EVOLUTION EQUATIONS:
EXISTENCE, REGULARITY AND SINGULARITIES
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 52
INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
WARSZAWA 2000

NOMBRES DE REYNOLDS, STABILITÉ ET NAVIER-STOKES

MARCO CANNONE
UMR 7599 du CNRS
UFR de Mathématiques, Université de Paris VII
2, Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France
E-mail: cannone@math.jussieu.fr

1. Equations de Navier-Stokes. On dispose de deux méthodes pour établir les équations fondamentales de la mécanique des fluides. La première, microscopique, remonte à Navier, Cauchy et Poisson et consiste à déduire les équations macroscopiques à partir de certaines hypothèses sur le comportement des particules constituant le fluide. Considérée longtemps comme irréaliste, cette approche a retrouvé de nouveau la faveur des physiciens.

Dans la deuxième méthode, basée sur l'hypothèse du continu et introduite par d'Alembert, Euler, St. Venant et Stokes, les spéculations moléculaires sont, au contraire, éludées, au profit d'une analyse des phénomènes macroscopiques à l'aide des seules hypothèses et variables macroscopiques.

1.1. *Approche microscopique.* L'hypothèse moléculaire, avancée en 1822 par Navier dans l'étude du mouvement d'un fluide incompressible qui consiste à supposer "*ce corps comme un assemblage de molécules placées à distance très petite les unes des autres et susceptibles de changer presque librement de position les unes par rapport aux autres*" [100], n'était pas une idée nouvelle [27].

En 1738, pour expliquer des phénomènes macroscopiques, telle la pression d'un gaz agissant sur les parois d'un récipient, D. Bernoulli représentait le gaz par un ensemble discret de particules matérielles en mouvement selon les lois de la mécanique classique. Et, avant Bernoulli, certains philosophes grecs, tel Démocrite, avaient déjà défendu l'hypothèse que les "atomes" qui constituent un corps continuent à bouger, même si le corps en question paraît immobile.

L'aspect novateur du mémoire de Navier était autre : il introduisait les effets de *viscosité*, à savoir l'influence des processus de dissipation d'énergie qui ont lieu lors du mouve-

2000 *Mathematics Subject Classification*: Primary 35Q30; Secondary 76D05.
The paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

ment des particules du fluide. Ce frottement interne visqueux, cause de l'irréversibilité thermodynamique, s'exprime en transposant l'impulsion des régions aux grandes vitesses vers celles aux vitesses plus petites. Selon Navier [100] "*il est nécessaire d'admettre l'existence de nouvelles forces moléculaires qui sont développées par l'état de mouvement*" et postuler, en conséquence, que "*les actions répulsives des molécules sont augmentées ou diminuées d'une quantité proportionnelle à la vitesse avec laquelle les molécules s'approchent ou s'éloignent les unes des autres*".

Par des calculs assez compliqués, que nous n'allons pas présenter ici, Navier parvient enfin aux "*équations indéfinies*" régissant le mouvement d'un fluide incompressible et auxquelles son nom restera depuis attaché. Il s'agit du système :

$$\begin{cases} \rho\left[\dfrac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v\right] - \mu\Delta v = \rho f - \nabla p \\ \nabla\cdot v = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

où la vitesse $v(t,x)$ et la pression $p(t,x)$ à l'instant t et au point x sont les inconnues, tandis que ρ, μ et f représentent les données du problème, à savoir la densité (constante, dans le cas des fluides incompressibles), la viscosité et la force extérieure agissant sur le fluide par unité de volume. Pour la présentation originale de Navier on se reportera à la rédaction simplifiée donnée par R. Dugas dans [36].

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, la voie suivie par Navier paraît aujourd'hui irréaliste quand on la compare à celle de Stokes. Il a fallu attendre l'introduction des méthodes de la mécanique statistique pour donner une justification rigoureuse de l'approche moléculaire. Essayons de comprendre pourquoi.

Si on suppose un fluide constitué par un ensemble fini de N particules dont l'évolution est dictée par les lois de la mécanique classique, leur nombre est trop grand pour que l'on puisse penser déterminer avec précision la position et la vitesse initiales de chaque particule. Et, même si on y parvenait, on ne saurait résoudre un système de $6N$ équations différentielles en $6N$ inconnues ($3N$ positions et $3N$ vitesses), sauf dans des cas bien particuliers. Enfin, même si l'on disposait de la solution exacte donnant la trajectoire de toutes les N particules, on imagine difficilement comment ces informations nous permettraient de déterminer les quantités *macroscopiques* fondamentales, telles la vitesse v et la pression p du fluide.

C'est pourquoi le recours aux méthodes de la mécanique statistique est indispensable. Le problème consiste alors à prédire le comportement *probable* de l'état dynamique du système à partir d'une description *incomplète* à un instant donné. C'est le point de vue introduit en 1867 par J. C. Maxwell et qui culmine par les théories de L. Boltzmann en 1872. Or, sous certaines hypothèses, il est possible de déduire les équations de Navier-Stokes des fluides visqueux incompressibles à partir de l'équation de Boltzmann de la mécanique statistique. Nous ne développerons pas ce point de vue ici. Le lecteur intéressé trouvera une analyse complète dans les livres de C. Cercignani [26, 27] et de M. Shinbrot [121] et dans les travaux récents de C. Bardos, F. Golse et D. Levermore [1–4].

1.2. *Approche macroscopique.* Dans l'approche macroscopique un fluide est identifié à un milieu *continu*. Cela vaut dire que chaque petit élément de volume est si grand qu'il contient encore un nombre considérable de molécules. Quand on parle alors d'un point du fluide, on pensera plutôt à un élément de volume "physiquement" infinitésimal et suffisamment petit par rapport à celui du fluide, mais grand par rapport aux distances moléculaires.

Si l'on dispose des équations constitutives d'un fluide, la description de son mouvement va être complètement déterminée par la connaissance de la vitesse $v = v(t,x)$ et de deux quelconques de ses grandeurs thermodynamiques, notamment la pression $p = p(t,x)$ et la densité $\rho = \rho(t,x)$. Ici on prendra garde au fait que x ne représente pas un "point" du fluide comme dans la description précédente, mais un "vrai point" de l'espace $\mathbb{R}^3$. De même, la variable temporelle t sera supposée réelle et, sauf indication contraire, positive. Enfin, $v(t,x)$ représente comme d'habitude un champ vectoriel dans $\mathbb{R}^3$, à savoir $v(t,x) = (v_1(t,x), v_2(t,x), v_3(t,x))$, tandis que $p(t,x)$ et $\rho(t,x)$ sont deux champs scalaires.

