DISCRETE MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 7
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

КОНЕЧНОАВТОМАТНАЯ СЛОЖНОСТЬ ПОРОЖДАЮЩИХ СХЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

ДАНГ ЗУЙ РУАН
Ханойский Университет, Ханой, Демократическая Республика Вьетнам

При помощи операции дополнения можно строить последовательность регулярных множеств, распознающие автоматы для которых требуют достаточно большого числа состояний [1]. В этой работе рассматривается вопрос об оценке числа состояний конечных автоматов, распознающих регулярные множества слов, определяемые некоторыми порождающими схемами, не содержащих дуг дополнения.

Пусть $L = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ — некоторый алфавит. *Порождающим графом* (П.Г.) в алфавите L называется такой ориентированный граф ([2]), на котором одна выделенная вершина называется *входной вершиной*, выделено непустое подмножество вершин, которые называются *выходными вершинами*; и каждой дуге приписано некоторое множество слов в L. Такой граф обозначим через Γ, множество всех его вершин — $A(\Gamma)$, множество выходных вершин — $B(\Gamma)$, и его входную вершину — δ_Γ.

Пусть дуга a принадлежит графу Γ. Тогда множество слов, соответствующее ей, обозначим $M_\Gamma(a)$.

Пусть $P = a_1 a_2 \ldots a_n$ $(n \geqslant 1)$ некоторый маршрут в графе Γ и слово $Q = T_1 T_2 \ldots T_n$ такое, что $T_i \in M_\Gamma(a_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Тогда мы будем говорить, что маршрут P *порождает* слово Q.

Через $N_\Gamma(\alpha, \beta)$ обозначается множество всех слов, каждое из которых порождается некоторым марштрутом, начинающимся вершиной α и кончающимся вершиной β. Множество $\bigcup_{\beta \in B(\Gamma)} N_\Gamma(\alpha, \beta)$ обозначается $\mathscr{S}_\Gamma(\alpha)$. Будем говорить, что множество $\mathscr{S}_\Gamma(\delta_\Gamma)$ *определяется графом* Γ и обозначим через $N(\Gamma)$.

Порождающей схемой (П.С.) в алфавите L называется последовательность П.Г. в L

$$\Sigma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n),$$

для которой задана функция m_Σ, определенная на множестве дуг всех графов и удовлетворяющая следуюшим условиям:

(A) Для любой дуги a П.Г. Γ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ выполняется одно из пяти условий:

(1) $$m_\Sigma(a) = \Lambda \quad \text{и} \quad M_{\Gamma_i}(a) = \{\Lambda\}$$

(и тогда дуга a называется *пустой*);

(2) $$m_\Sigma(a) = x \ (x \in L) \quad \text{и} \quad M_{\Gamma_i}(a) = \{x\}$$

(и говорим, что на дуге a *написана* буква x и a называется *существенной*);

(3) $$m_\Sigma(a) = \Gamma_j \ (1 \leqslant j < i) \quad \text{и} \quad M_{\Gamma_i}(a) = CN(\Gamma_j)$$

(и тогда говорим, что дуга *a зависит от графа* Γ_j и является *дугой дополнения*);

(4) $$m_\Sigma(a) = (\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \ldots, \Gamma_{j_s}), \quad 1 \leqslant j_1, j_2, \ldots, j_s < i, \ s > 1$$
$$\text{и} \quad M_{\Gamma_i}(a) = \bigcap_{t=1}^{s} N(\Gamma_{j_t})$$

(и тогда говорим, что дуга a *зависит от каждого из графов* $\Gamma_{j_1}, \Gamma_{j_2}, \ldots, \Gamma_{j_s}$ и назовём её *дугой пересечения*);

(5) $$m_\Sigma(a) = \Gamma_t \ (1 \leqslant t < i) \quad \text{и}$$
$$M_{\Gamma_i}(a) = \{X \mid \exists Y\, (Y \in N(\Gamma_t) \ \& \ X \text{ есть начальная половина } Y)\}$$

(и тогда говорим, что дуга *a зависит от графа* Γ_t и является *дугой взятия начальной половины* (в.Н.П.)).

