DISCRETE MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 7
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

О ПОЛУАДДИТИВНОСТИ ОПТИМАЛЬНЫХ ПЛАНОВ ДЛЯ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ

С. М. ШВАРТИН

Вычислительный центр АН СССР, Москва, СССР

Ю. И. Журавлевым при изучении локальных алгоритмов нахождения покрытий заданного множества конечной системой множеств минимального веса было выявлено одно свойство таких покрытий. Оно заключается в следующем.

Пусть имеется множество M и конечная система

$$\mathfrak{M} = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$$

множеств $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ таких, что $M \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$. Каждому множеству $\mathfrak{A}_i \in \mathfrak{M}$ приписано число $\mu(\mathfrak{A}_i)$ — называемое его *весом*. Если $\mathfrak{M}_0 = \{\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_k}\}$ и $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}$, то *весом системы* $\mathfrak{M}_0$ называют сумму $\mu(\mathfrak{M}_0) = \sum_{s=1}^{k} \mu(\mathfrak{A}_{i_s})$. Говорят, что система $\mathfrak{M}_0$ *покрывает множество* M, если $M \subseteq \bigcup_{s=1}^{k} \mathfrak{A}_{i_s}$. Система $\mathfrak{M}_0$, покрывающая множество M, называется *системой с минимальным весом* или *минимальным покрытием* множества M, если её вес не превосходит веса других систем покрывающих множество M. Оказывается, если множества $\mathfrak{A}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{j_r}$ из $\mathfrak{M}$ входят в какое-нибудь минимальное покрытие множества M и множества $\mathfrak{A}_{k_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{k_r}$ из $\mathfrak{M} \setminus \bigcup_{s=1}^{r} \mathfrak{A}_{j_s}$ образуют минимальное покрытие множества $M \setminus \bigcup_{s=1}^{r} \mathfrak{A}_{j_s}$, то система $\tilde{\mathfrak{M}} = \{\mathfrak{A}_{j_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{j_l}, \mathfrak{A}_{k_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{k_r}\}$ образует минимальное покрытие множества M (подробнее см. [2]). Оказывается подобным же свойством обладают оптимальные планы перевозок транспортных задач. Для удобства изложения этого приведем две формулировки, одна из которых описывает саму транспортную задачу, другая транспортную задачу с запретами. Перейдем к первой формулировке. Пусть имеются m пунктов производства однородного продукта $A_1, \dots, A_i, \dots, A_m$ и n пунктов потребления этого продукта $B_1, \dots, B_j, \dots$ $\dots, B_n$. Известны объемы производства продукта $a_1, \dots, a_i, \dots, a_m$ в каждом пункте производства и объёмы спроса продукта $b_1, \dots, b_j, \dots, b_n$ в каждом пункте потребления. Предполагается, что выполняется условие баланса

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1}$$

Кроме того задана матрица

$$C = \|c_{ij}\|_{mn}.$$

Элемент c_{ij} этой матрицы означает стоимость перевозки единицы продукта из пункта производства A_i в пункт потребления B_j. Матрица C называется *матрицей транспортных издержек*. В транспортной задаче требуется составить план перевозок обеспечивающий, при минимальных транспортных издержках, удовлетворение спроса всех пунктов потребления за счёт реализации всего продукта произведенного во всех пунктах производства. Переведем транспортную задачу на формальный язык.

Пусть x_{ij} означает количество единиц продукта поставляемое из пункта производства A_i в пункт потрбеления B_j. Ясно, что суммарные затраты на перевозку продукта из всех пунктов производства во все пункты потребления выражаются суммой

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}. \tag{2}$$

Требования чтобы весь продукт из каждого пункта производства был вывезен в пункты потребления формально записывается так

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \dots, m). \tag{3}$$

Условия полного удовлетворения спроса каждого пункта потребления продуктом из разных пунктов производства имеют вид

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \tag{4}$$

Условия, что объемы перевозок неотрицательные числа записывается так:

$$x_{ij} \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n). \tag{5}$$

Таким образом транспортная задача сводится к минимизации суммарных затрат (2) при условиях (3), (4) и (5).

