DISCRETE MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 7
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

КРИТЕРИЙ A-ПОЛНОТЫ ДЛЯ АВТОМАТОВ В ТЕРМИНАХ A-ПРЕДПОЛНЫХ КЛАССОВ

В. А. БУЕВИЧ

Вычислительный центр АН СССР, Москва, СССР

Рассматривается функциональная система P, элементами которой являются отображения, осуществляемые конечными автоматами — ограниченно-детерминированные функции (о.-д. функции), а операциями — операции суперпозиции и обратной связи. Система $\mathfrak{M}$ о.-д. функций называется *A-полной*, если для любой о.-д. функции и для всякого натурального $\tau > 0$ из о.-д. функций системы $\mathfrak{M}$ с помощью операций суперпозиции и обратной связи можно получить о.-д. функцию, совпадающую с заданной на словах длины τ. По аналогии с обычным определением предполного класса ([3], [4]) вводится понятие *A-предполного класса*; показывается, что критерий A-полноты может быть сформулирован в терминах A-предполных классов, причём число A-предполных классов счетно; кроме того, эффективно строится счетная система $\tilde{S}$ замкнутых в P множеств, среди которых содержатся все A-предполные классы, такая, что всякое множество о.-д. функций A-полно тогда и только тогда, когда оно не принадлежит целиком ни одному из множеств системы $\tilde{S}$.

1. Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ и I_k — множество всех бесконечных последовательностей, составленных из элементов E_k. Элемент α множества I_k будем обозначать через $(\alpha(1), \alpha(2), \ldots)$. Переменные, принимающие значения из множества I_k, будем обозначать символами x, y и z с индексами или без них. Всякую такую переменную (например, x) представим в виде $x = (x(1), x(2), \ldots)$. Под *ограниченно-детерминированной функцией* (о.-д. функцией) $T(x_1, \ldots, x_n) = y$ понимается отображение множества $\underbrace{I_k \times \ldots \times I_k}_{n \text{ раз}}$ в I_k, определяемое следующим рекуррентным соотношением

$$(1)\qquad \begin{aligned} q(1) &= q_0, \\ q(t+1) &= \Psi(x_1(t), \ldots, x_n(t), q(t)), \\ y(t) &= \Phi(x_1(t), \ldots, x_n(t), q(t)), \end{aligned}$$

где функция Ψ принимает значение из конечного алфавита $Q = \{q_0, \ldots, q_s\}$, элементы которого называются *состояниями* о.-д. *функции* T, а q_0 — её *начальным состоянием*.

О.-д. функция $T(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от переменной x_i, если существуют два набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ и $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i', \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in I_k$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\alpha_i' \in I_k$ такие, что

$$T(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq T(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i', \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Переменная x_i называется в этом случае *существенной*. Переменные, не являющиеся существенными, называются *фиктивными*. Будем всегда считать, что вместе со всякой о.-д. функцией задана и любая другая о.-д. функция, которая получается из исходной путём добавления и взъятия любого конечного числа фиктивных переменных. Множество о.-д. функций обозначим через P. Введем следующие операции над о.-д. функциями.

Операция А. Пусть имеем о.-д. функцию $T(x_1, \ldots, x_n)$ и некоторое множество переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$. По определению функция $T(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$ получена из о.-д. функции $T(x_1, \ldots, x_n)$ с помощью операции А.

Операция Б. Пусть имеем о.-д. функции $T_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $T_2(x_{n+1}, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{n+r})$. По определению о.-д. функция $T(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+r}) = T_2(x_{n+1}, \ldots, x_{i-1}, T_1(x_1, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_{n+r})$ получена из о.-д. функций T_1 и T_2 при помощи операции Б.

Будем говорить, что о.-д. функция $T(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ *со сдвигом зависит от переменной* x_i, если эту о.-д. функцию можно задать при помощи системы (1) такой, что функция Φ имеет вид:

$$\Phi(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_n(t), q(t)), \qquad t = 1, 2, \ldots$$

Операция В. Пусть имеем о.-д. функцию $T(x_1, \ldots, x_n)$, зависящую со сдвигом от переменной x_i. Пусть имеем набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ произвольных элементов из I_k. Используя его, систему (1) и определение зависимости со сдвигом, определим по индукции разряды некоторого нового элемента из I_k

$$\alpha_i = (\alpha_i(1), \alpha_i(2), \ldots)$$

следующим образом:

1. Пусть $c(1) = q_0$;

$$\alpha_i(1) = \Phi(\alpha_1(1), \ldots, \alpha_{i-1}(1), \alpha_{i+1}(1), \ldots, \alpha_n(1), c(1)).$$

2. Пусть определены значения $\alpha_i(t)$ и $c(t)$; определим значения $c(t+1)$ и $\alpha_i(t+1)$ так:

$$c(t+1) = \Psi(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_{i-1}(t), \alpha_i(t), \alpha_{i+1}(t), \ldots, \alpha_n(t), c(t)),$$
$$\alpha_i(t+1) = \Phi(\alpha_1(t+1), \ldots, \alpha_{i-1}(t+1), \alpha_{i+1}(t+1), \ldots, \alpha_n(t+1), c(t+1)).$$

Функция $T^{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ по определению получена из о.-д. функции $T(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ с помощью операции В, если для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ элементов из I_k имеет место

$$T^{x_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = T(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

Заметим, что операции А и Б совпадают с известными операциями суперпозиции, а операция В — суть сугубо „автоматная" операция — „обратная связь".

Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P$. Множество всех тех и только тех о.-д. функций, которые получаются из о.-д. функций множества $\mathfrak{M}$ с помощью применения конечного числа операций суперпозиции и обратной связи (А, Б и В) обозначим $[\mathfrak{M}]$ и назовем *замыканием* $\mathfrak{M}$ *относительно* А, Б и В. Множество $\mathfrak{M} \subseteq P$ называется *замкнутым*, если $[\mathfrak{M}] = \mathfrak{M}$. Множество $\mathfrak{M} \subseteq P$ *полно*, если $[\mathfrak{M}] = P$. О.-д. функции $T_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $T_2(x_1, \ldots, x_n)$ называется *τ-эквивалентными*, если для всякого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ элементов из I_k первые τ разрядов в последовательностях $T_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $T_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ совпадают. Множества $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ τ-эквивалентны ($\mathfrak{M}_1 \overset{\tau}{\sim} \mathfrak{M}_2$), если для всякой о.-д. функции $T_1 \in \mathfrak{M}_1$ в $\mathfrak{M}_2$ найдется τ-эквивалентная ей о.-д. функция и наоборот.

Множество $\mathfrak{M} \subseteq P$ называется *A-полным*, если для всякого $\tau \in N$ множества $[\mathfrak{M}]$ и P τ-эквивалентны.

Очевидно, любое полное множество является также и A-полным. Обратное, вообще говоря, неверно. Известно [3], что существуют конечные полные системы о.-д. функций. Следовательно существуют также конечные A-полные системы о.-д. функций. В [2] показано, что не существует алгоритма для распознавания полноты конечных систем о.-д. функций. То же самое относительно A-полноты установлено в [1]. Нашим вопросом являются вопрос о нахождении эффективных критериев полноты в терминах предполных классов. В [3] показано, что такого критерия не существует, т.к. число предполных классов равно континууму. В данной работе тот же вопрос изучается применительно к рассмотрению A-полноты систем о.-д. функций. Будет показано, например, что число A-предполных классов счетно.

2. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P$. Множество $]\mathfrak{M}[$ называется *замыканием множества* $\mathfrak{M}$ относительно операций суперпозиции (А и Б), ели оно содержит те и только те о.-д. функции, которые могут быть получены из о.-д. функций множества $\mathfrak{M}$ с помощью применения конечного числа операций А и Б. Множество $\mathfrak{M} \subseteq P$ называется *$\bar{A}$-полным*, если для всякого $\tau \in N$ множества $]\mathfrak{M}[$ и P τ-эквивалентны.

Покажем, что для любого $\tau \in N$ и для всякого $\mathfrak{M} \subseteq P$ множества $[\mathfrak{M}]$ и $]\mathfrak{M}[$ τ-эквивалентны и, следовательно, из A-полноты произвольного подмножества P будет следовать его $\bar{A}$-полнота и наоборот.

Лемма. I. *Пусть* о.-д. *функция* $T(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ *зависит со сдвигом от переменной* x_i. *Тогда* о.-д. *функция* $T^{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ *совпадает с* о.-д. *функцией* $T(x_1, \ldots, x_{i-1}, T^{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Доказательство. Из определения операции „обратная связь" (операции В) следует, что для любого набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \alpha_n)$ элементов из I_k существует единственный элемент $\alpha_i \in I_k$ такой, что $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = T^{x_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. Отсюда следует, что

$$T^{x_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, T^{x_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n), \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = T(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = T^{x_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n).$$

В силу произвольности набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ из последних равенств следует утверждение леммы и т.д.

Лемма II. *Пусть $T(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ — о.-д. функция, зависящая со сдвигом от переменной x_i. Тогда для всякого $\tau \in N$ о.-д. функция $T^{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ τ-эквивалентна о.-д. функции*

$$\underbrace{T\Big(x_1, \ldots, x_{i-1}, T\Big(x_1, \ldots, x_{i-1}, T(\ldots T(}_{\tau \text{ раз}}x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \ldots \Big)x_{i+1}, \ldots, x_n\Big), x_{i+1}, \ldots, x_n\Big).$$

Доказательство. Для доказательства леммы II заметим сначала, что если о.-д. функция $T(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ зависит со сдвигом от переменной x_i, то для всякого набора $(\alpha_1 \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ элементов из I_k τ-ый разряд последовательности $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ не зависит от τ-ого разряда последовательности α_i (здесь $\tau \in N$ произвольно). Доказательство утверждения леммы II будем вести по индукции.

Для $\tau = 1$ утверждение леммы справедливо в силу только что сделанного замечания.

Пусть для $\tau' = \tau - 1$ утверждение леммы справедливо по предположению.

