количество таких „переотнесенных'' объектов, точнее, их долю от общего числа объектов класса K_i — через ν_i и положим

$$\nu(K(\bar{u})) = \max_{K_i \in K(\bar{u})} \nu_i. \tag{26}$$

Решая задачу (19) с функционалом (26) мы получаем классификацию K^{opt}, оптимальную с точки зрения информативности совокупности понятий о классах этой классификации K^{opt}. Это позволяет, в общем случае, заменить в каждом классе описание объектов с помощью N признаков их описанием через понятие о классе, т.е. как правило, существенно меньшим числом признаков, что в конечном счете упрощает задачу распознавания новых объектов с помощью полученной классификации K^{opt}.

Отметим важность изучаемой задачи разбиения для проблемы прогнозирования, содержанием которой является установление связи между прогнозируемым параметром или, иначе говоря, состоянием объектов и переменными $\{x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, определяющими эти состояния. При этом возникает необходимость в решении задачи оптимальной классификации множества реализаций контрольных выборок [4].

Литература

[1] Ю. И. Журавлев, В. В. Никифоров, Кибернетика 3 (1971), Киев.
[2] А. А. Зенкин, Канд. дисс., МГУ, Москва 1974.
[3] —, Доклады АН СССР 230 (1976), 1051.
[4] —, *О математических методах прогнозирования*, Знание, Москва 1976.
[5] [Р. Хуук, Т. А. Дживс] R. Hooke, T. A. Jeeves, J. Assoc. Comput. Mach. 8 (1961), 212.

Presented to the Semester
Discrete Mathematics
(February 15–June 16, 1977)

DISCRETE MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 7
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

О ТОЧНОСТИ МЕТОДА „УСРЕДНЕНИЯ''

В. К. ЛЕОНТЬЕВ
Вычислительный центр АН СССР, Москва, СССР

Многие задачи теории кодирования, распознавания образов, экспертных оценок можно рассматривать как оптимизационные метрические задачи на единичном n-мерном кубе E^n. При этом стандартной метрикой обычно является метрика Эвклида или метрика Хэминга, а оптимизируемый функционал является линейным от некоторой функции этой метрики. Задача состоит в нахождении множества фиксированной мощности на котором этот функционал достигает своего максимума или минимума.

Хорошо известным методом нахождения верхних (или нижних) оценок функционалов такого рода является „метод случайного кодирования'' или метод оценки экстремума функционала средним значением этого функционала, вычисленным по „подходящему'' ансамблю подмножеств фиксированной мощности из E^n. Этот метод играет существенную роль не только в такого рода оптимизационных задачах, но и во многих других проблемах комбинаторного анализа.

Настоящая работа посвящена изучению точности метода „усреднения'' для специального класса метрических оптимизационных задач, о котором шла речь выше. Основной результат работы состоит в следующем.

Введен класс функций R_0 для функционалов от которого „метод усреднения'' даёт асимптотически точный результат. Показано, что класс R_0 является выпуклым конусом в пространстве всех вещественнозначных функций, определенных на $[0, +\infty]$. Описаны некоторые свойства этого конуса, а для подкласса выпуклых вниз и убывающих на $[0, +\infty]$ функций дано абстрактное описание подконуса R_0 в виде некоторого аналитического соотношения. Показано, что для функций из класса R_0 градиентный алгоритм, применённый к функционалам от этих функций приводит к асимптотически точному результату.

Пусть E^n — множество вершин единичного n-мерного куба или множество двоичных наборов длины n. Всюду в дальнейшем множество E^n мы будем рассматривать как n-мерное векторное пространство над полем из двух элементов $\{0, 1\}$. Метрикой пространства E^n будем считать метрику Хемминга, которая определяется следующим образом

$$\varrho(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|,$$

где $\bar{\alpha} = (\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\bar{\beta} = (\beta, \beta_2, \ldots, \beta_n)$.

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_{C_{2^n}^s}$ — все подмножества E^n, состоящие из s — точек и $\varphi(x)$ — произвольная функция, определённая на $[0, +\infty]$. На каждом из подмножеств M_k определим значение функционала $H_\varphi(M_k)$ следующим образом

$$H_\varphi(M_k) = \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant S} \varphi[\varrho(\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j)], \tag{1}$$

где — $\bar{\alpha}_i, \bar{\alpha}_j \in M_k$. Основная задача состоит в нахождении минимума функционала $H_\varphi(M_k)$ в классе всех подмножеств E^n, содержащих ровно s — точек. Пусть

$$H_\varphi^s(n) = \min_k H_\varphi(M_k).$$

Другими словами $H_\varphi^s(n)$ — это минимальное значение функционала (1) в классе всех подмножеств мощности s из E^n.