Совокупность всех величин x_{ij} означающих количество единиц продукта поставляемого из пункта производства A_i в пункт потребления B_j ($i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$) и удовлетворяющих условиям (3)–(5), называют *планом перевозок*, а сами величины x_{ij} — *перевозками*. План перевозок удобно записывать в виде матрицы $X = \|x_{ij}\|_{mn}$. План перевозок обращающий в минимум линейную форму (2) называется *оптимальным планом*. Таким образом транспортная задача сводится к нахождению оптимального плана. Будем называть транспортную задачу *задачей* T.

Опишем теперь транспортную задачу с запретами, которую мы будем называть *задачей* $\tilde{T}$. Она отличается от задачи T наличием запретов на перевозку продукта из некоторых пунктов производства в какие-либо пункты потребления. Обозначим через E набор пар индексов (i, j) отвечающих пунктам A_i и B_j, между которыми перевозки запрещены.

$$E = \{(i, j)\}.$$

Множество E будем называть *множеством запретов*. Наличие запрета на перевозку продукта между пунктами A_i и B_j сводится к тому, что перевозка x_{ij} заранее полагается равной нулю. Из сказанного следует, что задача $\tilde{T}$ сводится к нахождению плана перевозок $X = \|x_{ij}\|_{mn}$ минимизирующего линейную форму (2) при условиях (3), (4), (5) и дополнительном условии

$$x_{ij} = 0, \quad \text{если} \quad (i, j) \in E. \tag{6}$$

В отличии от задачи T задача $\tilde{T}$ не всегда имеет решение (Подробнее о транспортных задачах см., например, [1].)

Введем теперь некоторые обозначения, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть известно, что для задачи T существует оптимальный план, в котором содержатся перевозки $x_{i_1 j_{11}}, \dots, x_{i_1 j_{1k_1}}, x_{i_2 j_{21}}, \dots, x_{i_2 j_{2k_2}}, \dots, x_{i_s j_{s1}}, \dots$ $\dots, x_{i_s j_{sk_s}}$. Обозначим множество этих перевозок через

$$X = \{x_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} \mid \alpha = 1, 2, \dots, s, \beta = 1, 2, \dots, k_\alpha\}. \tag{7}$$

Определим теперь транспортную задачу с запретами $\tilde{T}$ используя задачу T и множество X. Мы будем считать, что как задача T, так и задача $\tilde{T}$ имеют одни и те же пункты производства $A_1, \dots, A_i, \dots, A_m$ и потребления $B_1, \dots$ $\dots, B_j, \dots, B_n$. Объём производства $\tilde{a}_i$ в пункте производства A_i задачи $\tilde{T}$ определяется по формуле

$$\tilde{a}_i = \begin{cases} a_i, & \text{если} \quad i \neq i_\alpha \quad (\alpha = 1, 2, \dots, s), \\ a_{i_\alpha} - \sum\limits_{\beta=1}^{k_\alpha} x_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} & \text{в противном,} \end{cases} \tag{8}$$

где a_i — объём производства в пункте производства A_i задачи T ($i = 1, 2, \dots$ $\dots, m$), $x_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} \in X$.

Объём спроса в пункте потребления B_j задачи $\tilde{T}$ полагается равным

$$(9)\qquad \tilde{b}_j = \begin{cases} b_j, & \text{если } j \neq j_{\alpha\beta},\ (\alpha = 1, 2, \ldots, s,\ \beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha), \\ b_j - \sum\limits_{\substack{k \\ (k:\ x_{i_k j_{\alpha\beta}} \in X)}} x_{i_k j_{\alpha\beta}} & \text{в противном,} \end{cases}$$

где b_j — объём спроса продукта в пункте потребления B_j задачи T ($j = 1, 2, \ldots, n$).

