DISCRETE MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 7
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

ЕДИНИЧНЫЙ ТЕСТ ДЛЯ СИММЕРТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Х. А. МАДАТЯН

Вычислительный центр АН СССР, Москва, СССР

При эксплуатации сложных логических схем особую важность приобретает вопрос о контроле работы этих устройств, о способах отыскания повреждений в них. Для контроля логических устройств важное значение имеет построение минимальных тестов [5], при помощи которых можно не только определить, исправна или нет схема, но и указать вид и место возникшей неисправности.

Математический аппарат построения тестовых процедур разработан в работе А. И. Чегис и С. В. Яблонского [5]. Однако, во многих случаях практическое использование этого алгоритма затруднено из-за большой его трудоёмкости. Поэтому естественно рассматривать отдельные классы схем, для которых прсторение тестов упрощается в связи с особенностями схемы.

Пусть контактная схема Σ реализует функцию алгебры логики $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Предположим, что в схеме Σ при воздействии источника помех возникают какие-то неисправности, при которых схема Σ перейдет в некоторую схему Σ'. Обозначим через $f'(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ проводимость схемы Σ'. Функция $f'(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется *функцией неисправности*. Множество всех функций неисправностей разбивается на классы $F_0, F_1, \ldots, F_m$ такие, что $f(X_1, \ldots, X_n)$ принадлежит F_0, и функции f' и f'' относятся к одному и тому же классу тогда и только тогда, когда

$$f'(X_1, X_2, \ldots, X_n) \equiv f''(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Очевидно, что каждый класс F_k характеризуется некоторой булевой функцией, и разные классы характеризуются разными булевыми функциями. Типичными для контактных схем являются два вида неиспарвностей: короткое замыкание и разрыв контакта. Мы будем предполагать, что источник помех воздействует дискретно. Контроль ведётся путем экспериментов без вмешательства в схему, т.е. на входы схемы поданы любые наборы и наблюдают за значениями проводимости. Для того, чтобы иметь возможность анализировать состояние схемы после очередной неисправности, мы предполагаем, что при выполнении данного эксперимента источник помех не действует.

Рассматриваемые средства контроля позволяют обнаружить неисправности с точностью до принадлежности к отдельному классу.

Совокупность входных наборов называется *проверяющим тестом* ($T_{\text{П}}$) относительно заданного перечня неисправностей, если по значениям проводимости схемы на этих наборах можно судить об исправности схемы. Очевидно, что $T_{\text{П}}$ даёт возможность отличить класс F_0 от $\bigcup_{i=1}^{m} F_i$.

Совокупность входных наборов называется *диагностическим тестом* ($T_{\text{Д}}$) относительно заданного перечня неисправностей, если по значениям проводимости схемы на этих наборах можно выяснить характер неисправностей. Ясно, что тест $T_{\text{Д}}$ даёт возможности отличить все классы F_0, F_1, …, F_m друг от друга.

Длиной теста называется число наборов, входящих в тест.

В данной работе будем рассматривать единичные тесты. *Единичный тест* — это тест, предназначенный для обнаружения неисправностей, когда заранее известно, что неисправность допустима для любого, но одного контакта.

Как известно (см. [5]), единичный тест распадается на два непересекающихся теста: тест для замыкания и тест для размыкания. Поэтому для построения единичного теста достаточно построить тесты отдельно для замыкания и для размыкания.

Мы строим проверяющий и диагностический тесты для симметрических функций. При этом используются схемы, построенные О. Б. Лупановым в работе [1].

Построением тестов для симметрических функций занимались ряд авторов [5], [3], [4]. В работе [5] строится единичный диагностический тест замыкания для элементарных симметрических функций. Томеску в работе [4] построил минимальный единичный проверяющий тест для пирамидальных схем Шеннона [2], реализующих любую симметрическую функцию.

Основным результатом настоящей работы является построение минимального проверяющего и диагностического тестов для схем, реализующих периодические симметрические функции [1]. Доказывается, что для любой симметрической функции алгебры логики можно построить тест, длина которого зависит линейно от числа переменных.

Пусть схема Σ реализует функцию $f(X_1, \ldots, X_n)$ и имеет сложность $L(\Sigma)$.

Определение. Набор α называется *проверяющим для контакта X схемы Σ* (*проверяет контакт X в схеме Σ*) если при неисправности (замыкании или размыкании) этого контакта $f'(\alpha) \oplus f(\alpha) = 1$, где f' — функция неисправности. Один и тот же набор α может быть проверяющим для нескольких контактов.