Venons-en finalement à la déduction de l'équation fondamentale des milieux continus, celle qui exprime la loi de conservation de la matière et qui est connue sous le nom *d'équation de continuité*. Nous allons suivre ici la présentation de C. Truesdell [130] et celle de L. Landau et E. Lifchitz [79].

Si l'on désigne par $\mathcal{V}$ un volume arbitraire de l'espace, plus précisément un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^3$, alors la diminution de matière à l'intérieur de $\mathcal{V}$, soit $-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} \rho dx$, doit être égale à la quantité totale de fluide sortant en l'unité de temps du volume $\mathcal{V}$, soit le flux de matière sortant de la surface $\partial\mathcal{V}$. Or, puisque les "particules" du fluide se déplacent le long des courbes intégrales $\dot{X} = v(t,X)$, le flux sortant est donné tout simplement par la quantité $\int_{\partial\mathcal{V}} \rho v \cdot n dS$, où n désigne le vecteur unitaire normal orienté vers l'extérieur et dS représente l'élément de surface. En égalant les deux expressions on obtient

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathcal{V}} \rho dx = \int_{\partial\mathcal{V}} \rho v \cdot n dS \tag{1.2}$$

et, grâce au théorème de Stokes, puisque $\mathcal{V}$ est arbitraire, on arrive à l'équation de continuité bien connue

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v) = 0. \tag{1.3}$$

Dans le cas des équations de Navier-Stokes *incompressibles* la densité ρ du fluide est considérée comme invariable, c'est-à-dire constante en tout point et pendant tout le temps du mouvement. Le fluide est dit alors *incompressible* puisqu'il n'y a ni compression ni dilatation notables et l'équation de continuité prend, pour ρ=const, la forme

$$\nabla\cdot v = 0. \tag{1.4}$$

Pour que le bilan soit complet, il ne nous reste qu'à déterminer trois autres équations faisant intervenir la vitesse $v(t,x)$ et la pression $p(t,x)$ du fluide. Il s'agit de modifier les équations d'Euler gouvernant le mouvement d'un fluide *parfait* en tenant compte des effets dûs à la viscosité.

Considérons encore un volume arbitraire $\mathcal{V}$ et écrivons, cette fois-ci, *l'équation de conservation de l'impulsion ρv*. Pour cela, il nous faut tout d'abord évaluer la force totale s'exerçant sur le volume $\mathcal{V}$. Elle comporte trois termes.

Si le fluide est soumis à une force extérieure f (la gravité, par exemple), le premier terme de force agissant sur $\mathcal{V}$ est donné par $\int_{\mathcal{V}} \rho f dx$. Vient ensuite l'intégrale de la pression p sur la surface $\partial\mathcal{V}$ du volume, soit $-\int_{\partial\mathcal{V}} pndS$. Enfin, il faut tenir compte de la viscosité, qui intervient sous forme de forces de contact dues au frottement interne, qui ne prennent naissance que si différentes régions du fluide se meuvent avec des vitesses différentes. C'est pourquoi les forces visqueuses de contact, ou, pour utiliser un langage plus précis, le *tenseur visqueux des contraintes* τ, doit dépendre des dérivées de la vitesse par rapport aux coordonnées. Des considérations d'invariance, rotation et translation pour le tenseur τ et d'isotropie pour le fluide, permettent de déduire la forme la plus générale de tenseur τ, où la dépendance par rapport aux dérivées de la vitesse est *au plus* linéaire, à savoir l'expression tensorielle

$$\tau_{ik} = \lambda(\nabla \cdot v)\delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right). \tag{1.5}$$

Ici λ et μ sont les coefficients de viscosité de Lamé, ne dépendant pas de la vitesse du fluide, et δ_{ik} est le delta de Kronecker.

Finalement, la viscosité donne une contribution $\int_{\partial\mathcal{V}} \tau \cdot ndS$ à la force totale qui s'exerce sur le volume $\mathcal{V}$.

L'équation de conservation de l'impulsion s'écrit alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathcal{V}} \rho v dx = -\int_{\partial\mathcal{V}} \rho v(v \cdot n) dS + \int_{\mathcal{V}} \rho f dx - \int_{\partial\mathcal{V}} pndS + \int_{\partial\mathcal{V}} \tau \cdot ndS. \tag{1.6}$$

Faisant appel encore au théorème de Stokes et en se limitant au cas qui nous intéresse, celui d'un fluide incompressible, on parvient finalement aux équations

$$\rho \left[\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v \right] = \rho f - \nabla p + \mu \Delta v, \tag{1.7}$$

qui, avec l'équation $\nabla \cdot v = 0$, permettent, en principe, de caractériser complètement le mouvement d'un fluide visqueux incompressible, à savoir déterminer sa vitesse $v(t, x)$ et sa pression $p(t, x)$ en tout point et tout instant, en supposant connues les valeurs de ces quantités à un instant t_0 donné.

Si on introduit la viscosité cinématique ν et la pression cinématique P du fluide par les relations :

$$\begin{aligned} \nu &=: \frac{\mu}{\rho} \\ P &=: \frac{p}{\rho} \end{aligned} \tag{1.8}$$

alors les équations (1.4) et (1.7) prennent la forme bien connue

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v = -(v \cdot \nabla) v - \nabla P + f \\ \nabla \cdot v = 0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Dans les pages qui suivent, c'est sous cette forme que nous étudierons les équations de Navier-Stokes incompressibles.

Le plus souvent, la pression P sera éliminée à l'aide de l'opérateur de projection $\mathbb{P}$ de Leray-Hopf sur le champs de vecteurs à divergence nulle. Ainsi, par abus de langage, nous chercherons les "solutions v" du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v = -\mathbb{P}(v \cdot \nabla) v - \mathbb{P} f \\ \mathbb{P} v = v \end{cases} \tag{1.10}$$

au lieu des "solutions (v, P)" du système (1.9). Enfin, nous allons nous limiter au problème idéalisé où la variable x varie dans l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier.

Une dernière remarque. La complexité de l'équation (1.7) est essentiellement due à la compétition entre le terme non-linéaire de convection de quantité de mouvement, $\rho(v \cdot \nabla) v$, et le terme linéaire de diffusion visqueuse, $\mu \Delta v$. L'ordre de grandeur du rapport de ces deux termes

$$\frac{|\rho(v \cdot \nabla) v|}{|\mu \Delta v|} \sim \frac{\rho}{\mu} \frac{V^2/L}{V/L^2} = \frac{LV}{\nu} \tag{1.11}$$

définit une quantité, *nombre de Reynolds*, qui fera l'objet des pages suivantes.

2. Nombres de Reynolds. En utilisant les propriétés d'invariance d'échelle des équations de Navier-Stokes nous pouvons introduire des paramètres, les nombres de Reynolds et de Froude, propres à l'écoulement d'un fluide.