При таком определении величин $\tilde{a}_i$ и $\tilde{b}_j$ возможны случаи, когда некоторые из них окажутся равными нулю. С целью удобства дальнейшего изложения мы не будем исключать из рассмотрения пункты производства A_i, для которых $\tilde{a}_i = 0$ и пункты потребления B_j, для которых $\tilde{b}_j = 0$.

Матрица транспортных издержек $\tilde{C}$ задачи $\tilde{T}$ полагается равной матрице транспортных издержек C задачи T,

$$\tilde{C} = C.$$

Множество запретов E задачи $\tilde{T}$ определим так:

$$(10)\qquad E = \{(i_\alpha, j_{\alpha\beta}) \mid \alpha = 1, 2, \ldots, s, \quad \beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha\}.$$

Так определенную транспортную задачу с запретами мы будем обозначать $\tilde{T}(T, X)$.

Пусть $\tilde{X} = \|\tilde{x}_{ij}\|_{mn}$ какой-нибудь план перевозок для задачи $\tilde{T}(T, X)$ определенной, как это описано выше, по задаче T и множеству X. Очевидно, что в этом плане каждая перевозка $\tilde{x}_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}$ равна нулю ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$, $\beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha$). Каждую такую перевозку заменим на соответствующую перевозку $x_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}$ из X, а остальные перевозки плана $\tilde{X}$ оставим неизменными. Обозначим полученную в результате этого матрицу через $\bar{X} = \|\bar{x}_{ij}\|_{mn}$.

Лемма 1. *Матрица $\bar{X} = \|\bar{x}_{ij}\|_{mn}$ является планом перевозок для задачи T.*

Доказательство. Докажем, что для матрицы $\bar{X} = \|\bar{x}_{ij}\|_{mn}$ выполняются условия (3), (4) и (5) из определения задачи T. Действительно рассмотрим сумму $\sum\limits_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij}$ при условии, что $i \neq i_\alpha$, ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$). Из определения задачи $\tilde{T}(T, X)$ и матрицы $\bar{X}$ следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{x}_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{ij} = \bar{a}_i = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ i \neq i_1, \ldots, i_s).$$

Пусть теперь $i = i_\alpha$. Тогда

$$\sum_{=1}^{n} \bar{x}_{i_\alpha j} = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_{i_\alpha j} + \sum_{\beta=1}^{k_\alpha} x_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} = \\ = \tilde{a}_{i_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{k_\alpha} x_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} = a_{i_\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, s).$$

Равенство

$$\tilde{a}_{i_\alpha} + \sum_{\beta=1}^{k_\alpha} x_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} = a_{i_\alpha}$$

следует из (8). Таким образом установлено, что равенство (3) выполняется для всех $i = 1, 2, \ldots, m$.

Рассмотрим теперь сумму $\sum\limits_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij}$ считая $j \neq j_{\alpha\beta}$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$, $\beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha$). В этом случае из способов определения $\tilde{b}_j$ согласно (9) и матрицы $\bar{X}$ следует, что

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{ij} = \tilde{b}_j = b_j.$$

Пусть теперь $j \neq j_{\alpha\beta}$ ($1 \leq \alpha \leq s$, $1 \leq \beta \leq k_\alpha$). Тогда

$$\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij_{\alpha\beta}} = \sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_{ij_{\alpha\beta}} + \sum_{\substack{\gamma \\ (\gamma:\ x_{i_\gamma j_{\alpha\beta}} \in X)}} \bar{x}_{i_\gamma j_{\alpha\beta}} = \\ = \tilde{b}_{j_{\alpha\beta}} + \sum_{\substack{\gamma \\ (\gamma:\ x_{i_\gamma j_{\alpha\beta}} \in X)}} x_{i_\gamma j_{\alpha\beta}} = b_{j_{\alpha\beta}}.$$

Равенство

$$\tilde{b}_{j_{\alpha\beta}} + \sum_{\substack{\gamma \\ (\gamma:\ x_{i_\gamma j_{\alpha\beta}} \in X)}} x_{i_\gamma j_{\alpha\beta}} = b_{j_{\alpha\beta}}$$

следует из (9). Таким образом установлено, что условие (4) выполняется для всех $j = 1, 2, \ldots, n$.