Покажем, что оно справедливо также для $\tau' = \tau$. Рассмотрим произвольный набор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$. В силу предположения индукции последовательности

$$T^{x_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \quad \text{и}$$
$$\underbrace{T\Big(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, T\Big(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, T(\ldots T(}_{\tau-1 \text{ раз}}\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \ldots \Big), \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n\Big), \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n\Big)$$

совпадают в первых $\tau - 1$ разрядах. Учитывая замечание, сделанные в начале доказательства и утверждение леммы 1 получим, что последовательности $T^{x_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$, $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, T^{x_i}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ и $\underbrace{T\Big(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, T\Big(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, T(\ldots T(}_{\tau-1 \text{ раз}}\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \ldots \Big), \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n\Big), \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n\Big)$ совпадают в первых τ разрядах. Отсюда в силу произвольности набора $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ следует, что о.-д. функции $T^{x_i}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ и $\underbrace{T\Big(x_1, \ldots, x_{i-1}, T\Big(x_1, \ldots, x_{i-1}, T(\ldots T(}_{\tau-1 \text{ раз}}x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), \ldots \Big), x_{i+1}, \ldots, x_n\Big), x_{i+1}, \ldots, x_n\Big)$ τ-эквивалентны, что т.д.

Пусть $T(x_1, \ldots, x_{i_1}, \ldots, x_{i_2}, \ldots, x_{i_\varrho}, \ldots, x_n)$ о.-д. функция, зависящая со сдвигом от своих входных переменных $x_{i_1}, \ldots, x_{i_\varrho}$. Множество всех о.-д. функций

$$\{T^{x_{i_\sigma}}(x_1, \ldots, x_{i_1}, \ldots, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{\sigma-1}}, \ldots, x_{i_{\sigma+1}}, \ldots, x_{i_\varrho}, \ldots, x_n)\},$$

каждая из которых получима с помощью применения операции В к переменной x_{i_σ} о.-д. функции $T(x_1, \ldots, x_{i_1}, \ldots, x_{i_\sigma}, \ldots, x_{i_\varrho}, \ldots, x_n)$, где $1 \leqslant \sigma \leqslant \varrho$, обозначим B_T. Кроме того, пусть $B_{\mathfrak{M}} = \bigcup\limits_{T \in \mathfrak{M}} B_T$, если $\mathfrak{M} \subseteq P$. Заметим, что если множество переменных, от которых функция $T(x_1, \ldots, x_n)$ зависит со сдвигом пуст, то $B_T = \varnothing$.

Следствие из леммы II. *Для всякого $\mathfrak{M} \subseteq P$ и для любого $\tau \in N$ множества $]\mathfrak{M}[$ и $]\mathfrak{M}[\cup B_{]\mathfrak{M}[}$ τ-эквивалентны.*

Лемма III. *Для любого $\tau \in N$ из τ-эквивалентности произвольных множеств $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \subseteq P$ следует τ-эквивалентность множеств $]\mathfrak{M}[$ и $]\mathfrak{N}[$.*

Доказательство прямо следует из определений операций суперпозиции (операций А и Б) и τ-эквивалентности.

Лемма IV. *Для любого $\tau \in N$ и для произвольного $\mathfrak{M} \subseteq P$ множества $[\mathfrak{M}]$ и $]\mathfrak{M}[$ τ-эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2, \ldots$ последовательность подмножеств P такая, что $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ и для всякого $i \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ множество $\mathfrak{M}_{2i+1} =]\mathfrak{M}_{2i}[$, а множество $\mathfrak{M}_{2i+2} =]\mathfrak{M}_{2i+1}[\cup B_{]\mathfrak{M}_{2i+1}[}$. Очевидно, $[\mathfrak{M}] = \bigcup\limits_{s=0}^{\infty} \mathfrak{M}_s$.

Покажем по индукции, что для любого $j \in N$ множества $\mathfrak{M}_j$ и $]\mathfrak{M}[$ τ-эквивалентны.

Очевидно, отношение τ-эквивалентности, введенное на множестве всех подмножеств множества P рефлексивно и транзитивно. Поэтому в силу следствии из лемм II и III множества $\mathfrak{M}_1 =]\mathfrak{M}[$, $\mathfrak{M}_2 =]]\mathfrak{M}[[\cup B_{]]\mathfrak{M}[[} =]\mathfrak{M}[\cup B_{]\mathfrak{M}[}$ и $\mathfrak{M}_3 =]\mathfrak{M}_2[$ τ-эквивалентны $]\mathfrak{M}[$.