Pour un problème donné, soient L et V respectivement sa *longueur* et sa *vitesse caractéristiques*, ces nombres étant choisis un peu arbitrairement. Si, par exemple, on considère l'écoulement d'un fluide autour d'une sphère, alors L peut être à la fois le rayon ou le diamètre de la dite sphère, tandis qu'on peut prendre pour V le module de la vitesse du fluide à l'infini. Le choix de L et V détermine une échelle $T = L/V$ du *temps caractéristique* du problème.

Introduisons maintenant les variables adimensionnelles

$$v' = \frac{v}{V}, \qquad x' = \frac{x}{L}, \qquad t' = \frac{t}{T}, \qquad P' = \frac{P}{V^2}. \tag{2.1}$$

Un calcul élémentaire montre que les équations de Navier-Stokes, en l'absence de force extérieure ($f = 0$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v = -(v \cdot \nabla) v - \nabla P \\ \nabla \cdot v = 0, \end{cases} \tag{2.2}$$

s'écrivent, dans les nouvelles variables, sous la forme

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v'}{\partial t'} - \dfrac{1}{R} \Delta' v' = -(v' \cdot \nabla') v' - \nabla' P' \\ \nabla' \cdot v' = 0, \end{cases} \tag{2.3}$$

où nous avons introduit le nombre (adimensionnel) de Reynolds R, par l'expression

$$R = \frac{LV}{\nu}. \tag{2.4}$$

Remarquons que tout autre paramètre, sans dimension, propre à l'écoulement du fluide, peut être décrit en fonction du nombre de Reynolds R. En revanche, en présence d'une force extérieure f (d'accélération caractéristique G), il convient d'introduir un deuxième nombre adimensionnel, indépendant de celui de Reynolds. Il s'agit du nombre

F de Froude, défini par la relation

$$F = \frac{V^2}{LG}. \tag{2.5}$$

Revenons au nombre de Reynolds. Il représente le rapport entre l'échelle de vitesse imposée V et l'échelle de vitesse “visqueuse” L/T_M, donnée par la longueur L en l'unité de temps $T_M = L^2/\nu$ de diffusion du moment. Autrement dit, le nombre de Reynolds compare les forces d'inertie aux forces de viscosité. Aux faibles nombres de Reynolds, les forces visqueuses jouent un rôle important, alors qu'aux grands nombres de Reynolds ce sont les forces d'inertie qui dominent. De ce fait, en l'absence de conditions aux bords et de force extérieure, la limite $R \to \infty$ transforme les équations de Navier-Stokes (adimensionnelles) en l'équation d'Euler des fluides parfaits.

Une autre propriété du nombre de Reynolds est liée à la notion de *similitude*. Si deux écoulements différents ont la même structure géométrique (par exemple le mouvement de deux sphères de rayons différents dans deux fluides de viscosités différentes) et que leur nombre de Reynolds est aussi le même, alors les vitesses (et pressions) relatives v' (et P') des deux écoulements seront des fonctions identiques des variables x' et t'. Autrement dit, deux écoulements avec les mêmes nombres de Reynolds et la même géométrie sont *semblables*, car ils peuvent être déduits l'un de l'autre par un simple changement d'échelle. C'est la loi de similitude de Osborne Reynolds [113] (1883), conséquence directe de la forme (2.3) des équations de Navier-Stokes adimensionnelles. Son importance est capitale, surtout dans le domaine aérospatial, où les essais en soufflerie restent un élément indispensable de la conceptions des avions, des hélicoptères, des missiles ou des fusées. Ainsi, pour connaître le comportement des atmosphères raréfiées autour d'une aile d'avion, il suffit de construire un modèle réduit de l'aile en question, en choisissant les paramètres caractéristiques (viscosités, vitesses ..) de telle sorte à obtenir les mêmes nombres de Reynolds. En vertu de la loi de similitude, on parviendra à une bonne simulation du problème de départ.

Pour terminer, venons-en au rôle joué par le nombre de Reynolds dans la résolution des équations de Navier-Stokes, du point de vue théorique des équations aux dérivées partielles. Les questions fondamentales sont au nombre de deux. Sous quelles hypothèses les équations de Navier-Stokes admettent-elles une solution? et, s'il existe une solution, peut-on garantir qu'elle est unique?

On sait, depuis les travaux fondateurs de J. Leray (1933), qu'il existe toujours une solution *faible* des équations de Navier-Stokes [84–86]. Mais il semble difficile de démontrer qu'une telle solution faible est suffisamment régulière (dérivable) pour qu'elle vérifie le système (classique) du départ. Pour les écoulements dans l'espace bidimensionnel, la solution est toujours régulière et les équations de Navier-Stokes admettent une solution unique. En dimension trois, on ne dispose malheureusement pas d'un tel résultat. Tout ce que l'on sait, c'est que la solution est régulière si la donnée initiale est suffisamment petite (dans une certaine topologie) ou régulière pour un petit intervalle de temps et tout choix arbitraire (raisonnable) de donnée initiale. Ces résultats ont été initialement prouvés par A. A. Kiselev et O. A. Ladyzhenskaya (1957) [72, 80] et généralisés par la suite par plusieurs auteurs. Dans cette direction la théorie la plus complète est sans doute celle de T. Kato et H. Fujita (1962) [45, 68], et sur laquelle nous reviendrons avec plus de précision.

Concernant les solutions "à la Kato", ce qui est extrêmement déplaisant est de ne pas savoir si, pour des données initiales arbitrairement grandes, de telles solutions sont globales et uniques. La question étant bien sûr intimement liée à celle de la régularité. La solution est initialement unique et régulière, mais à l'instant t où elle n'est plus régulière (si un tel instant existe) l'unicité pourrait aussi faire défaut. La question de l'unicité est de première importance en mécanique des fluides. Pour les solutions de l'équation de Boltzmann et de Enskog, on ne dispose pas non plus d'un théorème général d'unicité [26].

Dans le contexte des équations de Navier-Stokes incompressibles on pourrait estimer la question insignifiante, puisque la solution est unique et régulière pour données initiales petites et qu'aucun fluide ne peut être considéré incompressible si les données sont trop grandes. De même, pour l'équation de Boltzmann, (resp. Enskog), si la densité de probabilité est trop grande, le gaz cesse d'être raréfié (resp. modérément dense).

Ici le problème est autre: l'ensemble ($\delta > 0$) des valeurs initiales pour lesquelles on obtient l'existence et l'unicité ($\|v_0\| < \delta$) n'est pas connu avec précision et pourrait être *trop* petit pour que le résultat ait un sens physique. En d'autres termes, la donnée, de même que l'unique solution correspondante, seraient "physiquement" nulles !