Поскольку все элементы матрицы $\tilde{X}$ и элементы множества X неотрицательны, то отсюда и из способа построения матрицы $\bar{X}$ следует, что все её элементы неотрицательны. Таким образом для матрицы $\bar{X}$ так же выполняется условие (5). Следовательно матрица $\bar{X}$ является планом перевозки для задачи T. Лемма доказана.

Пусть теперь так же имеется задача T и $\bar{X} = \|\bar{x}_{ij}\|_{mn}$ план перевозок для неё. Пусть так же $X = \{\bar{x}_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} \mid \alpha = 1, 2, \ldots, s,\ \beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha\}$ — некоторое множество перевозок плана $\bar{X}$. Построим транспортную задачу с запретами $\tilde{T}(T, X)$, так как это описано выше. В плане перевозок $\bar{X}$ каждую перевозку $\bar{x}_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}$ заменим нулем ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$, $\beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha$). Остальные перевозки плана $\bar{X}$ оставим неизменными. Обозначим полученную матрицу через $\tilde{X} = \|\tilde{x}_{ij}\|_{mn}$. Относительно так построенных задачи $\tilde{T}(T, X)$ и матрицы $\tilde{X} = \|\tilde{x}_{ij}\|_{mn}$ справедлива следующая

Лемма 2. *Матрица $\tilde{X} = \|\tilde{x}_{ij}\|_{mn}$ является планом перевозок для задачи $\tilde{T}(T, X)$.*

Доказательство. Рассмотрим сумму $\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_{ij}$, считая что $i \neq i_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s)$. Тогда из (8) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{ij} = a_i = \tilde{a}_i.$$

Если же $i = i_\alpha$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant s)$, то из (8) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n}\tilde{x}_{i_\alpha j} = \sum_{j=1}^{n}\bar{x}_{i_\alpha j} - \sum_{\beta=1}^{k_\alpha}\bar{x}_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} = a_{i_\alpha} - \sum_{\beta=1}^{k_\alpha}\bar{x}_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} = \tilde{a}_{i_\alpha}.$$

Таким образом для матрицы $\tilde{X}$ выполняется условие (3).

Рассмотрим сумму $\sum_{i=1}^{m}\tilde{x}_{ij}$, полагая $j \neq j_{\alpha\beta}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s,\ \beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha)$. Тогда из (9) следует, что

$$\sum_{i=1}^{m}\tilde{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\bar{x}_{ij} = b_j = \tilde{b}_j.$$

Если же $j = j_{\alpha\beta}$ $(1 \leqslant \alpha \leqslant s,\ 1 \leqslant \beta \leqslant k_\alpha)$, то из (9) следует

$$\sum_{i=1}^{m}\tilde{x}_{ij_{\alpha\beta}} = \sum_{i=1}^{m}\bar{x}_{ij_{\alpha\beta}} - \sum_{\substack{\gamma \\ (\gamma:\ x_{i_\gamma j_{\alpha\beta}} \in X)}}\bar{x}_{i_\gamma j_{\alpha\beta}} = b_{j_{\alpha\beta}} - \sum_{\substack{\gamma \\ (\gamma:\ x_{i_\gamma j_{\alpha\beta}} \in X)}}\bar{x}_{i_\gamma j_{\alpha\beta}} = \tilde{b}_{j_{\alpha\beta}}.$$

Таким образом для матрицы $\tilde{X}$ выполняется условие (4). Из способа её построения следует, что все её элементы неотрицательны. Это означает, что для матрицы $\tilde{X}$ выполняется условие (5).