(B) От каждого из графов $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{n-1}$ зависит одна и только одна дуга.

(C) Графы $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ не имеют между собой общих вершин.

Говорим, что множество слов $N(\Gamma_n)$ *определяется* П.С. Σ, обозначаем его также через $N(\Sigma)$. Вершина α П.С. Γ называется *существенной*, если входит в её хотя бы одна существенная дуга. Число существенных вершин П.С. Γ обозначаем через $|\Gamma|$. Число существенных вершин всех П.Г. П.С. Σ обозначаем через $|\Sigma|$.

Говорим, что граф Γ_i *зависит от графа* Γ_j, если он содержит некоторую дугу, которая зависит от графа Γ_j, или зависит от другого графа, содержащего дугу, зависящую от графа Γ_j.

Наименьшее возможное число состояний детерминированного автомата ([2]), распознающего множество $N(\Sigma)$, назовём *конечноавтоматной сложностью* П.С. Σ и обозначим $G(\Sigma)$.

Для любой П.С. Σ не содержащей дуг дополнения определим её *глубину вложенности знаков взятия начальной половины* $l(\Sigma)$ следующим образом:

Пусть a — любая дуга П.Г. Γ. Тогда её глубину вложенности знаков взятия начальной половины обозначаем через $l(a)$; полагаем

$$l(\Gamma) = \max_{a \in \Gamma} \{l(a)\},$$

где $l(a)$ определяется индуктивно следующим образом:

(1) Если a — некоторая дуга взятия начальной половины зависящая от графа Γ' и $l(\Gamma')$ уже определена, тогда

$$l(a) = l(\Gamma')+1;$$

(2) Если a — дуга пересечения, зависящая от графа $\Gamma_{e,1}, \Gamma_{e,2}, \ldots, \Gamma_{e,s}$ и $l(\Gamma_{e,t})$ $(1 \leqslant t \leqslant s)$ уже определены, тогда

$$l(a) = \max_{1 \leqslant t \leqslant s} \{l(\Gamma_{e,t})\};$$

(3) В остальных случаях

$$l(a) = 0.$$

Эта работа посвящена верхней оценке функции $G(\Sigma)$, именно, имеет место следующая

Теорема. *Для любой* П.С. Σ, *не содержащей ни одной дуги дополнения, имеем*

$$G(\Sigma) \leqslant 2^{3|\Sigma| \cdot 3^{l(\Sigma)-1}}+1.$$

Доказательство этой теоремы основано на следующих леммах:

Лемма 1. *Для любых простых* П.С. $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$ *можно построить такую простую* П.С. Σ, *что*

$$N(\Sigma) = \bigcap_{i=1}^{s} N(\Sigma_i) \quad \text{и} \quad |\Sigma| \leqslant \prod_{i=1}^{s} |\Sigma_i|.$$

Пусть a — некоторая дуга. Тогда обозначаем его начало через $H(a)$ и его конец через $K(a)$. Схема Σ строится следующим образом:

(а) *Вершины* Σ:

$$A(\Sigma) = A(\Sigma_1) \times A(\Sigma_2) \times \ldots \times A(\Sigma_s).$$

Множество выходных вершин $B(\Sigma)$:

$$B(\Sigma) = B(\Sigma_1) \times B(\Sigma_2) \times \ldots \times B(\Sigma_s).$$

Входная вершина:

$$\delta_\Sigma = (\delta_{\Sigma_1}, \delta_{\Sigma_2}, \ldots, \delta_{\Sigma_s}).$$

(б) *Дуги схемы* Σ.

