Другими словами в качестве точки A_r выбирается такая точка из E^n, которая даёт минимальное приращение функционалу $H_\varphi(M_{r-1})$, где $M_{r-1} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}\}$.

s-й шаг. Алгоритм заканчивает свою работу после выбора точки A_s.

Любое множество M_s, полученное в результате работы градиентного алгоритма, мы назовём *локально-оптимальным*.

Лемма. *Если M_s — локально-оптимальное по функционалу $H_\varphi(M)$ множество из E^n, то справедливо неравенство*

$$H_\varphi(M_s) \leqslant \overline{H}^s_\varphi(n). \tag{8}$$

Пусть $\{M_n\}$ — некоторая последовательность множеств, такая что

(1) $M_n \subseteq E^n$, $n = 1, 2, 3\ldots$,

(2) $|M_n| = s(n)$.

Определение. Последовательность множеств $\{M_n\}$ называется *асимптотически оптимальной* (а.о.) относительно функционала $H_\varphi(M)$, если выполнено следующее условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_\varphi(M_n)}{H^s_\varphi(n)} = 1. \tag{9}$$

Из предыдущей леммы и определения класса R_0 вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\varphi(x) \in R_0$ и $\{M_n\}$ — некоторая последовательность локально-оптимальных множеств относительно функционала $H_\varphi(M)$. Тогда последовательность $\{M_n\}$ является* а.о. *относительно этого же функционала.*

Эта теорема показывает, что в некотором роде простейший эвристический алгоритм построения экстремального множества для функционала $H_\varphi(M)$ при $\varphi(x) \in R_0$ даёт асимптотическое решение задачи оптимизации, сформулированной в начале этой работы.

Литература

[1] В. К. Леонтьев, *Асимптотически устойчивые расположения зарядов в вершинах единичного n-мерного куба*, Сб. Проблемы кибернетики 23, Москва 1970.

Presented to the Semester
Discrete Mathematics
(February 15–June 16, 1977)

DISCRETE MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 7
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ПРИНЦИПА ЛОКАЛЬНОГО КОДИРОВАНИЯ

О. Б. ЛУПАНОВ

Институт прикладной математики АН СССР им. М. В. Келдыша, Москва, СССР

Принцип локального кодирования [4] дает достаточные условия для построения асимптотически наилучшего метода синтеза схем для функций (вектор-функций) алгебры логики из некоторого класса $\mathfrak{F}$. Эти условия, грубо говоря, состоят в следующем. Требуется, чтобы функции f из $\mathfrak{F}$ допускали кодирование (нумерацию) наборами из нулей и единиц $f \mapsto \tilde{\pi}$ такое что

(1) длина набора асимптотически равна логарифму числа функций из $\mathfrak{F}$;

(2) для вычисления значения функции f на произвольном наборе $\tilde{\sigma}$ не требуется знания всего набора $\tilde{\pi}$ — достаточно знать только его часть $\tilde{\pi}'$ — „кусок кода", длина которого „достаточно мала", причем

(3) по набору $\tilde{\sigma}$ „просто" вычисляются „координаты" куска кода (например, длина и номер разряда, в котором кусок кода начинается);

(4) по набору $\tilde{\sigma}$ и куску кода $\tilde{\pi}'$ „сравнительно просто" вычисляется значение $f(\tilde{\sigma})$.

В [4] приведены также формулировки некоторых теорем о сложности асимптотически наилучших схем из функциональных элементов (теоремы 2.1–2.4). В [1] описан вариант принципа локального кодирования, в котором ограничение на максимальную длину куска кода фактически минимальное (правда, при дополнительном требовании, чтобы различные куски кода не пересекались).

В данной работе приводятся некоторые варианты принципа локального кодирования, являющиеся обобщением случая, использованного в [4] для получения асимптотически наилучшего метода синтеза схем для функций из ненулевых инвариантных классов [5]. Хотя область применения этих вариантов не выходит за пределы, указанные в [4], [1], однако более сильные требования, накладываемые на свойства кода, ослабляют или вообще делают ненужными остальные требования — на сложность поиска куска кода и на сложность декодирования.