Пусть для $j' = j - 1$ множества $\mathfrak{M}_{j-1}$ и $]\mathfrak{M}[$ τ-эквивалентны. Тогда по лемме III $]\mathfrak{M}[=]]\mathfrak{M}[[$ τ-эквивалентно множеству $]\mathfrak{M}_{j-1}[$. Если $j-1$ четное, то по построению последовательности $\mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2, \ldots$, $\mathfrak{M}_j =]\mathfrak{M}_{j-1}[$ и, следовательно, $]\mathfrak{M}[$ τ-эквивалентно $\mathfrak{M}_j$. Если $j-1$ нечетное, то в силу следствия из леммы II множества $]\mathfrak{M}_{j-1}[$ и $\mathfrak{M}_j =]\mathfrak{M}_{j-1}[\cup B_{]\mathfrak{M}_{j-1}[}$ τ-эквивалентны. Таким образом, для всякого $j \in N$ множества $\mathfrak{M}_j =]\mathfrak{M}[$ τ-эквивалентны. Так как $[\mathfrak{M}] = \bigcup\limits_{s=0}^{\infty} \mathfrak{M}_s$ для всякой о.-д. функции $T \in [\mathfrak{M}]$ существует такое $s_T \in N$, что $T \in \mathfrak{M}_{s_T}$. В силу τ-эквивалентности множеств $]\mathfrak{M}[$ и $\mathfrak{M}_{s_T}$ найдется о.-д. функция $T' \in]\mathfrak{M}[$ τ-эквивалентная о.-д. функции T. С другой стороны, $]\mathfrak{M}[\subseteq [\mathfrak{M}]$. Отсюда следует, что множества $]\mathfrak{M}[$ и $[\mathfrak{M}]$ τ-эквивалентны, ч.т.д. Из утверждения леммы IV непосредственно следует

Теорема. I. *Из A-полноты произвольного множества $\mathfrak{M} \subseteq P$ следует его $\bar{A}$-полнота и наоборот.*

Теорема I даёт возможность сделать заключение о том, что операция „обратная связь'' (операция В) оказывается несущественной для A-полноты произвольной системы о.-д. функций.

3. Пусть I_k^τ где $\tau \in \{1, 2, \ldots\}$ — множество всех последовательностей длины τ, составленных из элементов E_k. Элементы множества I_k^τ будем представлять в виде:

$$\alpha = (\alpha(1), \ldots, \alpha(\tau)).$$

Нетрудно видеть, что отображение $\underbrace{I_k \times \ldots \times I_k}_{n \text{ раз}}$ в I_k, задаваемое о.-д. функцей $T(x_1, \ldots, x_n)$, для всякого $\tau \in \{0, 1, \ldots\}$ однозначно определяет некоторое отображение $\underbrace{I_k^\tau \times \ldots \times I_k^\tau}_{n \text{ раз}}$ в I_k^τ. Функцию, осуществляющую это отображение обозначим $T_\tau(x_1 . \ldots, x_n)$.

Пусть $\tau \in N$. Рассмотрим функцию Ψ^τ, отображающую множество I_k^τ в множество $E_{k^\tau} = \{0, 1, \ldots, \kappa^\tau - 1\}$, такую, что $\Psi^\tau(\alpha) = \beta$, если $\alpha = (\alpha(1), \ldots, \alpha(\tau))$ суть k-ичное разложение числа $\beta \in E_{k^\tau}$.

Пусть $\bar{\Psi}^\tau$ функция, обратная к функции Ψ^τ. Всякей о.-д. функции $T(x_1, \ldots, x_n) \in P$ поставим в соответствие функцию k^τ-значной логики $T^\tau(u_1, \ldots, u_n)$, отображающую множество $\underbrace{E_{k^\tau} \times \ldots \times E_{k^\tau}}_{n \text{ раз}}$ в E_{k^τ} такую, что для всякого набора $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \underbrace{E_{k^\tau} \times \ldots \times E_{k^\tau}}_{n \text{ раз}}$ $T^\tau(\gamma_1 . \ldots, \gamma_n) = \Psi^\tau(T_\tau(\bar{\Psi}(\gamma_1), \ldots, \bar{\Psi}^\tau(\gamma_n))$ (здесь $u_1, \ldots, u_n$ метаобозначения переменных, принимающих значения на множестве E_{k^τ}, [4].

Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P$. Через $\mathfrak{M}^\tau$ обозначим множество тех и только тех функций k^τ-значной логики, что для всякой о.-д. функции $T \in \mathfrak{M}$ функции $T^\tau \in \mathfrak{M}^\tau$.

На множестве P^τ можно обычным образом ввести операции суперпозиции (операции А и Б), понятия замыкания, замкнутого множества, полноты произвольной системы функций из P^τ и т.п. [4].

Заметим, что если о.-д. функция T получена из о.-д. функций $T_1, \ldots, T_p$ с помощью операций суперпозиции и „обратной связи'', то функция T^τ может быть получена из функций $T_1^\tau, \ldots, T_p^\tau$ с помощью одной только суперпозиции (Теорема I). Отсюда, в частности, следует, что если множество $\mathfrak{M} \subseteq P$ замкнуто, то множество $\mathfrak{M}^\tau$ также замкнуто. Поэтому множество P^τ замкнуто подмножество в P_{k^τ}.

Легко видеть, что в замкнутом множестве $P_\tau \subseteq P_{k^\tau}$ существует конечная полная система. В качестве такой можно взять, например, систему $\{T^{*\tau}, T^{**\tau}\}$, где T^* — „задержка'' и T^{**} — „функция Шеффера'' [3].