(б$_1$) Для любого набора дуг $a_1 \in \Sigma_1, a_2 \in \Sigma_2, \ldots, a_s \in \Sigma_s$, такого что

$$m_{\Sigma_1}(a_1) = m_{\Sigma_2}(a_2) = \ldots = m_{\Sigma_s}(a_s) = x, \quad \text{где} \quad x \in L.$$

Строится дуга a, для которой

$$H(a) = (H(a_1), H(a_2), \ldots, H(a_s)) \quad \text{и} \quad K(a) = (K(a_1), K(a_2), \ldots, K(a_s))$$

и берётся

$$m_\Sigma(a) = x.$$

($б_2$) Для любого набора пар вершин

$$\alpha_1,\ \beta_1 \in \Sigma_1,$$
$$\alpha_2,\ \beta_2 \in \Sigma_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_s,\ \beta_s \in \Sigma_s,$$

такого что для любого i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ имеем

$$\Lambda \in N_{\Sigma_i}(\alpha_i, \beta_i).$$

Строится дуга a, для которой

$$H(a) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s) \quad \text{и} \quad K(a) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$$

и берётся

$$m_\Sigma(a) = \Lambda.$$

Так как $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s)$ существенная, существует хотя бы одна существенная дуга a, такая что $K(a) = \alpha$. Тогда дуга a может быть получена только по пункту ($б_1$). Следовательно, для каждого $j\,(1 \leqslant j \leqslant s)$ дуга a_j существенная и $K(a_j) = \alpha_j$, поэтому α_j — существенная.

Из предыдущего следует, что число существенных вершин схемы Σ не может превосходить числа элементов декартова произведения множеств существенных вершин схем $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_s$.

Пусть X — некоторое слово. Обозначаем его длину через $|X|$.

Лемма 2. *Для любой простой* П.С. Σ *можно построить схему* Σ', *такую что*

$$|\Sigma'| \leqslant |\Sigma| \quad \text{и} \quad N(\Sigma') = \{X \mid X \in L^* \mathbin{\&} \exists Y\big(Y \in N(\Sigma) \mathbin{\&} |X| = |Y|\big)\}.$$

Дуга, на которой написана буква ξ и направленная от вершины α к вершине β, обозначается $\overrightarrow{\alpha\xi\beta}$. Для любой пары вершин α, β П.С. Σ выбрасываем все дуги $\overrightarrow{\alpha\xi\beta}$ и вместо их вводим n дуг $\overrightarrow{\alpha\xi_1\beta}, \overrightarrow{\alpha\xi_2\beta}, \ldots, \overrightarrow{\alpha\xi_n\beta}$. Вершина δ_Σ служит входной вершиной новой схемы и множество выходных вершин новой схемы совпадает с $B(\Sigma)$. Полученная схема обозначается Σ' и называется *схемой сравнения*.

Лемма 3. *Для любой простой* П.С. Σ *можно построить схему* Σ', *такую что* $|\Sigma'| < |\Sigma|^3$ *и*

$$N(\Sigma') = \{X \mid X \in L^* \mathbin{\&} \exists Y\big(Y \in N(\Sigma_2)\big) \mathbin{\&} X \text{ есть начальная половина } Y\}.$$

1. Обозначаем все существенные вершины схемы Σ буквами $\delta_1, \delta_2, \ldots$ $\ldots, \delta_{|\Sigma|}$. Через Σ_i обозначаем схему, полученную из Σ, считая δ_i единственной входной вершиной. Σ_i° есть схема, полученная из Σ, считая δ_i единственной выходной вершиной. Очевидно,

$$N(\Sigma_i) = \mathscr{S}_\Sigma(\delta_i), \quad |\Sigma_i| \leqslant |\Sigma|,$$
$$N(\Sigma_i^\circ) = N_\Sigma(\delta_\Sigma, \delta_i) \quad \text{и} \quad |\Sigma_i^\circ| \leqslant |\Sigma|.$$

2. Построим для каждой Σ_i $(1 \leqslant i \leqslant |\Sigma|)$ схему сравнения Σ_i'. Тогда, по лемме 2,

$$|\Sigma_i'| \leqslant |\Sigma_i| \leqslant |\Sigma|,$$
$$N(\Sigma_i') = \{Z \mid Z \in L^* \mathbin{\&} \exists Y\big(Y \in N(\Sigma_i) \mathbin{\&} |Y| = |Z|\big)\} =$$
$$= \{Z \mid Z \in L^* \mathbin{\&} \exists Y\big(Y \in \mathscr{S}_\Sigma(\delta_i) \mathbin{\&} |Y| = |Z|\big)\}.$$