Mais, comme nous allons le voir (Théorème IV.2), la condition de petitesse est en effet *relative* à la viscosité ν: elle s'écrit, plus précisément, $\|v_0\|/\nu < \delta$. Or, si on interprète $\|v_0\|$ comme la *vitesse caractéristique* du problème, et qu' on suppose (dans l'espace $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{T}^3$) la *longueur caractéristique* normalisée à l'unité, le rapport $R =: \|v_0\|/\nu$ n'est rien d'autre qu'un nombre de Reynolds associé au problème. Ainsi, la condition d'existence et unicité de la solution (globale et régulière) de Kato se traduit-elle par la petitesse du nombre R.

De même qu'on ne peut donner un sens physique à l'expression "vitesse petite", à moins qu'on ait choisi a priori quelque échelle de comparaison, il serait incorrect de caractériser un fluide pour lequel les effets de viscosité seraient non négligeables, par la seule condition de "viscosité grande". Dans le deux cas, il convient de faire appel aux paramètres adimensionnels du problème et de remplacer par "nombre de Reynolds petit" les expressions erronées précédentes.

Dans les pages qui suivent, nous allons nous limiter essentiellement au cas de petits nombres de Reynolds pour lesquels, comme nous l'avons déjà fait remarquer, nous serions en mesure de prouver (dans un cadre fonctionnel opportun) l'existence et l'unicité d'une solution globale régulière des équations de Navier-Stokes.

Il serait à ce point tentant de démontrer que, pour des nombres de Reynolds trop grands, il n'existe pas de solution, ou que la solution n'est pas régulière ou encore pas unique. Ce point de vue serait en accord avec l'image de la turbulence développée formulée par L. Landau (1944). Dans le cas des écoulements stationnaires, la situation est la suivante [79] :

"Résolvant les équations du mouvement stationnaire d'un fluide visqueux, on doit souvent, par suite de difficultés mathématiques, se borner à certaines approximations. L'application de ces solutions approchées ne vaut, naturellement, qu'entre certaines li-

mites. Telle, par exemple, la solution du problème de l'écoulement autour d'une sphère, dont le domaine d'application est limité aux petits nombres de Reynolds.

Cependant, il doit exister, en principe, pour tout problème, c'est-à-dire pour tout mouvement dans des conditions extérieures stationnaires données, une solution stationnaire exacte des équations hydrodynamiques. Ces solutions existent formellement pour n'importe quel nombre de Reynolds.

Mais toute solution des équations du mouvement, même si elle est exacte, n'est pas forcément réalisable dans la nature. Outre qu'elles doivent vérifier les équations hydrodynamiques, les mouvements réalisables dans la nature doivent encore être stables. Pour que le mouvement soit stable, il faut que les petites perturbations s'amortissent au cours du temps après leur apparition. Mais si, par contre, des perturbations arbitrairement petites, qui prennent inévitablement naissance dans le courant fluide, ont tendance à croître au cours du temps, le mouvement sera absolument instable. Un tel mouvement instable vis-à-vis de perturbations infinitésimales ne saurait aucunement exister. [...]

Toutefois, une telle étude mathématique de la stabilité est extrêmement complexe. Jusqu'à présent, la question de la stabilité de l'écoulement stationnaire autour de corps de dimensions finies n'a reçu aucune élaboration théorique. Nul doute que, pour des nombres de Reynolds suffisamment petits, l'écoulement stationnaire autour des corps soit stable. Les données expérimentales témoignent vraisemblablement du fait que, R croissant, on atteint finalement une valeur déterminée, notée $R_{crit.}$, à partir de laquelle le mouvement est instable vis-à-vis de perturbations infinitésimales, si bien que pour des nombres de Reynolds suffisamment grands ($R > R_{crit.}$) l'écoulement stationnaire autour des corps solides est impossible."

3. Stabilité. Du point de vue théorique, une solution des équations de Navier-Stokes pourrait exister pour tout nombre de Reynolds R positif. Cependant, comme nous venons de l'apprendre, de telles solutions ne correspondraient pas nécessairement à des écoulements réels. A partir d'un certain nombre de Reynolds critique $R_{crit.}$, elles ne seraient pas stables par rapport à de petites perturbations.

Les critères pour déterminer la valeur $R_{crit.}$ sont donnés par la théorie de la *stabilité hydrodynamique* [35, 46, 59, 94, 119, 120].

Nous allons commencer par une définition due à A. M. Lyapunov [59, 94].

Définition III. 1. Soit $v(t,x)$ une solution des équations de Navier-Stokes de donnée initiale v_0. On dira que $v(t,x)$ est une solution *inconditionnellement* (resp. *conditionnellement*) *stable*, par rapport à une norme donnée $\| \ \|$, si pour tout (resp. il existe) $\epsilon > 0$ il existe $\delta(\epsilon) > 0$ tel que, pour toute solution $\tilde{v}(t,x)$ de donnée initiale $\tilde{v}_0$ qui vérifie $\|\tilde{v}_0(x) - v_0(x)\| < \delta$, on ait $\|\tilde{v}(t,x) - v(t,x)\| < \epsilon$ pour tout $t > 0$. Si, en plus, $\lim_{t\to\infty} \|\tilde{v}(t,x) - v(t,x)\| = 0$, on dira que $v(t,x)$ est une solution *asympotiquement stable.*

Quelques commentaires. Si v vérifie des conditions aux bords ou à l'infini, il en sera de même pour $\tilde{v}$: seule la condition initiale v_0 est perturbée en $\tilde{v}_0$. La définition III.1 s'applique aux solutions *globales* en temps et ne concerne donc que leur stabilité *globale.* On remplacera $t > 0$ par $0 < t < T$ pour obtenir la notion de stabilité *locale.* Enfin, une solution qui n'est pas stable au sens de la définition III.1 est appelée *instable.*

Dans les pages suivantes, nous n'allons étudier que les solutions globales des équations de Navier-Stokes qui, pour un nombre de Reynolds R inférieur à un nombre critique $R_{crit.}$ donné, sont régulières, uniques et stables.

Un programme plus ambitieux serait de s'attaquer au comportement des solutions au-delà de la valeur critique $R_{crit.}$. L'entreprise est ardue. Plusieurs scénarios semblent envisageables.