Из способа построения задачи $\tilde{T}(T, X)$ следует, что её множество запретов

$$E = \{(i_\alpha, j_{\alpha\beta}) \mid \alpha = 1, 2, \ldots, s,\ \beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha\}.$$

Из способа построения матрицы $\tilde{X}$ следует, что каждый её элемент $\tilde{x}_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s,\ \beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha)$ равен нулю. Это показывает, что для матрицы $\tilde{X}$ выполняется так же и условие (6) и следовательно она является планом перевозок для задачи $\tilde{T}(T, \tilde{X})$. Лемма доказана.

Из этой леммы следует, что для задачи $\tilde{T}(T, X)$ всегда существует оптимальный план перевозок, поскольку это следует из существования плана перевозок.

Перейдём теперь к формулировке и доказательству основного результата.

Пусть $\bar{X}_0 = \{x^0_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} \mid \alpha = 1, 2, \ldots, s,\ \beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha)$ множество перевозок из какого-нибудь оптимального для задачи T плана перевозок X_0. Пусть $X = \|\bar{x}_{ij}\|_{mn}$ какой-нибудь план перевозок задачи T, в котором каждая перевозка $\bar{x}_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} = x^0_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s,\ \beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha)$. Построим задачу $\tilde{T}(T, \bar{X}_0)$, так как это описано выше. Будем также как и раньше обозначать $\tilde{X} = \|\tilde{x}_{ij}\|_{mn}$ матрицу, получаемую из плана перевозок $\bar{X} = \|\bar{x}_{ij}\|_{mn}$ для задачи T путем замены в нём каждой перевозки $\bar{x}_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s,\ \beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha)$ нулём и оставлением неизменными всех остальных перевозок. Относительно так определённых задачи $\tilde{T}(T, \bar{X}_0)$, плана перевозок $\bar{X}$ для задачи T и матрицы $\tilde{X}$ имеет место

Теорема. *План перевозок $\bar{X} = \|\bar{x}_{ij}\|_{mn}$ является оптимальным планом перевозок для задачи T тогда и только тогда когда матрица $\tilde{X} = \|\tilde{x}_{ij}\|_{mn}$ является оптимальным планом перевозок для задачи $\tilde{T}(T, \bar{X}_0)$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\bar{X}$ является оптимальным планом перевозок задачи T. Тогда в соответствии с леммой 2 матрица $\tilde{X} = \|\tilde{x}_{ij}\|_{mn}$ является планом перевозок для задачи $\tilde{T}(T, \bar{X}_0)$. Покажем, что $\tilde{X}$ — оптимальный план перевозок для задачи $\tilde{T}(T, \bar{X}_0)$. Действительно, если это не так, то для задачи $\tilde{T}(T, \bar{X}_0)$ всегда существует оптимальный план перевозок. Обозначим его через $\tilde{X}_0 = \|\tilde{x}^0_{ij}\|_{mn}$. Тогда имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}^0_{ij} < \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}_{ij}. \tag{11}$$

Если в плане $\tilde{X}_0$ заменить каждую перевозку $\tilde{x}^0_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} = 0$ перевозкой $\bar{x}_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}$ плана $\bar{X}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, s,\ \beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha)$, а остальные перевозки оставить неизменными, то полученная таким путем матрица в соответствии с леммой 1 будет планом перевозок для задачи T. Обозначим эту матрицу $\bar{X}' = \|\bar{x}'_{ij}\|_{mn}$. В силу определения множества $\bar{X}_0$, задачи $\tilde{T}(T, \bar{X}_0)$ планов перевозок $\bar{X} = \|\bar{x}_{ij}\|_{mn}$, $\bar{X}' = \|\bar{x}'_{ij}\|_{mn}$, $\tilde{X} = \|\tilde{x}_{ij}\|_{mn}$ и $\tilde{X}_0 = \|\tilde{x}^0_{ij}\|_{mn}$ имеют место равенства:

$$L(\bar{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\bar{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{k_\alpha} c_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}\bar{x}_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}$$

и

$$L(\bar{X}') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\bar{x}'_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}^0_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{k_\alpha} c_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}\bar{x}_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}.$$

В силу неравенства (11) будем иметь $L(\bar{X}) < L(\bar{X}')$, что невозможно, т.к. $\bar{X}$ — оптимальный план. Полученное противоречие доказывает необходимость условий. Докажем достаточность.