Пусть B^* — множество всех непустых наборов из нулей и единиц. Длину произвольного набора $\tilde{\beta}$ из B^* будем обозначать через $\lambda(\tilde{\beta})$. Отображение некоторого (конечного или счетного) множества A в B^*, при котором разным элементам из A соответствуют разные наборы из B^*, будем называть *правильным*.

Для любого набора $\tilde{\beta}$ определим наборы $\tilde{\mu}(\tilde{\beta})$ и $\tilde{\nu}(\tilde{\beta})$ следующим образом: набор $\tilde{\mu}(\tilde{\beta})$ является двоичной записью длины набора $\tilde{\beta}$, причем в старшем (левом) разряде имеет единицу; набор $\tilde{\nu}(\tilde{\beta})$ имеет ту же длину, что и $\tilde{\mu}(\tilde{\beta})$, и имеет вид $00\ldots01$. Обозначим через $\tilde{\gamma}(\tilde{\beta})$ набор $\tilde{\nu}(\tilde{\beta})\tilde{\mu}(\tilde{\beta})\tilde{\beta}$. Очевидно, что по набору $\tilde{\gamma}(\tilde{\beta})\tilde{\alpha}$, где $\tilde{\alpha}$ — произвольный набор любой длины, набор $\tilde{\beta}$ выделяется однозначно. Например, для набора 00110100101100111 имеем $\tilde{\beta} = 00101$. Очевидно, что если $\lambda(\tilde{\beta}) = d$, то[1]

$$\lambda\big(\tilde{\mu}(\tilde{\beta})\big) = \lambda\big(\tilde{\nu}(\tilde{\beta})\big) = \,]\log(d+1)[\, < 1+\log(d+1)$$

и

$$\lambda\big(\tilde{\gamma}(\tilde{\beta})\big) = d+2]\log(d+1)[\, \leqslant d+2\log(d+1)+2. \tag{1}$$

Отображение множества булевых наборов длины n в множество наборов длины m будем называть *(n, m)-функцией*. Фактически (n, m)-функция есть упорядоченная система m булевых функций от n аргументов: $(f_1(x), \ldots, f_m(x))$, где $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Иногда в дальнейшем (n, m)-функции будем называть функциями. Наборы значений аргументов функций — наборы из нулей и единиц — как правило не будут заключаться в скобки; компоненты этих наборов не будут разделяться запятыми.

Будем рассматривать задачу о реализации функций схемами из функциональных элементов в произвольном конечном базисе [2], [3]. Предполагается, что базисным элементам приписаны положительные действительные числа — веса. Пусть элемент E имеет вес $P(E)$ и число входов $i(E)$, $i(E) \geqslant 2$; тогда число $P(E)/\big(i(E)-1\big)$ называется *приведенным весом* элемента E. Минимум приведенных весов элементов базиса будем обозначать через ϱ. *Сложностью схемы* будем называть сумму весов ее элементов. Для любой функции f через $L(f)$ будем обозначать наименьшую сложность схемы, реализующей f. Для произвольного конечного множества $\mathfrak{F}$ функций через $M(\mathfrak{F})$ будем обозначать число элементов множества $\mathfrak{F}$. Пусть далее

$$H(\mathfrak{F}) = \log M(\mathfrak{F}), \qquad \mathcal{J}(\mathfrak{F}) = H(\mathfrak{F})/\log H(\mathfrak{F}).$$

Через $L(\mathfrak{F})$ будем обозначать число $\max\limits_{f \in \mathfrak{F}} L(f)$. Если $\mathfrak{F}$ — множество всех булевых функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, то вместо обозначения $L(\mathfrak{F})$ используется также обозначение $L(n)$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ — некоторое конечное множество (n, m)-функций $f(x_1, \ldots, x_n)$, k — некоторое натуральное число, $k \leqslant n$, и $\mathfrak{F}^{(k)}$ — множество всех подфункций $f(x_1, \ldots, x_k, \sigma_{k+1} \ldots \sigma_n)$, получающихся из функций из $\mathfrak{F}$ в результате подстановок констант на место последних $n-k$ аргументов. Пусть

(1) Здесь $\log a$ обозначает логарифм по основанию 2; $]a[$ — минимальное целое число, не меньшее a.