3. Построим для каждой пары Σ_i' и Σ_i° $(1 \leqslant i \leqslant |\Sigma|)$ схему пересечения Δ_i. Тогда, по лемме 1,

$$|\Delta_i| \leqslant |\Sigma_i'| \cdot |\Sigma_i^\circ| \leqslant |\Sigma|^2,$$
$$N(\Delta_i) = N(\Sigma_i') \cap N(\Sigma_i^\circ) =$$
$$= N_\Sigma(\delta_\Sigma, \delta_i) \cap \{Z \mid Z \in L^* \mathbin{\&} \exists Y\big(Y \in \mathscr{S}_\Sigma(\delta_i) \mathbin{\&} |Y| = |Z|\big)\} =$$
$$= \Big\{X \mid X \in N_\Sigma(\delta_\Sigma, \delta_i) \mathbin{\&} \Big(\exists\, Y\big(Y \in \mathscr{S}_\Sigma(\delta_i) \mathbin{\&} |X| = |Y|\big)\Big)\Big\}.$$

4. Схема объединения для всех Δ_i $(1 \leqslant i \leqslant |\Sigma|)$ строится следующим образом. Отождествляем входные вершины всех Δ_i $(1 \leqslant i \leqslant |\Sigma|)$. Входной вершиной новой схемы служит точка, полученная отождествлением входных вершин Δ_i $(1 \leqslant i \leqslant |\Sigma|)$. Выходными вершинами новой схемы служат выходные вершины схем Δ_i $(1 \leqslant i \leqslant |\Sigma|)$. Полученная схема обозначается Σ'. По способу построения схемы Σ' имеем:

$$|\Sigma'| \leqslant \sum_{i=1}^{|\Sigma|} |\Delta_i| \leqslant |\Sigma| \cdot |\Sigma|^2 = |\Sigma|^3,$$

$$N(\Sigma') = \bigcup_{i=1}^{|\Sigma|} N(\Delta_i) =$$
$$= \bigcup_{i=1}^{|\Sigma|} \Big\{X \mid X \in N_\Sigma(\delta_\Sigma, \delta_i) \mathbin{\&} \Big(\exists\, Y\big(Y \in \mathscr{S}_\Sigma(\delta_i) \mathbin{\&} |X| = |Y|\big)\Big)\Big\} =$$
$$= \{P \mid \exists Q\big(Q \in N(\Sigma) \mathbin{\&} P \text{ есть начальная половина } Q\big)\}.$$

Пусть Γ и Δ — П.Г., не имеющие общих вершин, a — дуга графа Γ. *Результатом подстановки графа* Δ *в граф* Γ *вместо дуги* a (обозначение $[\Gamma]_\Delta^a$) назовём П.Г., полученный из графа Γ следующими операциями:

(1) Дуга a удаляется;

(2) Вершина, из которой выходила дуга a, отождествляется с входной вершиной графа Δ;

(3) Для каждой из выходных вершин графа Δ проводится пустая дуга из этой вершины в вершину, в которую входила дуга a.

Пусть Γ и $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$ — порождающие графы, не имеющие общих вершин, а $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — дуги графа Γ. Обозначение

$$\Gamma_1 = [\Gamma]_{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s}^{a_1, a_2, \ldots, a_s}$$

будет употребляться как сокращение вместо

$$\left[\ldots\left[[\Gamma]^{a_1}_{\Delta_1}\right]^{a_2\ldots}_{\Delta_2\ldots}\right]^{a_s}_{\Delta_s}.$$

Заметим, что при этой подстановке каждая вершина графа Γ станет вершиной графа Γ_1 и входная вершина δ_Γ служит входной вершиной графа Γ_2 и $B(\Gamma) = B(\Gamma_2)$.