Утверждение 1. *Множество наборов E_1 образует единичный проверяющий тест размыкания тогда и только тогда, когда для каждого контакта в множестве E_1 найдётся хотя бы один проверяющий набор.*

Утверждение 2. *Множество наборов E_2 образует единичный диагностический тест размыкания тогда и только тогда, когда для любых двух контактов в множестве E_2 найдётся набор α, который проверяет только один из этих контактов.*

Эти утверждения, как мы увидим в дальнейшем, помогают строить тест по схеме. Число контактов, для которых набор является проверяющим, обозначим через l_α. Пусть $\tilde{l} = \max l_\alpha$ (максимум берётся по всем тем наборам α, для которых $f(\alpha) = 1$) и $\tilde{b} = \max l_\alpha$ (максимум берётся по всем тем наборам α, для которых $f(\alpha) = 0$). Тогда очевидна следующая

Теорема 1.

$$T_{\text{П}}^{1,p}(\Sigma) \geqslant L(\Sigma)/\tilde{l}, \qquad T_{\text{П}}^{1,3}(\Sigma) \geqslant L(\Sigma)/\tilde{b},$$

где $T_{\text{П}}^{1,p}(\Sigma)$ ($T_{\text{П}}^{1,3}(\Sigma)$) минимальная длина единичного проверяющего теста размыкания (замыкания) схемы Σ.

Как доказано в работе [1], периодическая симметрическая функция $T_n^{\tilde{\tau}}$, длина периода которой равна d, реализуется контактной схемой Σ_n^d со сложностью $L(\Sigma_n^d) \leqslant 2dn$. Схема Σ_n^d состоит из однотипных блоков (рис. 1), соединенных „последовательно". На рис. 2([1]) изображена такая схема для случая $d = 4$, $n = 8$, $\tilde{\tau} = (0111)$.

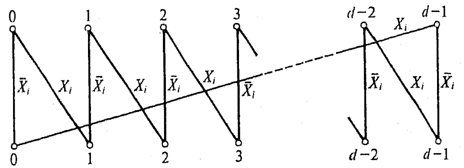

Рис. 1

Пусть $T_{\text{Д}}^{1,p}(\Sigma_n^d)$ (соответственно $T_{\text{Д}}^{1,3}(\Sigma_n^d)$), минимальная длина единичного диагностического теста размыкания (соответственно замыкания) схемы Σ_n^d.

Теорема 2. 1. $T_{\text{П}}^{1,p}(\Sigma_n^d) \sim 2d$, $T_{\text{П}}^{1,3}(\Sigma_n^d) = 2d$ $(d > 2)$;

2. $T_{\text{Д}}^{1,p}(\Sigma_n^d) \lesssim d\log_2 n$, $T_{\text{Д}}^{1,3}(\Sigma_n^d) \lesssim d\log n$.

Доказательство. В схеме Σ_n^d выделим $2d$ цепей, которые обозначены $(s_1, s_2, \ldots, s_d, \bar{s}_1, \bar{s}_2, \ldots, \bar{s}_d)$, и $2d$ сечений.([2]). Обозначим их через $(w_1, w_2, \ldots, w_d, \bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_d)$. Цепь s_i сначала проходит через $i-1$ наклонных контактов и затем через контакты i-й вертикали, а цепь $\bar{s}_i$ — вначале через $i-1$ вертикальных контактов, а потом через ряд наклонных контактов.

([1]) В целях упрощения чертежей на рис. 2–6 наименование контактов опущены. При этом подразумевается, что вертикальные отрезки изображают размыкающие контакты ($\bar{X}_i$), а наклонные замыкающие (X_i), причём индекс i равен набору блока, считая сверху вниз.

([2]) Множество контактов схемы Σ мы будем называть *сечением* этой схемы, если оно имеет общий контакт со всякой цепью схемы Σ.

