую компоненту оператора φ_{l-2} равной 0. В результате будет выполнено равенство $Y^i_{v_{l-1}} = Y^i_v$ и тогда, как и в предыдущем случае, применив правило Д1, мы получим ВК, в котором вершина с характеристикой C имеет длину $l-1$.

Предположим, что предикат p_{l-2} зависит от y_i. Поскольку вершина v_{l-2} не может быть неканонической, то это означает, что она — каноническая, и следовательно, $Y^i_{v_{l-2}} = l-2$, т.е. для всех k, не превосходящих $l-2$, $\varphi^i_k = s$. Так как все вершины v_k ($k \leqslant l-2$) либо канонические, либо имеют константные предикаты, то с помощью правила Б5 мы можем все не константные предикаты p_k заменить на $x = y_i$. Пусть y_j — какая-либо рабочая переменная, отличная от y_i и от результирующей переменной. (Поскольку мы не требуем, чтобы все рабочие переменные явно входили в операторы и предикаты ВК, то не уменьшая общности мы можем считать, что любой ВК содержит по крайней мере две рабочие переменные, отличные от результирующей). Как и для ω^i_{l-1}, с помощью правил групп В и Г, а также — Д2, мы можем сделать j-ую компоненту оператора ω_{l-1}, равной e (с помощью правила Д3 можно и весь оператор, приписанный не главной дуге, выходящей их вершины v_{l-1}, сделать равным e). Применив теперь правило Д3 к фрагменту с корнем в вершине v, а затем — правило Г2 к фрагменту с корнем в вершине v_{l-1}, мы сделаем j-ую компоненту оператора φ_{l-1} равной e. Так как все предикаты $p_0, \ldots, p_{l-1}$ не зависят от y_j, то изменяя j-ые компоненты операторов ω_k $(1 \leqslant k \leqslant l-1)$ на e и применяя правило Г2, мы продвинем компоненту e^j в оператор φ_0. Применив этот способ нужное число раз, мы сделаем j-ые компоненты всех операторов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{l-1}$ равными e и таким образом получим ВК, в котором $Y^j_{v_{l-1}} = Y^i_v = 0$. Теперь мы можем применить к фрагменту с корнем в вершине v_{l-1} правило Д1, в результате чего вершина с характеристикой c приобретет длину $l-1$. Очевидно, что при этом все канонические вершины длины не более $l-2$ останутся каноническими.

(2) Предположим, что утверждение верно для случаев, когда $l-r < q > 0$ и докажем его для случая, когда $l-r = q$. Рассмотрим возможные два случая.

(2.1) $\varphi^i_r = e$. Методом, аналогичным описанному в случае (1.2) i-ую компоненту оператора ω_{r+1} делаем равной s и затем применяем правило Г2 (справа налево) к фрагменту с корнем v_r. В результате получаем у оператора φ_{r+1} i-ую компоненту, равную e, и тогда утверждение будет выполнено в силу индуктивного предположения.

(2.2) $\varphi^i_r = 0$. Если предикат p_r не зависит от y_i, то сначала i-ую компоненту оператора ω_r делаем равной 0 и затем с помощью правила Г1 делаем равной 0 i-ую компоненту оператора φ_{r-1}. Тогда будет выполнено условие: $Y^i_{v_r} = 0$ и потому, применив правило Д2, мы сможем заменить компоненту φ^i_r на e, т.е. получим предыдущий случай (2.1).

Предположим, что предикат p_r зависит от y_i. Тогда вершина v_r — каноническая и потому $Y^i_{v_r} = r$. Такими же преобразованиями, как и в случае (1.2), сделаем сначала все j-ые компоненты операторов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_r$ равными e, а затем с помощью правила Д2 заменим все компоненты φ^j_k на 0, $k = 0, 1, \ldots, r$. (Как и в случае (1.2) $j \neq i$ и все предикаты $p_0, p_1, \ldots, p_r$ не зависят от y_j.) Применяя правило Г1 (справа налево) последовательно к фрагментам с корнями в вершинах $v_0, v_1, \ldots, v_{r-1}$, мы сделаем j-ые компоненты у операторов $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{r-1}$ равными s. Таким образом будет выполнено равенство $Y^j_{v_r} = r = Y^i_{v_r}$. По правилу Б5 заменим предикат p_r на $x = y_j$ и получим рассмотренный выше случай, когда p_r не зависит от y_i. Ясно, что при этом канонические вершины длины не более h (на самом деле — не более $l-2$) останутся каноническими. ∎

Следствие. *Любой ВК* $\mathfrak{A}$, *вычисляющий всюду определенную функцию, для любого натурального числа* m *с помощью правил системы* Σ_0 *можно преобразовать в такой* m*-нормальный* ВК, *у которого все вершины длины не более* m *— канонические.*

Лемма 7. *Любой ВК* $\mathfrak{A}$, *вычисляющий всюду определенную функцию, для любого натурального числа* m *с помощью правил системы* Σ_0 *можно преобразовать в* m*-канонический* ВК.