φ — некоторое правильное отображение множества $\mathfrak{F}^{(k)}$ в B^*. Для каждой функции f из $\mathfrak{F}$ определим величину $l_{\varphi,k}(f)$ слудующим образом:

$$l_{\varphi,k}(f) = \sum_{\sigma_{k+1}\ldots\sigma_n} \lambda\Big(\varphi\big(f(x_1, \ldots, x_k, \sigma_{k+1} \ldots \sigma_n)\big)\Big)$$

(таким образом, наборы $\varphi\big(f(x_1, \ldots, x_k, \sigma_{k+1} \ldots \sigma_n)\big)$ фактически являются кусками кода). Пусть, наконец,

$$l_{\varphi,k}(\mathfrak{F}) = \max_{f \in \mathfrak{F}} l_{\varphi,k}(f), \qquad \lambda_{\varphi,k}(\mathfrak{F}) = \max_{g \in \mathfrak{F}^{(k)}} \big(\lambda(\varphi(g)\big).$$

Пусть $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2, \ldots, \mathfrak{F}_i, \ldots$ — последовательность классов функций, причем $\mathfrak{F}_i$ состоит из (n_i, m_i)-функций, и пусть для некоторой последовательности k_i ($k_i \leqslant n_i$) задана последовательность привильных отображений φ_i множеств $\mathfrak{F}_i^{(k_i)}$ в B^*.

Ниже будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия*

(0) $(n_i + m_i)/\mathcal{J}(\mathfrak{F}_i) \to 0$;

(1) $l_{\varphi_i, k_i}(\mathfrak{F}_i) \lesssim H(\mathfrak{F}_i)$;

(2) $H(\mathfrak{F}_i)/2^{n_i - k_i} \to \infty$;

(3) *Существует $\varepsilon > 0$ такое что при достаточно больших i*

$$\lambda_{\varphi_i, k_i}(\mathfrak{F}_i) + k_i + m_i < (1-\varepsilon)\log H(\mathfrak{F}_i).\text{[2]}$$

Тогда

$$L(\mathfrak{F}_i) \sim \varrho \mathcal{J}(\mathfrak{F}_i).$$

Доказательство этой и следующей теорем существенно опирается на оценку сложности не всюду определенных булевых вектор-функций специального вида, установленную Е. П. Липатовым [1].

Пусть $\hat{\mathfrak{F}}^{n,m,H}$ — множество (n, m)-функций $f = \big(f_1(\tilde{x}), \ldots, f_m(\tilde{x})\big)$, обладающих свойствами:

(1) если на некотором наборе $\tilde{\sigma}$ не определено значение $f_j(\tilde{\sigma})$, то не определены также значения $f_{j+1}(\tilde{\sigma}), \ldots, f_m(\tilde{\sigma})$;

(2) общее число булевых (т.е. определенных) элементов в таблице, задающей f, равно H.

Теорема ([1], стр. 103). *Пусть* [3] [4]

(1) $(n+m)\log H/H \to 0$,

(2) $H \geqslant 2^{n-1}$.

(2) Это условие можно несколько ослабить.

(3) Сделанное в [1] требование неравенства компонент в каждой вектор-функции f не является существенным.

(4) Здесь и ниже имеется в виду последовательность классов функций и индекс i опускается.

Тогда

$$L(\hat{\hat{\mathfrak{F}}}^{n,m,H}) \sim \varrho \frac{H}{\log H}.$$

Следствие. *Пусть* $\hat{\hat{\hat{\mathfrak{F}}}}^{n,m,H} = \bigcup_{h\leqslant H} \hat{\hat{\mathfrak{F}}}^{n,m,h}$. *Тогда при условиях теоремы*

$$L(\hat{\hat{\hat{\mathfrak{F}}}}^{n,m,H}) \lesssim \varrho \frac{H}{\log H},$$

так как из условия (1) *следует, что* $H \to \infty$, *и функция* $H/\log H$ *является возрастающей по* H (*при* $H \geqslant 3$).