Tout simplement, pour $R_{crit.}$, la solution pourrait ne pas exister, ou bien exister sans être unique, ou encore exister sans être stable. Dans ce dernier cas, le plus probable, l'instabilité pourrait être *simple* ou *par degrés.*

Les perturbations qui agissent sur un écoulement en condition d'instabilité simple sont amplifiées pour $t \to \infty$: le mouvement change brusquement et devient turbulent. En cas d'instabilité par degrés, pour $R_{crit.}$ les perturbations donnent lieu à un mouvement laminaire nouveau. Il s'agit d'un *écoulement secondaire*, qui est stable jusqu'à un certain nombre de Reynolds $R'_{crit.}$ et qui après devient, à son tour, instable (simplement ou par degrés).

Ainsi, à mesure que le nombre de Reynolds augmente, des oscillations secondaires apparaissent sous forme de degrés de liberté dynamique, conduisant à une agitation croissante de plus en plus désordonnée et finalement à la turbulence.

Cette image d'instabilité par degrés est légitimée par la théorie des bifurcations. Chaque valeur de Reynolds critique serait à la fois un point d'instabilité et de branchement. Et, si on disposait en plus d'un théorème d'existence globale, comme c'est le cas pour les solutions de Leray ou de Kato, chaque valeur $R_{crit.}$ correspondrait aussi à un point de perte d'unicité.

Si le processus de branchement $R_{crit.}$, $R'_{crit.}$, $R''_{crit.}$... continuait, pour donner lieu à une *infinité* de solutions, la conjecture de Landau-Hopf serait validée. En revanche, si, après un nombre *fini* de points de bifurcations les solutions étaient attrapées par un attracteur étrange, la théorie de Ruelle-Takens s'imposerait.

Quel modèle choisir pour la turbulence? Perte d'analyticité des solutions "turbulentes" (Leray), nombres infini de points de bifurcations (Landau-Hopf), ou encore, comportement chaotique et attracteurs étranges (Ruelle-Takens)?

Au-delà du nombre de Reynolds critique $R_{crit.}$, la situation reste inextricable et fort controversée. Les trois théories phénoménologiques pourraient contribuer à donner une description de la turbulence de manière complémentaire et non pas concurrentielle. Par ailleurs, loin d'avoir trouvé un consentement unanime, *aucune* de ces conjectures n'a été rigoureusement démontrée pour les équations de Navier-Stokes, bien que *chacune* l'ait été, soit pour des équations modèle (Boussinesq, Burgers, Lorenz, ...), soit pour des écoulements particuliers (Couette, Bénard...).

Revenons à la notion de stabilité. Quel est le lien entre l'existence et l'unicité des solutions et leur stabilité? Dans la définition III.1 nous n'avons pas précisé en quel sens $v(t,x)$ et $\tilde{v}(t,x)$ sont solutions des équations de Navier-Stokes. Ni quelle norme choisir pour en vérifier la notion de stabilité. En effet, le plus souvent, ces deux concepts sont liés.

Ainsi, pour les solutions *classiques* on choisira la norme L^∞ de la convergence uniforme, tandis que si l'on considère les solutions *faibles* de Leray, on utilisera plutôt la norme L^2 de l'énergie. Enfin, pour les solutions `mild` de Kato on préférera la norme de l'espace de Lebesgue L^3, ou d'autres normes invariantes par l'action des dilatations normalisées, $v(\cdot) \mapsto \lambda v(\lambda \cdot)$, $\forall \lambda > 0$, [15].

Pour que les cadres fonctionnels précédents soient bien adaptés au problème, il faudrait alors être en mesure de définir un nombre de Reynolds R tel qu'il existe une et une seule solution (régulière) pour la norme choisie et qu'elle soit stable pour $0 < R < R_{crit.}$ Commençons par analyser les solutions de Leray d'énergie finie. On dispose d'un théorème d'existence globale (*sans* unicité). A la différence des solutions de Kato, dont l'existence (*et* l'unicité) est garantie seulement lorsque la quantité $\|v_0\|/\nu$ est suffisamment petite, les solutions de Leray ne semblent pas faire intervenir de restrictions sur le nombre de Reynolds. Mais le calcul que nous allons présenter montre que les solutions d'énergie finie ne sont pas toujours stables au sens de la norme L^2.

Vérifier qu'une solution est stable pour une norme donnée ($v_0 - \tilde{v}_0 \neq 0$) est tout aussi difficile que d'en prouver l'unicité ($v_0 - \tilde{v}_0 = 0$). On ne dispose pas de théorie générale pour l'unicité des solutions faibles de Leray. C'est pourquoi les manipulations que nous allons effectuer seront formelles et nous renvoyons le lecteur aux travaux de J. Serrin [119, 120] et de D. D. Joseph [59] pour une analyse plus approfondie.

Fixons une solution (faible) $v(t,x), P(t,x)$ des équations de Navier-Stokes de condition initiale v_0. Si $\tilde{v}(t,x), \tilde{P}(t,x)$ est une perturbation, à savoir une autre solution (faible) associée à la condition initiale $\tilde{v}_0$, formons la différence

$$u(t,x) = \tilde{v}(t,x) - v(t,x), \quad Q(t,x) = \tilde{P}(t,x) - P(t,x), \tag{3.1}$$

qui vérifie alors (faiblement) le système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + (v \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)v + (u \cdot \nabla)u = -\nabla Q + \nu \Delta u \\ \nabla \cdot u = 0 \\ u(0,x) = \tilde{v}_0 - v_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Une précision: si la variable x varie dans l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier ou si l'on considère un ouvert Ω borné au lieu de l'espace $\mathbb{R}^3$, les conditions aux limites et à l'infini vérifiées par $v(t,x)$ et $\tilde{v}(t,x)$ seront les mêmes. Dans les deux cas, la différence $u(t,x)$ prend, en tout temps, la valeur zéro aux bords.

Cette remarque nous permet de déduire une estimation a priori sur l'énergie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int |u|^2 = \frac{1}{2} \|u\|_2^2 \tag{3.3}$$

associée à la fonction différence u.