Достаточность. Пусть матрица $\tilde{X} = \|\tilde{x}_{ij}\|_{mn}$ является оптимальным планом для задачи $\tilde{T}(T, \bar{X}_0)$. Допустим, что план $\bar{X} = \|x_{ij}\|_{mn}$ не является оптимальным планом перевозок для задачи T. Тогда для неё существует оптимальный план $\bar{X}' = \|\bar{x}'_{ij}\|_{mn}$, в котором каждая перевозка $\bar{x}'_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} =$

$= x^0_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}$ ($x^0_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} \in \overline{X}_0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, s$, $\beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha$). Обозначим через $\tilde{X}' = \|x'_{ij}\|_{mn}$ матрицу получаемую из матрицы $\overline{X}'$ путем замены в ней каждой перевозки $\overline{x}'_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}$ нулем ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$, $\beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha$) и оставления неизменными всех остальных перевозок. По лемме 2 матрица $\tilde{X}'$ является планом перевозок дла задачи $\tilde{T}(T, \overline{X}_0)$. Так же легко заметить, что

$$L(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\overline{x}_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{k_\alpha} c_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} x^0_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}$$

и

$$L(\overline{X}') = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}'_{ij} + \sum_{\alpha=1}^{s}\sum_{\beta=1}^{k_\alpha} c_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} x^0_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}.$$

Т.к. по допущению $\overline{X}$ не является оптимальным планом перевозок, а $\overline{X}'$ оптимальный план перевозок для задачи T, то $L(\overline{X}) > L(\overline{X}')$. Отсюда и из выше приведенных выражений для $L(\overline{X})$ и $L(\overline{X}')$ следует, что

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}'_{ij} < \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\tilde{x}_{ij}.$$

Но это невозможно, так как по условию план перевозок $\tilde{X}$ является оптимальным планом перевозок для задачи $\tilde{T}(T, X_0)$. Полученное противоречие доказывеат достаточность условия. Теорема доказана.

Таким образом, если $\overline{X}_0 = \{x^0_{i_\alpha j_{\alpha\beta}} \mid \alpha = 1, 2, \ldots, s, \ \beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha\}$ есть некоторое множество перевозок, входящих в какой-нибудь оптимальный для задачи T план перевозок, а $\tilde{X}_0 = \|\tilde{x}^0_{ij}\|_{mn}$ любой оптимальный план для задачи $\tilde{T}(T, \overline{X}_0)$, то матрица, полученная из матрицы $\tilde{X}_0$ путем замены в ней каждого элемента $\tilde{x}^0_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}$ на соответствующий элемент $x^0_{i_\alpha j_{\alpha\beta}}$ из $\overline{X}_0$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, s$, $\beta = 1, 2, \ldots, k_\alpha$) и оставления неизменными всех остальных её элементов, оказывается оптимальным планом перевозок для исходной задачи T.

Если же в задаче $\tilde{T}(T, \overline{X}_0)$ некоторые $\tilde{a}_i$ или $\tilde{b}_j$ (см. (8) и (9)) оказываются равными нулю, то нахождение оптимального для неё плана перевозок сводится по сути дела к решению транспортной задачи с числом переменных x_{ij} меньшим, чем в исходной задаче.

Литература

[1] Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин, *Задачи линейного программирования транспортного типа*, Наука, Москва 1969.

[2] Ю. И. Журавлев, *Локальные алгоритмы вычисления информации II*, Кибернетика 2 (1966), Наукова думка, Киев.

Presented to the Semester
Discrete Mathematics
(February 15–June 16, 1977)