Доказательство. Применим индукцию по m. Если $m = 0$, то достаточно показать, что ВК $\mathfrak{A}$ может быть преобразован в такой ВК, у которого начальная вершина является канонической с предикатом $x = y_1$. Начальная вершина может быть сделана канонической согласно следствию из леммы 6. А так как в начальной вершине значения всех рабочих переменных равны 0, то по правилу Б5 любой предикат $x = y_i$ в ней можно заменить предикатом $x = y_1$.

Предположим, что утверждение верно для некоторого $m \geqslant 0$ и докажем его для $m+1$. Пусть $\mathfrak{A}$ — m-канонический ВК. Будем использовать те же обозначения, что и в лемме 6. Согласно следствию из этой леммы мы можем преобразовать ВК $\mathfrak{A}$ в такой ВК, у которого все главные вершины длины не более $2m+2$ являются каноническими, причем в соответствии с индуктивным предположением все предикаты $p_0, p_1, \ldots, p_m$ имеют вид $x = y_1$. Докажем сначала, что и предикат p_{m+1} может быть сделан таким же. Пусть предикат p_{m+1} имеет вид $x = y_i$, $i \neq 1$. Возможны следующие случаи.

(1) $\varphi^1_m = s$. Тогда $Y^1_{v_{m+1}} = m+1$, а так как вершина v_{m+1} — каноническая, то мы можем применить правило Б5 и заменить предикат p_{m+1} на $x = y_1$.

(2) $\varphi^1_m = 0$. Рассмотрим следующие подслучаи.

(2.1) Среди компонент $\varphi^1_{m+1}, \varphi^1_{m+2}, \ldots, \varphi^1_{2m+2}$ имеется компонента $\varphi^1_k = 0$. Поскольку приемом, описанным в доказательстве леммы 6, можно любые не результирующие компоненты операторов ω_j, $j = 0, 1, \ldots$, изменять на любые другие, то мы можем считать, что применимость правил группы Г зависит только от компонент операторов φ_j и от вида предикатов в соответстующих вершинах. Так как $Y^1_{v_{m+1}} = 0$, и все вершины $v_{m+1}, \ldots, v_{2m+2}$ — канонические, то предикаты $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_{2m+2}$ не зависят от y_1. Поэтому мы можем применить к фрагменту с корнем v_{k-1} правило Г1 и переместить компоненту 0^1 в оператор φ_{k-1}. Если $k-1 > m+1$, то применим правило Г1 к фрагменту с корнем v_{k-2} и т.д. до тех пор, пока не сделаем нулем компоненту φ^1_{m+1}. Применив теперь правило Г1 (справа налево) к фрагменту с корнем v_m, мы сделаем компоненту φ^1_m равной s и таким образом получим рассмотренный выше случай (1).

(2.2) Среди компонент $\varphi^1_{m+1}, \varphi^1_{m+2}, \ldots, \varphi^1_{2m+2}$ имеется компонента $\varphi^1_k = e$. Поскольку предикаты $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_{2m+2}$ не зависят от y_1, то мы можем, применяя правило Г2, переместить компоненту e^1 в оператор φ_{m+1}. Поскольку $Y^1_{v_{m+1}} = 0$, то мы можем применить правило Д2 и заменить компоненту φ^1_{m+1} на 0, т.е. получаем предыдущий случай (2.1).