Pour le voir, multiplions l'équation (3.2) par $u(t,x)$ et intégrons le résultat sur $\mathbb{R}^3$ (ou sur Ω). Cela donne

$$\frac{d}{dt} \int \frac{|u|^2}{2} + \int (v \cdot \nabla)u \cdot u + \int (u \cdot \nabla)v \cdot u + \int (u \cdot \nabla)u \cdot u = -\int \nabla Q \cdot u + \nu \int \Delta u \cdot u. \tag{3.4}$$

Or, puisque $u(t,x)$ s'annule à l'infini (resp. sur $\partial\Omega$) nous pouvons évaluer, à l'aide de la formule de Stokes, le terme

$$\int (v \cdot \nabla) u \cdot u = \frac{1}{2} \int v \cdot \nabla |u|^2 = \frac{1}{2} \int \nabla \cdot (v|u|^2) = 0 \tag{3.5}$$

et il en est de même pour

$$\int (u \cdot \nabla) u \cdot u = \frac{1}{2} \int u \cdot \nabla |u|^2 = \frac{1}{2} \int \nabla \cdot (u|u|^2) = 0 \tag{3.6}$$

ainsi que pour

$$\int \nabla Q \cdot u = \int \nabla \cdot (Qu) = 0. \tag{3.7}$$

Par ailleurs, nous pouvons écrire

$$\int (u \cdot \nabla) v \cdot u = -\int (u \cdot \nabla) u \cdot v + \int \nabla \cdot [(v \cdot u) u] = -\int (u \cdot \nabla) u \cdot v \tag{3.8}$$

et

$$\nu \int \Delta u \cdot u = -\nu \|\nabla u\|_2^2, \tag{3.9}$$

ce qui nous permet de simplifier l'expression (3.4) pour obtenir *l'égalité* d'énergie suivante

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int (u \cdot \nabla) u \cdot v - \nu \|\nabla u\|_2^2. \tag{3.10}$$

Le terme $\int (u \cdot \nabla) u \cdot v$ exprime la quantité d'énergie qui passe de l'écoulement de base $v(t,x)$ à l'écoulement perturbé $\tilde{v}(t,x)$, tandis que le terme $-\nu \|\nabla u\|_2^2$, qui est toujours négatif, mesure l'énergie de dissipation due à la viscosité.

Une condition suffisante pour que la solution $v(t,x)$ soit stable au sens de la norme L^2 est alors simplement donnée par l'inégalité

$$\frac{dE(t)}{dt} < 0 \qquad \forall t > 0. \tag{3.11}$$

En effet, sous cette condition, la fonction $\|\tilde{v}(t) - v(t)\|_2$ serait décroissante en temps, ce qui permettrait de vérifier le critère de la définition III.1.

Si, en outre, on avait

$$\lim_{t \to \infty} E(t) = 0 \tag{3.12}$$

alors $v(t,x)$ serait aussi asymptotiquement stable.

Cette simple méthode, qui consiste à réduire un problème de stabilité hydrodynamique en une recherche de dissipation d'énergie, a été introduite par O. Reynolds [113] (1883) et W. Mc F. Orr [103] (1907) dans le cadre de la théorie élaborée par A. M. Lyapunov [94] (1893). Les fonctions de type énergie décroissantes en temps sont appelées *fonctions de Lyapunov* (Définition IV.1).

Revenons à (3.10). Une condition suffisante pour la stabilité est alors donnée par

$$\frac{\int (u \cdot \nabla) u \cdot v}{\nu \|\nabla u\|_2^2} < 1 \qquad \forall t > 0, \tag{3.13}$$

ce qui est équivalent à

$$0 < R < R_{crit.}(t) \qquad \forall t > 0, \tag{3.14}$$

où nous avons introduit le nombre de Reynolds R par la relation

$$R =: \frac{1}{\nu} \tag{3.15}$$

(ou, plus simplement nous avons utilisé la formulation adimensionnelle (2.3) des équations de Navier-Stokes) et nous avons défini le nombre critique $R_{crit.}(t)$ à l'aide d'un problème variationnel (isopérimétrique) avec contraintes

$$\frac{1}{R_{crit.}(t)} = \sup_{u \in \mathcal{O}} \frac{\int (u \cdot \nabla) u \cdot v}{\|\nabla u\|_2^2} \tag{3.16}$$

et

$$\mathcal{O} = \{u(t) : \quad \nabla \cdot u = 0, \quad u_{|\partial\Omega} = 0 \quad \forall t > 0\}. \tag{3.17}$$

Venons-en maintenant à la stabilité asymptotique de la solution v. Pour cela, écrivons *l'inégalité* de l'énergie

$$\frac{dE(t)}{dt} \leq 2 \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2} \left[\frac{1}{R_{crit.}(t)} - \frac{1}{R} \right] E(t) \tag{3.18}$$

et définissons la quantité

$$\alpha(t) = \inf_{u \in \mathcal{O}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2}. \tag{3.19}$$

Une simple application du lemme de Gronwall nous permet alors d'écrire

$$\|v(t) - \tilde{v}(t)\|_2^2 \leq \|v_0 - \tilde{v}_0\|_2^2 \exp[-I(t)], \tag{3.20}$$

où

$$I(t) =: 2 \int_0^t \alpha(\tau) \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_{crit.}(\tau)} \right) d\tau. \tag{3.21}$$

Il suffit alors que $I(\infty) = \infty$ existe, pour obtenir la stabilité asymptotique (de type exponentiel) pour la solution $v(t, x)$.

Une remarque finale nous permettra peut-être de clarifier la discussion précédente.

En particulier, si on choisit la solution $v(t, x) \equiv 0$ identiquement nulle pour vérifier la notion de stabilité, on est amené à étudier la décroissance en temps de la fonctionnelle d'énergie $E(t)$ associée aux solutions (faibles) $u(t, x)$ des équations de Navier-Stokes. Dans ce cas, l'identité (3.10) s'écrit sous la forme bien connue

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{\|u\|_2^2}{2} = -\nu \|\nabla u\|_2^2 < 0, \tag{3.22}$$

ce qui garantit immédiatement la stabilité de la solution nulle.

Il est beaucoup plus difficile de vérifier la stabilité asymptotique, à savoir de démontrer que pour les solutions (faibles) des équations de Navier-Stokes

$$\lim_{t \to \infty} \|u\|_2 = 0. \tag{3.23}$$

Annoncé comme conjecture dans un travail de J. Leray [85], ce résultat a été obtenu par T. Kato [64] en dimension $n = 2$ (plus exactement pour toutes les normes $L^n(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$) et ensuite démontré de manière systématique pour $L^2(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$ par plusieurs auteurs (M. E. Schonbek [118], M. Wiegner [138], R. Kajikiya et T. Miyakawa [60]). Nous y reviendrons dans les pages suivantes.

Avant de passer aux solutions de Kato, on voudrait signaler ici un résultat obtenu récemment par Y. Meyer [97]. Il s'agit d'un théorème exprimant la sensibilité aux conditions initiales des solutions de Leray.

THÉORÈME III.1 [97]. *Il n'existe pas d'application de classe $\mathcal{C}^2$ qui associe $v(t,x) \in L^\infty([0,T);L^2(\mathbb{R}^3))$, solution faible au sens de Leray, à la condition initiale $v_0 \in L^2(\mathbb{R}^3)$.*

Par contre, comme nous allons le voir dans les pages suivantes (Lemme IV.1), l'application qui à la donnée initiale $v_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ associe la solution `mild` de Kato $v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T);L^3(\mathbb{R}^3))$ est analytique au voisinage de zéro, en tant que fonctionnelle agissant sur $L^3(\mathbb{R}^3)$ à valeurs dans $\mathcal{C}([0,T);L^3(\mathbb{R}^3))$.