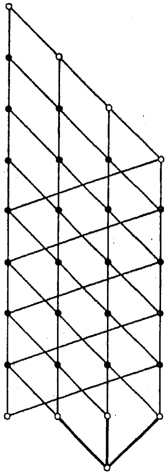

Рис. 2

Сечение ω_i проходит через контакты, соединяющие i-ю и $(i+1)$-ую цепи из вертикально расположенных контактов, а сечение $\overline{\omega}_i$ проходит через контакты, соединяющие вершины цепей $\overline{s}_i$ и $\overline{s}_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, d, d+1 \equiv \equiv 1 (\bmod d))$. Для схемы Σ_{12}^3 эти цепи и сечения показаны соответственно на рис. 3 и 4. Наборы соответствующих цепей и сечения являются проверяющими для контактов этих цепей и сечений. Согласно утверждению 1, эти наборы проверяют все неисправности схемы. Следовательно,

$$T_{\Pi}^{1,p}(\Sigma_n^d) \leqslant 2d, \quad T_{\Pi}^{1,3}(\Sigma_n^d) \leqslant 2d.$$

Например, для схемы Σ_{12}^3 следующие наборы проверяют все её неисправности.

для размыкания					для замыкания				
s_1	0 0 0	0 0 0	0 0 0 0	1	w_1	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 1
$\overline{s}_1$	1 1 1	1 1 1	1 1 1 1	1	$\overline{w}_1$	1 1 1	1 1 1	1 1 1	1 1 1
s_2	0 1 0	0 0 0	0 0 0 0	1	w_2	1 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
$\overline{s}_2$	1 0 1	1 1 1	1 1 1 1	1	$\overline{w}_2$	0 1 1	1 1 1	1 1 1	1 0 0
s_3	0 0 1	1 0 0	0 0 0 0	0	w_2	0 0 0	0 0 0	0 0 0	0 0 0
$\overline{s}_3$	1 1 0	0 1 1	1 1 1 1	0	$\overline{w}_2$	0 0 1	1 1 1	1 1 1	1 1 0

Нижние оценки следуют из теоремы 1

$$T_{\Pi}^{1,p}(\Sigma_n^d) \geqslant 2dn/\tilde{l} \gtrsim 2d, \quad T_{\Pi}^{1,3}(\Sigma_n^d) \geqslant 2dn/\tilde{b} \gtrsim 2d$$
$$(d > 2, \text{ при } d = 2, \tilde{b} = 2n).$$

Тем самым первая половина теоремы 2 доказана. Теперь докажем, что $T_{Д}^{1,p}(\Sigma_n^d) \lesssim d \log n$.