Замкнутое множество $\mathfrak{N}^\tau \subset P^\tau$ назовем *предполным классом в* P^τ, если для всякой функции $T^\tau \notin \mathfrak{N}^\tau$ $[\{\{T^\tau\} \cup \mathfrak{N}^\tau\}] = P^\tau$. С. В. Яблонским [4] показано, что критерий полноты для всякого замкнутого класса функций k-значной логики, в котором существует конечная полная система, может быть сформулирована в терминах предполных классов. Из результатов С. В. Яблонского [4] следует

Лемма. *Пусть $\tau \in N$. Любое замкнутое подмножество $\mathfrak{M}^\tau \subset P^\tau$, не являющееся предполным классом, может быть расширено до предполного класса в P^τ.*

Теорема. *Пусть $\tau \in N$. Система функций $\mathfrak{M}^\tau \subset P^\tau$ полна в P^τ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}^\tau$ не принадлежит целиком ни одному из предполных классов в P^τ, причём число предполных классов в P^τ конечно.*

Пусть $\tau \in N$. Через $\mathfrak{N}^{\tau_1}, \ldots, \mathfrak{N}^{\tau_{s_\tau}}$ обозначим совокупность предполных классов в замкнутом множестве P^τ. Кроме того, через $P(\mathfrak{M}^\tau)$, где $\mathfrak{M}^\tau \subset P^\tau$ обозначим подмножество P такое, что для всякой о.-д. функции $T \in P(\mathfrak{M}^\tau)$ функции $T^\tau \in \mathfrak{M}^\tau$ и для любой о.-д. функции $T_1 \notin P(\mathfrak{M}^\tau)$ функция $T_1^\tau \notin \mathfrak{M}^\tau$. Пусть также для всякого $\tau \in NP(P^\tau) = P$. Назовем замкнутое множество $\mathfrak{N} \subset P$ *A-предполным классом*, если $\mathfrak{N}$ не является A-полным, но для всякой о.-д. функции $T \in \mathfrak{N}$ множество $\{\mathfrak{N} \cup \{T\}\}$ A-полно.

Лемма I. *Для всякого $\tau \in N$ и $1 \leqslant j \leqslant s_\tau$ множество $P(\mathfrak{N}^{\tau j})$ является A-предполным классом.*

Доказательство. Пусть о.-д. функция $T \notin P(\mathfrak{N}^{\tau j})$. Тогда функция $T^\tau \in \mathfrak{N}^{\tau j}$. В силу того, что $\mathfrak{N}^{\tau j}$ предполный класс в P^τ в $[\{\mathfrak{N}^{\tau j} \cup \{T^\tau\}]$ содержаться функции $T^{*\tau}$ и $T^{**\tau}$. Следовательно, в $[\{\{T\} \cup P(\mathfrak{N}^{\tau j})\}]$ содержаться о.-д. функции T_1 и T_2 такие, что функции T_1^τ и T_2^τ совпадают соответственно с функциями $T^{*\tau}$ и $T^{**\tau}$. Рассмотрим о.-д. функцию $T_3(x_1, x_2) = y$ такую, что $y(t) = x_1(t)$, если $1 \leqslant t \leqslant \tau$ и $y(t) = x_2(t)$, если $t > \tau$. Очевидно, $T_3 \in P(\mathfrak{N}^{\tau j})$. Кроме того, множеству $P(\mathfrak{N}^{\tau j})$ принадлежат о.-д. функции $T_4(x)$ и $T_5(x_1, x_2)$ такие, что для всякого $\alpha \in I_k$ и любого набора (α_1, α_2) элементов из I_k все разряды последовательностей $T_4(\alpha)$ и $T_5(\alpha_1, \alpha_2)$ начиная с $\tau+1$-ого совпадают с соответствующими разрядами последовательностей $T^*(\alpha)$ и $T^{**}(\alpha_1, \alpha_2)$. Рассмотрим о.-д. функции $T_6(x) = T_3(T_1(x), T_4(x))$ и $T_7(x_1, x_2) = T_3(T_2(x_1, x_2), T_5(x_1, x_2))$. Очевидно, о.-д. функция T^* совпадает с о.-д. функцией T_6, о.-д. функция T_7 совпадает с о.-д. функцией T^{**}, т.е. $\{T^*, T^{**}\} \subset [\{\{T\} \cup P(\mathfrak{N}^{\tau j})\}]$, и множество $\{\{T\} \cup P(\mathfrak{N}^{\tau j})\}$ A-полно. В силу произвольности о.-д. функции T отсюда следует A-предполнота множества $P(\mathfrak{N}^{\tau j})$, ч.т.д.