4. Solutions de Kato. Nous allons nous intéresser aux solutions `mild` des équations de Navier-Stokes. Il s'agit des fonctions $v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T);X)$, fortement continues de l'intervalle $[0,T)$ à valeurs dans un espace de Banach X, solutions de l'équation intégrale `mild`

$$v(t) = S(t)v_0 - B(v,v)(t) + \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}f(s)ds, \tag{4.1}$$

où

$$B(v,u)(t) =: \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}\nabla\cdot(v\otimes u)(s)ds, \tag{4.2}$$

$\mathbb{P}$ et $S(t)$ étant respectivement l'opérateur de projection de Leray-Hopf sur les champs de vecteurs à divergence nulle et le semigroupe de Stokes, qui coïncide, dans l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier avec l'opérateur de la chaleur $\exp(t\nu\Delta)$.

Nous renvoyons le lecteur à [96] pour la définition précise du problème ainsi que pour l'équivalence, parfaitement rigoureuse, avec la recherche des solutions classiques du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \nu\Delta v = -(v\cdot\nabla)v - \nabla P + f \\ \nabla\cdot v = 0 \\ v(0) = v_0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Nous limiterons notre attention aux solutions `mild` $v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T);X)$ en l'absence de force extérieure ($f=0$), et lorsque la variable x occupe l'espace $\mathbb{R}^3$ entier. Aussi seul un cadre fonctionnel X sera-t-il analysé : il s'agit de l' espace de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$.

Nous disposons alors de deux théorèmes fondamentaux.

THÉORÈME IV.1. *Soit $p > 3$ fixé. Si $v_0 \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $\nabla\cdot v_0 = 0$, il existe $T = T(\|v_0\|_p,\nu) > 0$ et une unique solution* `mild` *$v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T);L^p(\mathbb{R}^3))$ des équations de Navier-Stokes.*

THÉORÈME IV.2. *Si $v_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$, $\nabla\cdot v_0 = 0$, il existe $T = T(v_0,\nu) > 0$ et une unique solution* `mild` *$v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T);L^3(\mathbb{R}^3))$ des équations de Navier-Stokes. En outre, il existe $\delta > 0$ tel que, si $\|v_0\|_3/\nu < \delta$, alors $T = \infty$ et $\lim_{t\to\infty}\|v(t)\|_3 = 0$.*

Avant de donner leur démonstration, ajoutons à ces résultats quelques commentaires.

L' espace $L^3(\mathbb{R}^3)$ apparaît comme un cas "limite" [15, 17, 43, 44, 83] bien particulier. D'abord car à l'intérieur de la famille fonctionnelle des espaces de Lebesgue sa norme est la seule invariante par l'action des dilatations normalisées, à savoir la transformation $v(\cdot) \mapsto \lambda v(\lambda \cdot)$, $\lambda > 0$. Ensuite, il s'agit de l' espace le mieux "adapté" [96] à l'étude des solutions `mild`: il permette d'en assurer l'existence globale, pour des données initiales petites par rapport à la viscosité.

La première formulation `mild` des équations de Navier-Stokes est contenue dans [45, 68] : connue depuis le début des années soixante, *l'existence* d'une solution `mild` des équations de Navier-Stokes dans les espaces de Sobolev "limites" $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ [45] et $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, Ω ouvert borné [68] est à l'origine des travaux fondateurs de T. Kato et H. Fujita. Quant à *l'unicité*, elle est due à G. Furioli, P. G. Lemarié et E. Terraneo [43, 44, 83].

Pour les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^3)$, la restriction $p > 3$ apparaît déjà dans les travaux de J. Leray [85, pages 227, 231]. Annoncée dans [45], la première démonstration complète du théorème IV.1 n'est donnée qu'en 1972 par E. B. Fabes, B. F. Jones et N. M. Rivière [37] et améliorée par la suite par Y. Giga et T. Miyakawa [47, 49, 50, 53, 98]. Un problème encore ouvert à ce jour est de savoir si de telles solutions locales sont en effet globales en temps. La non-invariance de la norme $L^p(\mathbb{R}^3)$, $p \neq 3$ par l'action des dilatations normalisées, permet d'assurer qu'un tel résultat d'existence globale ne dépendrait pas de la taille des données initiales. Mais, comme pour les solutions faibles de Leray, une restriction sur le nombre de Reynolds pourrait apparaître dans la recherche des solutions stables.

Avant de passer au cas critique $p = 3$, un mot concernant le cas sous-critique $1 \leq p < 3$. Dans la seule hypothèse que v_0 appartienne à l'espace $L^p(\mathbb{R}^3)$, $1 \leq p < 3$, accompagnée bien sûr par la condition de divergence nulle $\nabla \cdot v_0 = 0$, aucun résultat d'existence et unicité, ni locale ni globale, n'est connu. Récemment, dans un article de revue [67], T. Kato a avancé l'hypothèse que le problème de Cauchy au sens `mild` soit mal posé si $1 \leq p < 3$. Si cette conjecture s'avère juste, pour $p = 2$, on n'obtiendrait pas de solutions (globales) régulières, uniques d'énergie finie, et le scénario imaginé par J. Leray pourrait se dessiner. Si par exemple, en adaptant un argument de A. Haraux et F. Weissler [56], on arrivait à démontrer l'existence d'une solution auto-similaire non nulle de la forme $v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{t}} V(\frac{x}{\sqrt{t}})$, avec $V \in L^p(\mathbb{R}^3)$ et $p < 3$, alors le problème de Cauchy associée à la donnée initiale nulle admettrait au moins deux solutions différentes, à savoir les fonctions v et 0. En effet, $\lim_{t \to 0} \| \frac{1}{\sqrt{t}} V(\frac{x}{\sqrt{t}}) \|_p = 0$, si $p < 3$. Enfin, il est clair que si $1 \leq p < 2$ une condition supplémentaire doit être imposée a priori sur la solution $v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T); L^p(\mathbb{R}^3))$, pour pouvoir définir, au sens des distributions, le produit $v \otimes v$.

L'histoire du théorème IV.2 se situe entre 1979 et 1997. F. Weissler donne le premier théorème d'existence de solutions `mild` à valeurs dans l'espace limite $L^3(\Omega)$ lorsque Ω est le demi-espace $\mathbb{R}^3_+$ [137]. Vient ensuite la généralisation au cas d'un ouvert borné Ω par Y. Giga et T. Miyakawa [53]. Enfin, en 1984 T. Kato [64] démontre, à l'aide de seules inégalités de Young et de Hölder, et sans utiliser les puissances fractionnaires de l'opérateur de Stokes, l'existence de solutions locales (resp. globales) avec données (resp. petites) dans $L^3(\mathbb{R}^3)$.