В дальнейшем будет использоваться также следующий очевидный факт. Пусть W_p — $(p+2^p, 1)$-функция, определяющая по двум наборам $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$ и $\delta_0\delta_1 \ldots \delta_{2^p-1}$ длины p и 2^p соответственно элемент δ_j, где j — число, изображаемое набором $\varepsilon_1\varepsilon_2 \ldots \varepsilon_p$.

Лемма. ([5]) *Имеем*

$$L(W_p) \asymp 2^p.$$

Доказательство теоремы 1. 1° Рассмотрим некоторую (n, m)-функцию из $\mathfrak{F}$([6]) и множество ее (k, m)-подфункций $f' = f(x_1, \ldots, x_k, \sigma_{k+1} \ldots \sigma_n)$. Для любой такой подфункции f' пусть $\tilde{\beta} = \varphi(f')$. Тогда в силу (1)

$$\lambda(\gamma(\tilde{\beta})) \leqslant \lambda_1,$$

где

$$\lambda_1 = \lambda_{\varphi,k}(\mathfrak{F}) + 2]\log(\lambda_{\varphi,k}(\mathfrak{F})+1)[$$

и

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_{\varphi,k}(\mathfrak{F}) + 2\log\lambda_{\varphi,k}(\mathfrak{F}) + 4. \tag{2}$$

Рассмотрим не всюду определенную $(n-k, \lambda_1)$-функцию g_f, заданную следующим образом. Для любого набора $\tilde{\sigma} = \sigma_{k+1} \ldots \sigma_n$ пусть

$$\tilde{\beta}(\tilde{\sigma}) = \varphi(f(x_1, \ldots, x_k, \sigma_{k+1} \ldots \sigma_n))$$

и([7])

$$g_f(\tilde{\sigma}) = \tilde{\gamma}(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma})) * * \ldots *.$$

Очевидно, что

$$\lambda(\tilde{\gamma}(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma}))) = \lambda(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma})) + 2]\log(\lambda(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma}))[$$
$$\leqslant \lambda(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma})) + 2\log\lambda(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma})) + 4$$

и

$$g_f \in \hat{\hat{\mathfrak{F}}}^{n-k,\lambda_1,H},$$

([5]) Символ $\asymp$ ($\lesssim$) обозначает равенство (неравенство) по порядку.
([6]) Индекс i опускаем.
([7]) Здесь символ $*$ обозначает неопределенный элемент.

где

$$H = \sum_{\tilde{\sigma}} \lambda(\tilde{\gamma}(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma}))) \leqslant \tag{3}$$
$$\leqslant 4\cdot 2^{n-k} + \sum_{\tilde{\sigma}} \lambda(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma})) + 2\sum_{\tilde{\sigma}} \log\lambda(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma})).$$

В силу неравенства для среднего геометрического и среднего арифметического имеем

$$\Big(\prod_{\tilde{\sigma}} \lambda(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma}))\Big)^{1/2^{n-k}} \leqslant \frac{1}{2^{n-k}} \sum_{\tilde{\sigma}} \lambda(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma})),$$

откуда

$$\sum_{\tilde{\sigma}} \log\lambda(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma})) \leqslant 2^{n-k}\log\Big(\frac{1}{2^{n-k}} \sum_{\tilde{\sigma}} \lambda(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma}))\Big). \tag{4}$$

Так как $\sum_{\tilde{\sigma}} \lambda(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma})) = l_{\varphi,k}(f)$ (см. выше определение $l_{\varphi,k}(f)$), то из (4) имеем

$$\sum_{\tilde{\sigma}} \log\lambda(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma})) \leqslant 2^{n-k}\log\Big(\frac{1}{2^{n-k}} l_{\varphi,k}(f)\Big)$$