(2.3) Все компоненты $\varphi^1_{m+1}, \varphi^1_{m+2}, \ldots, \varphi^1_{2m+2}$ суть s. Так как вершина v_{m+1} — каноническая, то $Y^i_{v_{m+1}} = m+1$ и следовательно, во всех вершинах v_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, $Y^i_{v_j} = j$. Поэтому с помощью правила Б5 мы можем заменить все предикаты $p_0, p_1, \ldots, p_m$ на $x = y_i$, после чего, применяя правило Г1, мы все компоненты $\varphi^1_0, \varphi^1_1, \ldots, \varphi^1_m$ сделаем равными 0, а затем с помощью правила Д2 — равными e. Применяя правило Г2 (справа налево), мы переместим все компоненты $\varphi^1_{m+1}, \varphi^1_{m+2}, \ldots, \varphi^1_{2m+2}$, равные s, на места $\varphi^1_0, \varphi^1_1, \ldots$ $\ldots, \varphi^1_m$. Теперь уже с помощью правила Б5 все предикаты $p_0, p_1, \ldots, p_{m+1}$ можно сделать равными $x = y_1$.

(3) $\varphi^1_m = e$. Рассмотрим два случая.

(3.1) Среди компонент $\varphi^1_{m+1}, \varphi^1_{m+2}, \ldots, \varphi^1_{2m+2}$ есть s или 0. Поскольку предикаты $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_{2m+2}$ не зависят от y_1, то применяя правила Г1 или Г2, мы можем переместить такую компоненту в оператор φ_m. Если указанная компонента есть 0, то мы получим случай (2), если же — s, то с помощью правила Б5 заменим предикат p_{m+1} на $x = y_1$.

(3.2) Все компоненты $\varphi^1_{m+1}, \varphi^1_{m+2}, \ldots, \varphi^1_{2m+2}$ суть e. Заменим по правилу Б5 все предикаты $p_0, p_1, \ldots, p_m$ на $x = y_i$ и с помощью правила Г2 переместим все компоненты $\varphi^1_0, \varphi^1_1, \ldots, \varphi^1_{m-1}$ вправо на места $\varphi^1_{m+2}, \ldots, \varphi^1_{2m+2}$, так что будет $\varphi^1_0 = \varphi^1_1 = \ldots = \varphi^1_{m+1} = e$. Заменим по правилу Д2 компоненту φ^1_{m+1} на 0 и с помощью правила Г3 сделаем компоненту φ^1_m равной s. Затем с помощью правила Г2 переместим компоненту s^1 на место φ^1_{m-1} и опять с помощью Г3 сделаем компоненту φ^1_m равной s. Далее мы можем переместить с помощью правила Г2 компоненту $\varphi^1_{m-1} = s$ на место φ^1_{m-2}, а компоненту $\varphi^1_m = s$ — на место φ^1_{m-1}. Продолжая этот процесс, мы в конце концов сделаем все компоненты $\varphi^1_0, \varphi^1_1, \ldots, \varphi^1_m$ равными s, и тогда с помощью правила Б5 все предикаты $p_0, p_1, \ldots, p_{m+1}$ мы сможем заменить на $x = y_1$. Этим

завершается доказательство того, что все предикаты в канонических вершинах $v_0, v_1, \ldots, v_{m+1}$ можно сделать равными $x = y_1$, т.е. что может быть удовлетворено условие 3 из определения канонического дерева. Условия 1 и 2 удовлетворяются в силу следствия из леммы 3. Таким образом, нам остается показать, что, кроме того, могут быть удовлетворены условия 4 и 5.

Пусть $\mathfrak{A}$ — m-нормальный ВК, у которого вершины $v_0, v_1, \ldots, v_m$ (в обозначениях леммы 6) — канонические с предикатами $x = y_1$. Покажем, что с помощью правил из Σ_0 все операторы $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ можно сделать равными s^1. Применим к фрагменту с корнем v_m правило Д3, после чего с помощью правила Г2 мы переместим в операторы, приписанные дугам, выходящим из вершины v_m, все компоненты оператора φ_{m-1}, кроме $\varphi^1_{m-1} = s$. Проделывая аналогичное преобразования с операторами $\varphi_{m-2}, \varphi_{m-3}, \ldots, \varphi_0$, мы, очевидно, можем добиться выполнения условия 4, не нарушая при этом условий 1-3.