Лемма II. *Пусть $\mathfrak{N}$ A-предполный класс в P. Тогда существует такое $\tau(\mathfrak{N}) \in N$, что для любого $\tau \geqslant \tau(\mathfrak{N})$ $\mathfrak{N}^\tau$ — предполный класс в P^τ и $P(\mathfrak{N}^\tau) = \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность множеств $\mathfrak{N}^1, \mathfrak{N}^2, \mathfrak{N}^3, \ldots$. Если для всякого $\tau \in N$ $\mathfrak{N}^\tau$ полно в P^τ, то множество $\mathfrak{N}$, очевидно, является A-полным. Поэтому существует такое $\tau(\mathfrak{N}) \in N$, что для всякого $\tau < \tau(\mathfrak{N})$, если $\tau(\mathfrak{N}) > 1$, $\mathfrak{N}^\tau$ полно в P^τ, а множество $\mathfrak{N}^{\tau(\mathfrak{N})}$ не полно в $P^{\tau(\mathfrak{N})}$. В таком случае, для любого $\tau' \geqslant \tau(\mathfrak{N})$, множество $\mathfrak{N}^{\tau'}$ должно быть предполным в $P^{\tau'}$. Действительно, если для некоторого $\tau_1 \geqslant \tau(\mathfrak{N})$ множество $\mathfrak{N}^{\tau_1}$ отлично от предполного в P^{τ_1}, то существует о.-д. функция $T \notin \mathfrak{N}$ такая, что множество $\{\mathfrak{N}^{\tau_1} \cup \{T^{\tau_1}\}\}$ не полно в P^{τ_1} и, следовательно, множество о.-д. функций

$\{\mathfrak{N}\cup\{T\}\}$ не является A-полным, что противоречит A-предполноте множества $\mathfrak{N}$. Поэтому для всякого $\tau' \geqslant \tau(\mathfrak{N})$ $P(\mathfrak{N}^{\tau'})$ A-предполный класс, и, очевидно, $P(\mathfrak{N}^{\tau'}) = \mathfrak{N}$.

Лемма III. *Всякое замкнутое множество в P, не являющееся A-предполным, может быть расширено до A-предполного класса.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq P$ замкнутое множество, не являющееся A-предполным. Тогда существует такое $\tau(\mathfrak{M}) \in N$, что замкнутое множество $\mathfrak{M}^{\tau(\mathfrak{M})}$ не является предполным классом в $P^{\tau(\mathfrak{M})}$. Тогда по лемме из [4] множество $\mathfrak{M}^{\tau(\mathfrak{M})}$ может быть расширено до предполного в $P^{\tau(\mathfrak{M})}$ класса $\mathfrak{N}^{\tau_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant s_\tau)$. Ясно, что $\mathfrak{M} \subset P(\mathfrak{N}^{\tau_j})$. Однако по лемме I $P(\mathfrak{N}^{\tau_j})$ A-предполный класс.

Лемма IV. *Для всякого $\tau \in N$ и $\tau > 1$ существует A-предполный класс $\mathfrak{N}_{(\tau)}$ такой, что для любого $\tau' \leqslant \tau$ множество $\mathfrak{N}^{\tau'}_{(\tau)}$ полно в P^{τ}, а множество $\mathfrak{N}^{\tau+1}_{(\tau)}$ является предполным классом в $P^{\tau+1}$. Если $\tau = 1$, то $\mathfrak{N}^{1}_{(1)}$ является предполным в P^1.*

Доказательство. Рассмотрим множество $\mathfrak{M}_\tau$ $(\tau \geqslant 0)$ тех и только тех о.-д. функций, что для любого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ где $\alpha_i = (\alpha_i(1), \dots, \alpha_i(\tau), 0)$, $1 \leqslant i \leqslant n$ $\tau+1$-ый разряд последовательности $T(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ равен нулю, если $T(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{M}_\tau$. Очевидно, множество о.-д. функций $\mathfrak{M}_\tau$ замкнуто и не является A-полным. Кроме того, для всякого $\tau' \leqslant \tau$ множество $\mathfrak{M}^{\tau'}_{\tau_i}$ полно в $P^{\tau'}$, а множество $\mathfrak{M}^{\tau+1}_{\tau}$ не является полным в $P^{\tau+1}$. Согласно лемме из [4] множество $\mathfrak{M}^{\tau+1}_{\tau}$ может быть расширено до некоторого предполного в $P^{\tau+1}$ класса $\mathfrak{N}^{(\tau+1)_j}$, где $1 \leqslant j \leqslant s_{\tau+1}$. Рассмотрим A-предполный класс $P(\mathfrak{N}^{(\tau+1)_j})$. Очевидно, класс $P(\mathfrak{N}^{(\tau+1)_j})$ удовлетворяет условиям леммы, ч.т.д.

Теорема II. *Для того, чтобы система* о.-д. *функций была A-полна, необходимо и достаточно, чтобы она не принадлежала ни одному из A-предполных классов, причём число A-предполных классов счетно.*

Доказательство. 1. *Необходимость* следует из того, что каждый A-предполный класс не является A-полным.

2. *Достаточность.* Пусть система о.-д. функций $\mathfrak{M}$ не содержится ни в одном из A-предполных классов. Тогда $[\mathfrak{M}]$ должно быть A-полным, т.к. в противном случае, по лемме III, $[\mathfrak{M}]$ может быть расширено до A-предполного класса.

3. Из лемм I и II следует, что множество всех A-предполных классов суть множество

$$S = \{P(\mathfrak{N}^{1_1}), \dots, P(\mathfrak{N}^{1_{s_1}}), P(\mathfrak{N}^{2_1}), \dots, P(\mathfrak{N}^{2_{s_2}}), \dots, P(\mathfrak{N}^{\tau_1}), \dots, P(\mathfrak{N}^{\tau_{s_\tau}}), \dots\}.$$

Ясно, что мощность множества s счетна (лемма IV).