и, учитывая (3), получаем

$$H \leqslant 4\cdot 2^{n-k} + l_{\varphi,k}(f) + 2\cdot 2^{n-k}\log\Big(\frac{1}{2^{n-k}} l_{\varphi,k}(f)\Big). \tag{5}$$

Введем функцию ψ соотношением

$$H(\mathfrak{F}) = \psi 2^{n-k}. \tag{6}$$

В силу условия (2) теоремы имеем

$$\psi \to \infty. \tag{7}$$

Отсюда и из условия (1) теоремы имеем

$$l_{\varphi,k}(f) \lesssim \psi 2^{n-k}.$$

Из (5) и последнего неравенства получаем

$$H \lesssim 4\cdot 2^{n-k} + \psi 2^{n-k} + 2\cdot 2^{n-k}\log\psi.$$

Наконец, из последнего неравенства, учитывая (7) и (6), имеем

$$H \lesssim H(\mathfrak{F}).$$

Таким образом,

$$g_f \in \hat{\hat{\hat{\mathfrak{F}}}}^{n-k,\lambda_1,H'},$$

где

$$H' \lesssim H(\mathfrak{F}).$$

Для того, чтобы можно было применить следствие из теоремы Е. П. Липатова, должны быть выполнены условия

(8) $$(n-k)/\mathscr{I}(\mathfrak{F}) \to 0,$$

(9) $$\lambda_1/\mathscr{I}(\mathfrak{F}) \to 0,$$

(10) $$H' \geqslant 2^{n-k}.$$

2° Соотношение (8) следует из условия (0) теоремы, соотношение (9) — из (2) и условия (3) теоремы. Наконец, из неравенства $\lambda\left(\tilde{\gamma}\left(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma})\right)\right) \geqslant 1$ следует, что $H \geqslant 2^{n-k}$, откуда вытекает (10). Поэтому на основании следствия из теоремы Е. П. Липатова имеем

$$L(g_f) \lesssim \varrho\mathscr{I}(\mathfrak{F}).$$

В силу сказанного выше, по любому набору, начинающемуся набором $\tilde{\gamma}(\tilde{\beta})$, однозначно определяется набор $\tilde{\beta}$. Далее, поскольку любой набор из B^*, являющийся образом функции из $\mathfrak{F}^{(k)}$, однозначно определяет эту функцию, существует $(\lambda_1, m2^k)$-функция D, вычисляющая по любому набору вида $\tilde{\gamma}(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma}))\tilde{\alpha}$ длины λ_1 набор $\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_1\tilde{\pi}_2\ldots\tilde{\pi}_m$, где $\tilde{\pi}_j$ — список значений j-й компоненты функции $f(x_1,\ldots,x_k,\tilde{\sigma})$ на всех 2^k наборах значений $x_1,\ldots,x_k$. Очевидно, что

$$L(D) \leqslant m2^kL(\lambda_1) \lesssim m2^k2^{\lambda_1}.$$

Из (2) следует, что

(11) $$\log(m2^{k+\lambda_1}) = \lambda_1+k+\log m \leqslant \lambda_{\varphi,k}(\mathfrak{F})+2\log\lambda_{\varphi,k}(\mathfrak{F})+4+k+\log m.$$

Из условия (3) теоремы имеем

(12) $$\log\lambda_{\varphi,k}(\mathfrak{F}) < \log\log H(\mathfrak{F}).$$

Поэтому из (11), (12) и условия (3) теоремы получаем

$$\log(m2^{k+\lambda_1}) < (1-\varepsilon)\log H(\mathfrak{F})+2\log\log H(\mathfrak{F})+4,$$

и при достаточно больших i

$$\log(m2^{k+\lambda_1}) < (1-\varepsilon/2)\log H(\mathfrak{F}).$$

Следовательно,

$$L(D) \lesssim H(\mathfrak{F})^{1-\varepsilon/2} = o\left(\mathscr{I}(\mathfrak{F})\right).$$