Определение. Множество $M_k \subseteq E^n$ называется *оптимальным по функционалу* $H_\varphi(M)$, если выполнено равенство

$$H_\varphi(M_k) = H_\varphi^s(n)$$

при условии, что $|M_k| = s$.

Очевидно, что верхней границей функции $H_\varphi^s(n)$ является значение функционала $H_\varphi(M)$ для любого множества $M \subseteq E^n$ и содержащего ровно s — точек. Метод „усреднения" состоит в оценке сверху функции $H_\varphi^s(n)$ средним значением функционала $H_\varphi(M)$ по выбранному ансамблю подмножеств, содержащих фиксированное число s — точек.

Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_r$ — некоторая система подмножеств E^n, каждое из которых содержит ровно s — точек. *Средним значением функционала* $H_\varphi(M)$ по ансамблю подмножеств $L = \{M_1, M_2, \ldots, M_r\}$ называется число

$$\bar{\bar{H}}_\varphi^s(n, L) = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^{r} H_\varphi(M_k). \tag{2}$$

Очевидно справедливо неравенство

$$H_\varphi^s(n) \leqslant \bar{\bar{H}}_\varphi^s(n, L), \tag{3}$$

которое и является основой метода „усреднения".

Если L_s — ансамбль всех s — элементарных подмножеств E^n и $\bar{\bar{H}}_\varphi^s(n)$ — среднее значение (2) по этому ансамблю, то, как показано в [1], справедливо следующее равенство

$$\bar{\bar{H}}_\varphi^s(n) = \frac{s(s-1)}{2(2^n-1)} \sum_{k=1}^{n} C_n^k \varphi(k). \tag{4}$$

Нашей ближайшей целью является описание класса функций, для которых „метод усреднения" даёт асимптотически точный результат. При этом за ансамбль множеств принимается L_s. Итак, пусть R — множество всех неотрицательных функций, заданных на $[0, +\infty]$ и $s(n)$ — произвольная целочисленная растущая функция натурального аргумента, удовлетворяющая условию

$$0 \leqslant s(n) \leqslant 2^n.$$

Подкласс R_0 функции из R определим следующим образом

$$\varphi(x) \in R_0 \to H_\varphi^s(n) \sim \bar{\bar{H}}_\varphi^s(n). \tag{5}$$

Другими словами для функций $\varphi(x)$ из R_0 минимальное значение функционала $H_\varphi(M)$ асимптотически совпадает с его средним значением по ансамблю L_s.

Свойства класса R_0.

Свойство 1. Класс R_0 является выпуклым конусом в множестве R.

Свойство 2. Пусть $\psi(x) \in R_0$ и функция $\varphi(x)$ из R удовлетворяет следующим двум условиям

(1) $\varphi(x) \geqslant \psi(x)$ при $x \in [0, +\infty]$,

(2) $\sum_{k=1}^{n} c_n^k \varphi(k) \sim \sum_{k=1}^{n} c_n^k \psi(k)$.

Тогда $\varphi(x) \in R_0$.

Обозначим через Γ класс выпуклых, убывающих на $[0, +\infty]$ функций, принимающих неотрицательные значения. Пусть

$$s(n) \geqslant n+1 \quad \text{и} \quad n = 2^m - 1, \quad m = 1, 2, 3 \ldots$$

Теорема. *Для того, чтобы функция $\varphi(x)$ из Γ принадлежала классу R_0 необходимо и достаточно выполнение следующего условия*

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k \varphi(k) \sim 2^n \varphi\left(\frac{n+1}{2}\right). \tag{6}$$

Соотношение (6) даёт аналитическое описание подконуса $\Gamma \cap R_0$.

Опишем теперь градиентный алгоритм для оптимизации функционала (1).

1-й шаг. В множестве E^n выбираем произвольную точку A_1 и зачисляем её в множество M_s.

r-й шаг. Пусть точки $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$ уже построены. В качестве точки A_r выбирается произвольная точка из E^n такая, что для всех точек $Q \in E^n$ и $Q \neq A_i$ справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{r-1} \varphi[\varrho(A_i, A_r)] \leqslant \sum_{i=1}^{r-1} \varphi[\varrho(A_i, Q)]. \tag{7}$$

Другими словами в качестве точки A_r выбирается такая точка из E^n, которая даёт минимальное приращение функционалу $H_\varphi(M_{r-1})$, где $M_{r-1} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}\}$.

s-й шаг. Алгоритм заканчивает свою работу после выбора точки A_s.