Лемма 4. *Пусть* Γ, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$ — П.Г., *не имеющие общих вершин, а* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — *дуги графа* Γ, *для любого* i $(1 \leqslant i \leqslant s)$

$$M_\Gamma(a_i) = N(\Delta_i)$$

и

$$\Gamma_1 = [\Gamma]^{a_1;\, a_2;\, \ldots;\, a_s}_{\Delta_2;\, \Delta_2;\, \ldots;\, \Delta_s}.$$

Тогда

$$N(\Gamma_1) = N(\Gamma) \quad \text{и} \quad |\Gamma_1| \leqslant |\Gamma| + \sum_{i=1}^{s} |\Delta_i|.$$

Лемма 5. *Для любой схемы* Σ, *не содержащей дуг дополнения, можно построить простую схему* Σ', *такую что*

$$N(\Sigma') = N(\Sigma) \quad \text{и} \quad |\Sigma'| \leqslant 3^{3l(\Sigma)-1\cdot|\Sigma|}.$$

Доказательство. Лемма будет доказана возвратной индукцией по числу П.Г. в Σ.

Если Σ простая, то наше утверждение, очевидно, справедливо, так как

$$|\Sigma| \leqslant 3^{3^0-1\cdot|\Sigma|} = 3^{|\Sigma|/3}.$$

Пусть $\Sigma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n)$ и

$a_1, a_2, \ldots, a_s$ — все дуги пересечения,

$b_1, b_2, \ldots, b_t$ — все дуги в.Н.П. в Γ_n.

Пусть дуга a_i $(1 \leqslant i \leqslant s)$ зависит от графов $\Gamma_{i,1}, \Gamma_{i,2}, \ldots, \Gamma_{i,m_i}$ $(m_i \geqslant 2)$; b_j $(1 \leqslant j \leqslant t)$ зависит от графа Γ_j.

Для каждой пары (i, r) $(1 \leqslant i \leqslant s;\ 1 \leqslant r \leqslant m_i)$ берём все графы, от которых зависит $\Gamma_{i,r}$, и сам этот граф и строим из них порождающую схему $\Sigma_{i,r}$, такую что

$$N(\Sigma_{i,r}) = N(\Gamma_{i,r}) \quad (1 \leqslant i \leqslant s;\ 1 \leqslant r \leqslant m_i).$$

Для каждого графа Γ_j $(1 \leqslant j \leqslant t)$ берём все графы, от которых он зависит, и сам этот граф и строим из них порождающую схему Σ_j, такую что

$$N(\Sigma_j) = N(\Gamma_j) \quad (1 \leqslant j \leqslant t).$$

По определению $l(\Sigma)$ следует, что

$$l(\Sigma_{i,r}) \leqslant l(a_i) \leqslant l(\Sigma) \quad (1 \leqslant i \leqslant s,\ 1 \leqslant r \leqslant m_i),$$

$$l(\Sigma_j) = l(a_j) - 1 < l(\Sigma) \quad (1 \leqslant j \leqslant t).$$

Не уменьшая общности мы можем считать, что каждая из схем $\Sigma_{i,r}$ $(1 \leqslant i \leqslant s;$ $1 \leqslant r \leqslant m_i)$ и Σ_j $(1 \leqslant j \leqslant t)$ содержит хотя бы одну существенную вершину, так как в противном случае $M_{\Gamma_n}(a_i)$ и $M_{\Gamma_n}(b_j)$ представляют либо пустое множество слов либо множество, состоящее из только пустого слова, поэтому мы могли бы упростить схему Σ, убрав дуги a_i и b_j или заменив их пустыми дугами.