Пусть $\tau \in N$ и $P^{\tau,2}$ множество всех функций из P^τ, зависящих не более чем от двух переменных. В силу того, что в $P^{\tau,2}$ содержатся функции $T^{*\tau}$ и $T^{**\tau}$ замыкание множества $P^{\tau,2}$ совпадает с множеством P^τ. Рассмотрим систему $\{\mathfrak{M}^{\tau_1,2}, \dots, \mathfrak{M}^{\tau_{p_\tau},2}\}$ таких подмножеств из $P^{\tau,2}$, которые сохраняют

самих себя [4]. Заметим, что существует эффективная процедура построения совокупности множеств $\mathfrak{M}^{\tau_1,2}, \dots, \mathfrak{M}^{\tau_{p_\tau},2}$. Пусть $\mathfrak{M}^{\tau_j}$, где $1 \leqslant j \leqslant P_\tau$, множество таких функций из P^τ, которые сохраняют множество $\mathfrak{M}^{\tau_j,2}$. Т.к. каждое из множеств $\mathfrak{M}^{\tau_j,2}$ $(1 \leqslant j \leqslant p_\tau)$ строится эффективно, существует алгоритм для распознавания принадлежности произвольной функции из P^τ множеству $\mathfrak{M}^{\tau_j}$. Ясно, что все предполные в P^τ классы содержатся среди множеств $\mathfrak{M}^{\tau_1}, \dots, \mathfrak{M}^{\tau_{p_\tau}}$. Однако, вообще говоря, среди этих множеств содержатся и такие, которые отличны от предполных. Таким образом, возникает задача о выделении из множеств системы $\mathfrak{M}^{\tau_1}, \dots, \mathfrak{M}^{\tau_{p_\tau}}$ предполных классов в P^τ. Легко видеть, что число всех функций из P^τ, зависящих не более чем от двух переменных, не превосходит $k^{\tau\cdot k^{2\tau}}$ [4], т.е. $|P^{\tau,2}| \leqslant \leqslant k^{\tau\cdot k^{2\tau}}$. Для всякого $1 \leqslant j \leqslant p_\tau$ рассмотрим множество $S(\mathfrak{M}^{\tau_j})$ всех функций из $\mathfrak{M}_j$ зависящих не более чем от $k^{\tau\cdot k^{2\tau}}$ переменных. Нетрудно убедится в справедливости следующих предложений:

1. Множества $S(\mathfrak{M}^{\tau_j})$ конечны, $j = 1, \dots, P_\tau$.

2. Функция T^τ принадлежит множеству $\mathfrak{M}^{\tau_j}$ тогда и только тогда, когда либо T^τ принадлежит $S(\mathfrak{M}^{\tau_j})$, либо в $S(\mathfrak{M}^{\tau_j})$ существует функция T^τ_1, которая может быть получена из о.-д. функции T^τ при помощи операции A (отождествление переменных), $j = 1, 2, \dots, p_\tau$.

3. $\mathfrak{M}^{\tau_j} \subseteq \mathfrak{M}^{\tau_i}$ тогда и только тогда, когда $S(\mathfrak{M}^{\tau_j}) \subseteq S(\mathfrak{M}^{\tau_i})$, $i, j = 1, 2, \dots, p_\tau$.

Теорема III. *Число A-пребполных классов счётно, причём множество всех A-предполных классов строится эффективно.*

Замечание I. Покажем, что для всякого $\tau \in N$ и $\tau > 1$ замкнутый класс $P^\tau \subset P_{k^\tau}$ получается в результате пересечения τ замкнутых классов из P_{k^τ}, каждый из которых сохраняет некоторое разбиение множества E_{k^τ} [4].

Рассмотрим следующую систему подразбиений множества на непересекающиеся подмножества:

$$\pi_1:\ E_{k^\tau} = E^0\cup E^1\cup \dots \cup E^{k-1},$$

$$\pi_2:\ E_{k^\tau} = E^{00}\cup \dots \cup E^{0k-1}\cup E^{10}\cup \dots \cup E^{1k-1}\cup \dots \cup E^{k-10}\cup \dots \cup E^{k-1k-1},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pi_j:\ E_{k^\tau} = E^{\overbrace{0\dots0}^{}_{j\ \text{раз}}}\cup \dots \cup E^{\overbrace{0\dots0}^{}_{j-1\ \text{раз}}k-1}\cup \dots \cup E^{\overbrace{k-1\dots k-1}^{}_{j-1\ \text{раз}}0}\cup \dots \cup E^{\overbrace{k-1\dots k-1}^{}_{j\ \text{раз}}},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\pi_\tau:\ E_{k^\tau} = E^{\overbrace{0\dots0}^{}_{\tau\ \text{раз}}}\cup \dots \cup E^{\overbrace{0\dots0}^{}_{\tau-1\ \text{раз}}k-1}\cup \dots \cup E^{\overbrace{k-1\dots k-1}^{}_{\tau-1\ \text{раз}}0}\cup \dots \cup E^{\overbrace{k-1\dots k-1}^{}_{\tau\ \text{раз}}}.$$

Каждый класс E^i разбиения π_1 содержит те и только те элементы множества E_{k^τ}, в первом разряде k-ичного разложения которых стоит i $(0 \leqslant i \leqslant \leqslant k-1)$.