Любое множество M_s, полученное в результате работы градиентного алгоритма, мы назовём *локально-оптимальным*.

Лемма. *Если M_s — локально-оптимальное по функционалу $H_\varphi(M)$ множество из E^n, то справедливо неравенство*

$$H_\varphi(M_s) \leqslant \overline{H^s_\varphi}(n). \tag{8}$$

Пусть $\{M_n\}$ — некоторая последовательность множеств, такая что

(1) $M_n \subseteq E^n$, $n = 1, 2, 3\ldots$,

(2) $|M_n| = s(n)$.

Определение. Последовательность множеств $\{M_n\}$ называется *асимптотически оптимальной* (а.о.) относительно функционала $H_\varphi(M)$, если выполнено следующее условие

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_\varphi(M_n)}{H^s_\varphi(n)} = 1. \tag{9}$$

Из предыдущей леммы и определения класса R_0 вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\varphi(x) \in R_0$ и $\{M_n\}$ — некоторая последовательность локально-оптимальных множеств относительно функционала $H_\varphi(M)$. Тогда последовательность $\{M_n\}$ является* а.о. *относительно этого же функционала.*

Эта теорема показывает, что в некотором роде простейший эвристический алгоритм построения экстремального множества для функционала $H_\varphi(M)$ при $\varphi(x) \in R_0$ даёт асимптотическое решение задачи оптимизации, сформулированной в начале этой работы.

Литература

[1] В. К. Леонтьев, *Асимптотически устойчивые расположения зарядов в вершинах единичного n-мерного куба*, Сб. Проблемы кибернетики 23, Москва 1970.

Presented to the Semester
Discrete Mathematics
(February 15–June 16, 1977)

DISCRETE MATHEMATICS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 7
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1982

О НЕКОТОРЫХ СЛУЧАЯХ ПРИНЦИПА ЛОКАЛЬНОГО КОДИРОВАНИЯ

О. Б. ЛУПАНОВ

Институт прикладной математики АН СССР им. М. В. Келдыша, Москва, СССР

Принцип локального кодирования [4] дает достаточные условия для построения асимптотически наилучшего метода синтеза схем для функций (вектор-функций) алгебры логики из некоторого класса $\mathfrak{F}$. Эти условия, грубо говоря, состоят в следующем. Требуется, чтобы функции f из $\mathfrak{F}$ допускали кодирование (нумерацию) наборами из нулей и единиц $f \mapsto \tilde{\pi}$ такое что

(1) длина набора асимптотически равна логарифму числа функций из $\mathfrak{F}$;

(2) для вычисления значения функции f на произвольном наборе $\tilde{\sigma}$ не требуется знания всего набора $\tilde{\pi}$ — достаточно знать только его часть $\tilde{\pi}'$ — „кусок кода", длина которого „достаточно мала", причем

(3) по набору $\tilde{\sigma}$ „просто" вычисляются „координаты" куска кода (например, длина и номер разряда, в котором кусок кода начинается);

(4) по набору $\tilde{\sigma}$ и куску кода $\tilde{\pi}'$ „сравнительно просто" вычисляется значение $f(\tilde{\sigma})$.

В [4] приведены также формулировки некоторых теорем о сложности асимптотически наилучших схем из функциональных элементов (теоремы 2.1–2.4). В [1] описан вариант принципа локального кодирования, в котором ограничение на максимальную длину куска кода фактически минимальное (правда, при дополнительном требовании, чтобы различные куски кода не пересекались).

В данной работе приводятся некоторые варианты принципа локального кодирования, являющиеся обобщением случая, использованного в [4] для получения асимптотически наилучшего метода синтеза схем для функций из ненулевых инвариантных классов [5]. Хотя область применения этих вариантов не выходит за пределы, указанные в [4], [1], однако более сильные требования, накладываемые на свойства кода, ослабляют или вообще делают ненужными остальные требования — на сложность поиска куска кода и на сложность декодирования.

Пусть B^* — множество всех непустых наборов из нулей и единиц. Длину произвольного набора $\tilde{\beta}$ из B^* будем обозначать через $\lambda(\tilde{\beta})$. Отображение