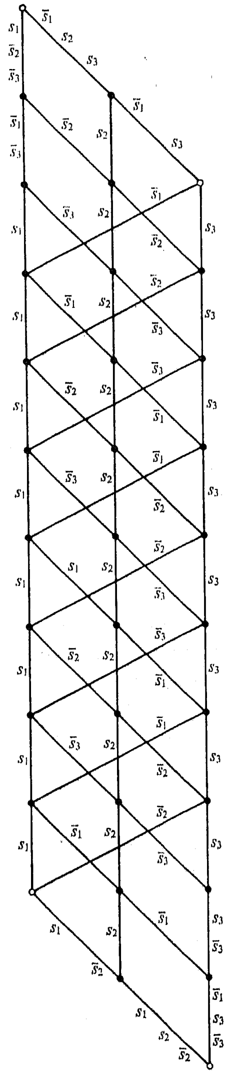

Рис. 3

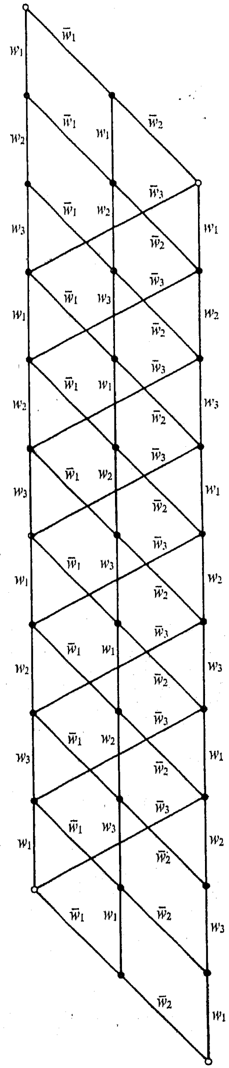

Рис. 4

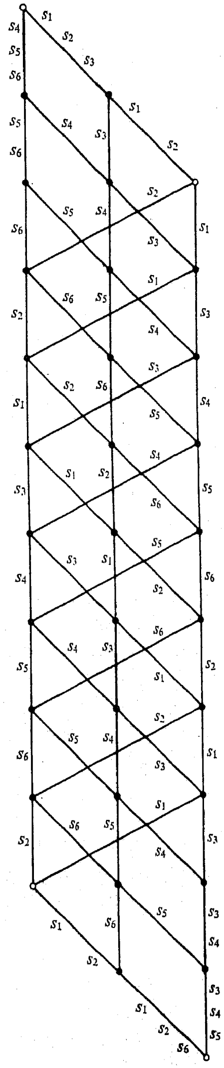

Рис. 5

Замечание. Используя утверждение 2 легко заметить, что для схемы, изображенной на рис. 6 можно построить диагностирующий тест размыкания, имеющий длину $[\log_2 2m]+1$ (здесь важно, что в схеме на рис. 6 цепь, реализующая набор α, проходит через контакт y_i и не проходит через контакт $\bar{y}_i$ либо наоборот).

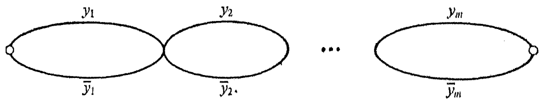

Рис. 6

Контакты схемы Σ_n^d разобьём на d частей (рис. 3). k-ая часть состоит из двух цепей s_k и $\bar{s}_k$. Отрезки цепи s_k (соответственно $\bar{s}_k$) между двумя соседними вершинами соприкосновения с цепью $\bar{s}_k$ (соответственно с цепью s_k), содержат ровно d контактов (кроме, быть может, первого и последнего отрезков). Заметим i-й отрезок цепи контактом y_i, а i-й отрезок цепи $\bar{s}_k$ контактом $\bar{y}_i$. Получим схему, изображенную на рис. 6, где $m = [n/d]$. Следовательно, мы можем построить тест, который отличает неисправности контактов в разных отрезках цепей и имеет длину не более, чем $[\log_2 2[n/d]]+1$, а для всех d частей длина теста меньше

(1) $$d([\log_2 2[n/d]]+1).$$

Покажем, что для того чтобы различить неисправности контактов внутри отрезков, достаточно взять не более $2d$ наборов. Рассмротим цепи в стандартных блоках (рис. 1), у которых вертикальные контакты чередуются с наклонными. Тогда, в силу утверждения 2, наборы, соответствующие этим цепям, вместе с наборами (1) образуют единичный диагностический тест размыкания. Например, для схемы Σ_{12}^3 такими цепями будут $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$, показанные на рис. 5. Таким образом,

(2) $$T_Д^{1,p}(\Sigma_n^d) \leqslant d \quad ([\log_2 2[n/d]+1]+2d).$$

Аналогично строится тест замыкания. Соответствующее разбиение схемы на части указано на рис. 4. Из (2) следует, что $T_Д^{1,p}(\Sigma_n^d) \lesssim d\log_2 n$.

В случае замыкания имеем:

$$T_Д^{1,3}(\Sigma_n^d) \lesssim d\log_2 n.$$

Теорема полностью доказана.

Пусть $T_Д(\sigma_n)$ — длина минимального теста для любой симметрической функции от n аргументов.

Следствие.

(3) $$T_Д^{1,p}(\sigma_n) \lesssim 4n, \quad T_Д^{1,3}(\sigma_n) \lesssim 4n.$$

Как известно (см. [1]), любую симметрическую функцию алгебры логики, зависящую от n переменных, можно представить как периодическую функцию с периодом $d = n+1$. Тогда, подставляя $d = n+1$ в (2), получим (3).

Литература

[1] О. Б. Лупанов, *К вопросу о реализации симметрических функций алгебры логики контактными схемами*, Сб. Порблемы кибернетики 15, 85–100, Наука, Москва 1965.

[2] [К. Э. Шеннон] C. E. Shannon, *A symbolic analysis of relay and switching circuits*, Trans. AIEE 57 (1938), 713–723 (русский перевод: сб. К. Шеннон, *Работы по теории информации и кибернетике*, ИЛ, 1963).

[3] Р. П. Тоноян, *О единичных тестах для контактных схем, реализующих линейные функции*, Изв. АП Арм. ССР, Математика, 6, 1 (1971), 61–66.

[4] [И. Томеску] I. Tomescu, *La construction des tests minimaux pour les fonctions bouleennes symetriques*, Calcolo 6, 1 (1969), 59–68.

[5] И. А. Чегис, С. В. Яблонский, *Логические способы контроля электрических схем*, Труды МИАН СССР 51, 270–362, Москва 1968.

Presented to the Semester
Discrete Mathematics
(February 15–June 16, 1977)