Разбиение π_2 является подразбиением разбиения π_1, причём класс E^{ij} разбиения π_2 содержит те и только те элементы множества E_{k^τ}, в первом разряде k-ичного разложения которых состоит i, а во втором j $(0 \leqslant i, j \leqslant k-1)$. Аналогично, класс $E^{i_1 \dots i_t}$ разбиения π_t $(1 \leqslant t < \tau)$ содержит те и только те элементы множества E_{k^τ} в 1-ом, 2-ом, ..., t-ом разрядах k-ичного разложения которых стоят соответственно числа $i_1, \dots, i_t$ и разбиение π_t является подразбиением разбиения π_{t-1}.

Наконец, каждый класс $E^{j_1 \dots j_\tau}$ разбиения π_t состоит в точности из одного элемента $e_{j_1} \dots e_{j_\tau}$ множества E_{k^τ} такого, что k^τ-ичное его разложение суть $(j_1, \dots, j_\tau)$.

Пусть $P_{k^\tau}(\pi_t)$, где $1 \leqslant t \leqslant \tau$, множество всех функций k^τ-значной логики, сохраняющих разбиение π_t [4]. Покажем, что $P^\tau = \bigcap_{t=1}^{\tau} P_{k^\tau}(\pi_t)$.

Действительно, пусьт $T(x_1, \dots, x_n) \in P$. В силу детерминированности о.-д. функций для всякого t $(1 \leqslant t \leqslant \tau)$ и для любых наборов $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\alpha_1', \dots, \alpha_n')$, составленных из элементов I_{k^τ}, и таких, что первые t разрядов в последовательностях α_i и α_i' $(1 \leqslant i \leqslant n)$ совпадает, совпадают также первые t разрядов в последовательностях $T(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $T(\alpha_1', \dots, \alpha_n')$.

Однако для любой пары $\alpha_i \alpha_i' \in I_k^\tau$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ $\Psi^\tau(\alpha_i)$ и $\Psi^\tau(\alpha_i')$ принадлежит одному и тому же классу разбиения π_t. Одному и тому же классу разбиения π_t принадлежат также $\Psi^\tau(T(\alpha_1, \dots, \alpha_n))$ и $\Psi^\tau(T(\alpha_1', \dots, \alpha_n'))$. Поэтому функции $T^\tau \in P$ сохраняют разбиение π_t.

С другой стороны, для всякого t $(1 \leqslant t \leqslant \tau)$ разобъём множество I_k на классы π_t' следующим образом:

Два элемента $\alpha, \alpha' \in I_k$ принадлежат одному и тому же классу разбиения π_t', если $\alpha(1) = \alpha'(1), \dots, \alpha(t) = \alpha'(t)$. Между классами разбиения π_t и π_t' установим естественное взаимооднозначное соответствие. Очевидно, всякой функции k-значной логики f, сохраняющей разбиения $\pi_1, \dots, \pi_\tau$ в силу детерминированности о.-д. функций однозначно ставится в соответствие множество $\mathfrak{M}_f$ о.-д. функций таких, что для любой о.-д. функции $T \in \mathfrak{M}_f T^\tau$ совпадает с f.

Замечание II. Теоремы, аналогичные Теоремам I, II, III справедливы для некоторых модификаций системы P. По-видимому, наиболее естественно рассматривать следующие из таких модификации:

1. Множество $\mathfrak{M} \subseteq P$ назовем *A_n'-полным*, если для всякого фиксированного $n \in \{1, 2, \dots\}$, для всякого натурального $\tau > 0$ и для всякого набора $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ элементов из I_k для всякой о.-д. функции $T(x_1, \dots, x_n) \in P$ в $[\mathfrak{M}]$ найдется о.-д. функция $T'(x_1, \dots, x_n)$ такая что в последовательностях $T(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ и $T'(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ первые τ разрядов соответственно совпадают.

2. *A'-полнота* определяется так же, как и A_n'-полнота за исключением того, что длина набора (число n) не фиксируется.

Автор выражает глубокую признательность В. Б. Кудрявцеву за обсуждение этой работы и множество полезных советов.

Литература

[1] В. А. Буевич, *Об алгоритмической неразрешимости распознавания А-полноты для ограниченно-детерминированных функций*, Математические заметки 11 (1972), 687–697.

[2] М. И. Кратко, *Алгоритмическая неразрешимость распознавания полноты для конечных автоматов*, ДАН СССР 155, 1 (1964).

[3] В. Б. Кудрявцев, *О мощности множеств, предполных множеств, некоторых функциональных систем, связанных с автоматами*, Сб. Проблемы кибернетики 13 (1965), 45–75, Москва.

[4] С. В. Яблонский, *Функциональные построения в k-значной логике*, Труды МИАН 1 (1958), 5–142.

Presented to the Semester
Discrete Mathematics
(February 15–June 16, 1977)