К схемам $\Sigma_{i,r}$ $(1 \leqslant r \leqslant s;\ 1 \leqslant r \leqslant m_i)$ применяем индукционное предположение и получаем простые схемы $\Sigma'_{i,r}$, такие что

$$N(\Sigma'_{i,r}) = N(\Sigma_{i,r}),$$

$$|\Sigma'_{i,r}| \leqslant 3^{|\Sigma_{i,r}|3^{l(\Sigma_{i,r})-1}} \leqslant 3^{|\Sigma_{i,r}|3^{l(\Sigma)-1}}.$$

Применяя лемму 1 для всех i $(1 \leqslant i \leqslant s)$, получаем простые порождающие схемы $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$, такие что

$$N(\Delta_i) = \bigcap_{r=1}^{m_i} N(\Sigma'_{i,r}) = \bigcap_{r=1}^{m_i} N(\Sigma_{i,r}) = \bigcap_{r=1}^{m_i} N(\Gamma_{i,r}) = M_{\Gamma_n}(a_i),$$

$$|\Delta_i| \leqslant \prod_{r=1}^{m_i} |\Sigma'_{i,r}| \leqslant \prod_{r=1}^{m_i} 3^{|\Sigma_{i,r}|3^{l(\Sigma)-1}} = \tag{1}$$

$$= 3^{\sum_{r=1}^{m_i} |\Sigma_{i,r}|3^{l(\Sigma)-1}}.$$

К схемам Σ_j $(1 \leqslant j \leqslant t)$ применяем индукционное предположение и получаем простые схемы Σ'_j, такие что

$$N(\Sigma'_j) = N(\Sigma_j),$$

$$|\Sigma'_j| \leqslant 3^{|\Sigma_j|3^{l(\Sigma_j)-1}} \leqslant 3^{|\Sigma_j|3^{l(\Sigma)-2}}.$$

Применяя лемму 3 для всех j $(1 \leqslant j \leqslant t)$, получаем простые схемы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t$, такие что

$$\begin{aligned} N(\omega_j) &= \{X \mid X \in L^* \;\&\; \exists Y(Y \in N(\Sigma'_j) \;\&\; X \text{ есть начальная половина } Y)\} = \\ &= \{X \mid X \in L^* \;\&\; \exists Y(Y \in N(\Gamma_j) \;\&\; X \text{ есть начальная половина } Y)\} = \\ &= M_{\Gamma_n}(a_j), \end{aligned} \tag{2}$$

$$|\omega_j| \leqslant |\Sigma'_j|^3 \leqslant \left(3^{|\Sigma_j|3^{l(\Sigma)-2}}\right)^3 = 3^{|\Sigma_j|3^{l(\Sigma)-1}}.$$

Подставляя в Γ_n вместо дуг $a_1, a_2, \ldots, a_s$ схемы $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_s$, а вместо дуг $b_1, b_2, \ldots, b_t$ схемы $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_t$, получаем, по лемме 4, простую схему Σ', такую что

$$N(\Sigma') = N(\Gamma_n) = N(\Sigma),$$

$$|\Sigma'| \leqslant |\Gamma_n| + \sum_{i=1}^{s} |\Delta_i| + \sum_{j=1}^{t} |\omega_j|.$$

Из (1) и (2) вытекает, что

$$|\Sigma'| \leqslant |\Gamma_n| + \sum_{i=1}^{s} 3^{\sum_{r=1}^{m_i} |\Sigma_{i,r}| 3^{l(\Sigma)-1}} + \sum_{j=1}^{t} 3^{|\Sigma_j| 3^{l(\Sigma)-1}}.$$

Рассмотрим два случая:

1. Σ содержит по крайней мере одну дугу в.Н.П. Тогда $l(\Sigma) \geqslant 1$ и

$$\sum_{r=1}^{m_i} |\Sigma_{i,r}| 3^{l(\Sigma)-1} \geqslant 2, \quad |\Sigma_j| 3^{l(\Sigma)-1} \geqslant 1,$$

так как $m_i \geqslant 2$, $|\Sigma_{i,r}| \geqslant 1$ и $|\Sigma_j| \geqslant 1$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{s} 3^{\sum_{r=1}^{m_i} |\Sigma_{i,r}| 3^{l(\Sigma)-1}} + \sum_{j=1}^{t} 3^{|\Sigma_j| 3^{l(\Sigma)-1}} < \prod_{i=1}^{s} 3^{\sum_{r=1}^{m_i} |\Sigma_{i,r}| 3^{l(\Sigma)-1}} \prod_{j=1}^{t} 3^{|\Sigma_j| 3^{l(\Sigma)-1}} =$$

$$= 3^{\left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{r=1}^{m_i} |\Sigma_{i,r}| + \sum_{j=1}^{t} |\Sigma_j|\right) 3^{l(\Sigma)-1}}$$