Чтобы удовлетворить условие 5, мы сначала сделаем пустыми операторы, приписанные не главным дугам, выходящим из главных вершин (с помощью правила Д3), а также — с помощью правила В1 — операторы, приписанные несущественным дугам. Затем, применяя правила В2 и Г2, мы ликвидируем все компоненты φ^j (т.е. сделаем их равными e) для $j \neq 0$ у операторов, приписанных дугам, не входящим в главную ветвь. Далее, с помощью правила Д3 мы уничтожим дуги с пустыми операторами, кроме не главных дуг, выходящих из главных вершин. Тем самым будет выполнено и условие 5, причем ясно, что условия 1–4 при этом не будут нарушены. ■

Теорема 2 теперь непосредственно следует из лемм 2 и 7. Аналогичными методами можно доказать полноту системы Σ_0, уже в обычном смысле, для некоторых узких подклассов программ, например, имеет место следующая

Теорема 3. *Система Σ_0 является полной для класса программ (из Π^1_0), не содержащих реализуемых циклов.*

Приведем набросок доказательства. Если программы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ не содержат реализуемых циклов, то в их развертках длины реализуемых ветвей ограничены и потому с помощью правил группы 0 и правила В1 программы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ можно преобразовать в конечные ВД. Если конечное ВД не содержит неконстантных предикатов, то с помощью правил системы Σ_0 преобразованиями, аналогичными тем, которые описаны в доказательстве теоремы 2, его можно преобразовать в ВД такого вида, как изображенное на рис. 10. Такое ДВ вычисляет константную функцию, причем его длина равна значению этой функции. Поэтому эквивалентные ВД преобразуются в изоморфные ВД и, в силу симметричности правил, одно из них может быть преобразовано в другое, а следовательно и сами программы могут быть преобразованы друг в друга. Если хотя бы одна из разверток $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ содержит неконстантные предикаты, то приведем их к m-канонической форме, где m-максимальная характеристика вершин в $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{B}'$. При этом m-канонические формы

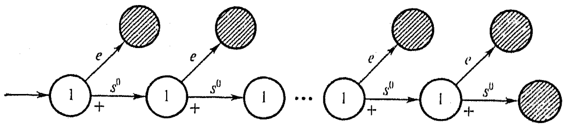


Рис. 10

$\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$ разверток $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ могут быть получены так, что всем их вершинам длины более m будут приписаны константные предикаты. Таким образом, каждое из ВД $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{B}''$ будет характеризоваться тремя фрагментами: каноническим m-начальным поддеревом и двумя фрагментами, корнями которых являются непосредственные последователи главной вершины длины m. Поскольку всем вершинам в последних двух фрагментах приписаны константные предикаты, то их можно преобразовать в поддеревья такого же вида, что и дерево на рис. 10. Как и в первом случае, это означает, что эквивалентные программы преобразуются в изоморфные ВД, а следовательно, могут быть преобразованы друг в друга.

1. Заключение

Как уже было сказано во введении, проблема эквивалентных преобразований для алгоритмов даже в самой слабой постановке [1] имеет отрицательное решение. Если же говорить о построении конечных полных систем локальных правил, то таковых не существует уже для простейших схем алгоритмов [2]. Положительного решения проблемы эквивалентных преобразований для алгоритмов, в частности для программ, можно добиться только путем очень сильного сужения рассматриваемого класса алгоритмов, и соответственно — класса вычислимых функций. Поэтому факт существования предельно полной системы локальных правил для полного класса программ представляет интерес во многих отношениях. Если рассматривать достаточно широкие классы алгоритмов, то получение предельно полных систем локальных правил — это, по-видимому, наибольшее, на что можно рассчитывать, поэтому проблему эквивалентных преобразований для алгоритмов имеет смысл изучать именно в предельной постановке. Это оправдывается еще и тем, что предельно полная система правил вместе со стратегией предельного перехода или предельного распознавания изоморфизма ВД играет такую же роль, как и полная система. С другой стороны, можно рассчитывать, что с помощью предельно полных систем окажется возможным более успешно выделять такие подклассы алгоритмов, для которых разрешимо отношение эквивалентности или же существует рекурсивная полная система правил эквивалентных преобразований. Простейшую иллюстрацию такого подхода дает теорема 3 (см. также [3]).

Литература

[1] Ю. И. Янов, *О проблеме эквивалентных преобразований*, Mitt. Math. Gesellsch. der DDR 2–3 (1973), 47–58.

[2] —, *О локальных преобразованиях схем алгоритмов*, Проблемы кибернетики 20 (1968), 201–216.

[3] —, *Об эквивалентных преобразованиях вычислительных деревьев*, препринт ИПМ АНСССР 76 (1977).

Presented to the Semester
Discrete Mathematics
(February 15–June 16, 1977)