Наконец, по набору $\tilde{\pi}(\tilde{\sigma})$ и набору $\tilde{\sigma}' = \sigma_1\ldots\sigma_k$ определяется значение $f(\sigma_1\ldots\sigma_n)$. Это осуществляет функция W, составленная из m экземпляров функции W_k: j-й экземпляр по наборам $\tilde{\sigma}'$ и $\tilde{\pi}_j$ находит значение $f(\tilde{\sigma}'\tilde{\sigma})$. В силу леммы это можно сделать со сложностью порядка $m2^k =$ (см. выше) $= o\left(\mathscr{I}(\mathfrak{F})\right)$. Таким образом,

$$L(f) \lesssim \varrho\mathscr{I}(\mathfrak{F}).$$

Нижняя оценка, асимптотически равная верхней, в силу условия (0) теоремы, непосредственно следует из общей теоремы о нижней оценке ([4], теорема Д1, стр. 95).

Замечание. Суперпозицию функций D и W, описанных в доказательстве теоремы 1, — функцию $W(D(\ldots))$ — будем называть *функцией декодирования*.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (0), (1) *и* (2) *теоремы* 1 *и условие* (3) *этой теоремы заменено двумя условиями*

(3′) $\lambda_{\varphi_i,k_i}(\mathfrak{F}_i)/\mathscr{I}(\mathfrak{F}_i) \to 0$;

(4′) *функция декодирования* $\mathscr{V}$ (см. замечание) *удовлетворяет условию*

$$L(\mathscr{V})/\mathscr{I}(\mathfrak{F}_i) \to 0.$$

Тогда

$$L(\mathfrak{F}_i) \sim \varrho\mathscr{I}(\mathfrak{F}_i).$$

Доказательство. 1° Начало доказательства дословно совпадает с началом доказательства теоремы 1 (п. (1°)).

2° Соотношение (8) следует из условия (0) теоремы, соотношение (9) — из (2) и условия (3′) теоремы. Соотношение (10) следует, как и в доказательстве теоремы 1, из неравенства $\lambda\left(\tilde{\gamma}\left(\tilde{\beta}(\tilde{\sigma})\right)\right) \geqslant 1$. Поэтому на основании следствия из теоремы Е. П. Липатова имеем

$$L(g_f) \lesssim \varrho\mathscr{I}(\mathfrak{F}_i).$$

Функция декодирования, определяющая по $g_f(\tilde{\sigma})$ и $\tilde{\sigma}'$ значение $f(\tilde{\sigma}'\tilde{\sigma})$, может быть реализована, в силу условия (4′) теоремы, со сложностью $o\left(\mathscr{I}(\mathfrak{F}_i)\right)$. Поэтому

$$L(f) \lesssim \varrho\mathscr{I}(\mathfrak{F}).$$

Нижняя оценка, асимптотически равная верхней, в силу условия (0) теоремы, непосредственно следует из общей теоремы о нижней оценке [4].

Замечание. Теорема 2 остается справедливой для широкого класса „функций декодирования”, использующих (наряду с наборами $\tilde{\beta}(\tilde{\sigma})$) любую дополнительную информацию, облегчающую процесс декодирования, лишь бы общее ее количество было существенно меньше, чем $H(\mathfrak{F}_i)$, и выполнялся аналог условия (3′) для количества дополнительной информации на каждом входном наборе.

Литература

[1] Е. П. Липатов, *Об одном случае неравномерного локального кодирования*, Сб. Проблемы кибернетики 26 (1973), Наука, Москва 95–107.

[2] О. Б. Лупанов, *Об одном методе синтеза схем*, Известия вузов, Радиофизика 1, 1 (1958). 120–140.

[3] —, *Об одном классе схем из функциональных элементов*, Сб. Проблемы кибернетики 7 (1962), Физматгиз, Москва, 61–114.

[4] —, *Об одном подходе к синтезу управляющих систем — принципе локального кодирования*, Сб. Проблемы кибернетики 14 (1965), Наука, Москва, 31–110.

[5] С. В. Яблонский, *Об алгоритмических трудностях синтеза минимальных контактных схем*, Сб. Проблемы кибернетики 2 (1959), Физматгиз, Москва, 75–121.

Presented to the Semester
Discrete Mathematics
(February 15–June 16, 1977)