и

(а) $|\Gamma_n| = 0$. Тогда

$$|\Sigma'| \leqslant 3^{\left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{r=1}^{m_i} |\Sigma_{i,r}| + \sum_{j=1}^{t} |\Sigma_j|\right) 3^{l(\Sigma)-1}} + |\Gamma_n| 3^{l(\Sigma)-1} =$$

$$= 3^{\left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{r=1}^{m_i} |\Sigma_{i,r}| + \sum_{j=1}^{t} |\Sigma_j| + |\Gamma_n|\right) 3^{l(\Sigma)-1}} = 3^{|\Sigma| 3^{l(\Sigma)-1}}.$$

(б) $|\Gamma_n| \geqslant 1$. Тогда

$$|\Sigma'| \leqslant 3^{|\Gamma_n| 3^{l(\Sigma)-1}} + 3^{\left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{r=1}^{m_i} |\Sigma_{i,r}| + \sum_{j=1}^{t} |\Sigma_j|\right) 3^{l(\Sigma)-1}} \leqslant$$

$$\leqslant 3^{\left(\sum_{i=1}^{s} \sum_{r=1}^{m_i} |\Sigma_{i,r}| + \sum_{j=1}^{t} |\Sigma_j| + |\Gamma_n|\right) 3^{l(\Sigma)-1}} =$$

$$= 3^{|\Sigma| 3^{l(\Sigma)-1}}.$$

2. В остальном случае $l(\Sigma) = 0$ и

$$|\Sigma'| \leqslant |\Gamma_n| + \sum_{i=1}^{s} 3^{\left(\sum_{r=1}^{m_i} |\Sigma_{i,r}|\right)/3}.$$

Обозначим $3^{1/3}$ через ε и $\sum_{i=1}^{s} \sum_{r=1}^{m_i} |\Sigma_{i,r}|$ через σ. Схема Σ содержит по крайней мере одну дугу пересечения и $|\Sigma_{i,r}| \geqslant 1$, поэтому $\sigma \geqslant 2$ и

$$(3) \qquad |\Sigma'| \leqslant |\Gamma_n| + 3^{\sum_{i=1}^{s} \sum_{r=1}^{m_i} |\Sigma_{i,r}|} = |\Gamma_n| + \varepsilon^{\sigma}.$$

Рассмотрим следующие случаи:

(а) $|\Gamma_n| = 0$. Тогда

$$|\Sigma'| \leqslant \varepsilon^{|\Sigma|}.$$

(б) $|\Gamma_n| = 1$. Мы должны рассматривать два случая:

(α) $\sigma = 2$. Тогда из (3) получаем

$$|\Sigma'| \leqslant \varepsilon^2 + 1 = 3^{2/3} + 1 < 3,2.$$

Но число существенных вершин Σ' не может быть нецелым числом. Поэтому в этом случае

$$|\Sigma'| = 3 = 3^{(2+1)/3} = \varepsilon^{\sigma+1} = \varepsilon^{|\Sigma|}.$$

(β) $\sigma \geqslant 3$. Тогда

$$\varepsilon^{\sigma} + 1 \leqslant \varepsilon^{\sigma+1} = \varepsilon^{|\Sigma|},$$

так как при $\sigma \geqslant 3$

$$\varepsilon^{\sigma}(\varepsilon - 1) \geqslant 3(3^{1/3} - 1) \geqslant 1.$$

Тем самым, из (3) следует

$$|\Sigma'| \leqslant \varepsilon^{|\Sigma|}.$$

(в) $|\Gamma_n| \geqslant 2$. Тогда $3^{|\Gamma_n|/3} > 2$ и в силу соотношения $\sigma \geqslant 2$ имеем $\varepsilon^{\sigma} \geqslant 3^{2/3} > 2$. Поэтому

$$\varepsilon^{\sigma} + |\Gamma_n| \leqslant \varepsilon^{\sigma} + \varepsilon^{|\Gamma_n|} \leqslant \varepsilon^{\sigma} \cdot \varepsilon^{|\Gamma_n|} = \varepsilon^{\sigma + |\Gamma_n|} = \varepsilon^{|\Sigma|}.$$

Тем самым, из (3) получаем

$$|\Sigma'| \leqslant \varepsilon^{|\Sigma|}.$$

И так во всех случаях мы доказали, что

$$|\Sigma'| \leqslant 3^{|\Sigma| 3^{l(\Sigma)-1}}.$$

Лемма доказана.

Применяя к простой построенной схеме Σ' алгоритм детерминизации, можно построить для нее детерминированный автомат, распознающий $N(\Sigma') = N(\Sigma)$ с числом состояний, не превосходящим

$$2^{|\Sigma'|} + 1 \leqslant 2^{3^{|\Sigma| 3^{l(\Sigma)-1}}} + 1.$$

Тем самым теорема доказана.

Литература

[1] Данг Зуй Руан, *Сложность конечного автомата, соответствующего обобщенному регулярному выражению*, Докл. АН СССР 213, 1.

[2] В. М. Глушков, *Абстрактная теория автоматов*, Успехи матем. наук. 16, 5 (101) (1961), 3–61.

Presented to the Semester
Discrete Mathematics
(February 15–June 16, 1977)

DISCRETE MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 7
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

RATIONAL STOCHASTIC AUTOMATA IN FORMAL LANGUAGE THEORY

PAAVO TURAKAINEN

Department of Mathematics, University of Oulu, Oulu, Finland

The purpose of this paper is to study language families which are obtained by applying arbitrary or bounded or λ-free homomorphisms to languages accepted by rational stochastic automata.

1. Definitions and preliminary results

In what follows, every alphabet X will be a finite subset of a fixed infinite set of abstract symbols. For any word P in X^*, $|P|$ means the length of P, $|P|_a$ is the number of occurrences of the letter a in P, and mi P denotes the mirror image (or the reversal) of P. For the empty word we shall use the symbol λ.

The notions of a pre-AFL, an AFL and a principal AFL are defined as in Ginsburg (1975). The families of linear context-free, context-free, quasi-realtime (Book and Greibach, 1970), deterministic lba and recursively enumerable languages are denoted by $\mathscr{L}_{\mathrm{LIN}}$, $\mathscr{L}_{\mathrm{CF}}$, $\mathscr{L}_{\mathrm{QRT}}$, $\mathscr{L}_{\mathrm{DCS}}$ and $\mathscr{L}_{\mathrm{RE}}$, respectively.

A *stochastic automaton* is a quintuple $A = (X, S, M, \pi, f)$ where X is an alphabet, S is a finite set of states, M is a mapping from X into the set of stochastic $|S|\times|S|$ matrices, π is a stochastic $1\times|S|$ vector, and f is a $|S|\times 1$ vector consisting of 0's and 1's only. If, in addition, all entries in π and f and in the matrices $M(a)$, a in X, are rational numbers, A is called a *rational stochastic automaton.*

Define $M(\lambda) = E(|S|\times|S|$ identity matrix) and $M(Qa) = M(Q)M(a)$ if Q is in X^* and a is in X. Then A generates a stochastic word-function p_A defined by $p_A(P) = \pi M(P)f$ for all P in X^*. Languages of the form

$$L(A, \eta) = \{P \in X^* |\ \pi M(P)f > \eta\}, \tag{1}$$

where the cut-point η is a real number, are called *stochastic languages*. If A is a rational stochastic automation and η is a rational number, $L(A, \eta)$ is called a *rational stochastic language.* The family of all rational stochastic languages will be denoted by $\mathscr{SL}$. If the sign $>$ in (1) is replaced by the sign $=$ or $\neq$, the corresponding language families for rational stochastic automata and rational cut-points are denoted by $\mathscr{EL}$ and $\mathscr{DL}$, respectively. Exactly the same three families are obtained