Depuis leur introduction, les solutions de Kato se sont imposées comme alternatives aux solutions faibles introduites par Leray.

Entre 1962 et 1964, dates de publications des articles en collaboration avec H. Fujita, T. Kato quitte Tokyo pour Stanford : son travail influence non seulement la nouvelle école japonaise d'après-guerre (K. Masuda, S. Ukai, Y. Giga, T. Miyakawa, T. Kobayashi, T. Muramatu, H. Kozono, M. Yamazaki), mais aussi une partie de l'école américaine (F. Weissler, G. Ponce, M. E. Taylor, C. Kenig, C. P. Calderón). Permettant de traiter les cadres fonctionnels les plus variés, les solutions `mild` sont ainsi adaptées aux espaces de Morrey-Campanato [54, 66, 123, 39], Triebel-Lizorkin [11–13] et Besov [75–77].

En Europe, en revanche, c'est l'approche de Leray dans les espaces définis par une norme d'énergie qui l'emporte pour longtemps. Dans cette direction on citera les noms de O. A. Ladyzhenskaya, A. A. Kisilev, K. K. Golovkin, V. A. Solonnikov dans l' ancienne Union Soviétique; E. Hopf, W. von Wahl, M. Wiegner, H. Sohr en Allemagne et G. Prodi, H. Beirão da Veiga, G. P. Galdi en Italie. Mais c'est surtout en France, en particulier à Paris, qu'une vraie tradition autour des solutions faibles de Navier-Stokes s'établit. Prisonnier de guerre jusqu'en avril 1945, et voulant éviter de collaborer à l'effort industriel ennemi, Jean Leray abandonne, sans plus y revenir, la mécanique des fluides (sujet de sa thèse [84] en 1933 sous la direction d'Henry Villat [132]) pour se consacrer à la topologie algébrique. Mais les bases de son travail sont posées et les effets sur les générations suivantes (J.-L. Lions [91], R. Temam [125], P.-L. Lions [92]) seront considérables.

Solutions `mild` d'un coté et faibles de l'autre. Quel lien peut-on établir entre elles?

J. Leray démontre que si deux solutions, l'une régulière et l'autre faible, ont la même donnée initiale, alors elles coïncident. Mais il n'est pas connu si les solutions faibles sont complètement déterminées par leur valeur à un instant initial donné.

Plus exactement, T. Kato [64] démontre (à l'aide d'un résultat d'unicité de J. Serrin et de H. Sohr et W. von Wahl) que si v est une solution faible avec $v_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ et $\nabla \cdot v_0 = 0$, alors v coïncide avec une solution `mild` régulière sur un certain intervalle $[0, T)$, avec $T = \infty$ si $\|v_0\|_3/\nu < \delta$.

Les solutions de Leray laissent ouvert le problème de l'unicité et celui de l'explosion en temps fini, tandis que les solutions globales de Kato sont, quant à elles, uniques et régulières.

A Leray de résumer en 1994 [87] : *"L'étude théorique d'écoulements fluides à donnée initiale aboutit donc dans des cas très divers à une même conclusion: l'existence d'au moins une solution faible qui est régulière et unique près de l'instant initial, et qui existe à toute époque ultérieure. C'est un théorème d'existence "faible"; existe-t-il des théorèmes de régularité et d'unicité le complétant?*

Autrement dit, dans ces cas: un écoulement fluide initialement régulier reste régulier durant un certain intervalle de temps; ensuite il se poursuit indéfiniment; mais reste-t-il régulier et bien déterminé?

On ignore la réponse à cette double question. Elle fut posée il y a soixante ans dans un cas extrêmement particulier [85]. Alors H. Lebesgue, consulté, déclara: "Ne consacrez pas trop de temps à une question aussi rebelle. Faites autre chose !" ".

Leray remarque que si une solution faible v devient turbulente au temps T, alors la quantité $u(t) = sup_{x\in\mathbb{R}^3}\sqrt{v \cdot v}$ doit exploser comme $\frac{C}{\sqrt{T-t}}$ lorsque t tends vers T. Il suggère ensuite, sans pouvoir le démontrer, qu'il pourrait exister des *solutions turbulentes* *auto-similaires*, c'est-à-dire de la forme $v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} V(\frac{x}{\sqrt{T-t}})$. Il aboutit à la conclusion suivante [84] : "*[...] je n'ai malheureusement pas réussi à forger un exemple d'une telle singularité. [...] Si j'avais réussi à construire des solutions des équations de Navier qui deviennent irrégulières, j'aurais le droit d'affirmer qu'il existe effectivement des solutions turbulentes ne se réduisant pas, tout simplement à des solutions régulières. Mais si cette position était fausse, la notion de solution turbulente, qui n'aurait dès lors plus à jouer aucun rôle dans l'étude des liquides visqueux, ne perdrait pas son intérêt: il doit bien se présenter des problèmes de Physique mathématique pour lesquels les causes physiques de régularité ne suffisent pas à justifier les hypothèses faites lors de la mise en équation; à ces problèmes peuvent alors s'appliquer des considérations semblables à celles que j'expose ici*".

Ce n'est qu'en 1996 que l'école tchèque de J. Nečas démontre qu'une solution auto-similaire $v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{T-t}} V(\frac{x}{\sqrt{T-t}})$ turbulente pour $t \to T$ ne peut exister si $V(x)$ appartient à l'espace $L^3(\mathbb{R}^3)$ [101] (ce résultat est par la suite généralisé par T. P. Tsai [131] et par J. Málek, J. Nečas, M. Pokorný et M. E. Schonbek [95]). Ainsi le cadre fonctionnel par excellence des solutions `mild`, l'espace de Lebesgue $L^3(\mathbb{R}^3)$, et la question principale concernante les solutions faibles, leur possible irrégularité, se trouvent pour la première fois réconciliés.

D'un autre coté, suite au travail révélateur de P. Federbush "Navier and Stokes meet the wavelets" [39], l'introduction des méthodes en ondelettes, au début des années quatre-vingt, faisait rêver et croire qu'à l'aide d'une décomposition localisée en espace et en fréquence seraient dévoilés les mystères de la turbulence.

Dès 1992, Y. Meyer lançait ses élèves sur le programme séduisant de P. Federbush. L'analyse de Littlewood-Paley et les méthodes de paraproduits à la Bony remplaçaient les ondelettes. Mais surtout les résultats de Kato étaient améliorés grâce à l'utilisation du calcul paradifférentiel [15–19, 107–110].

C'est à ce moment que les espaces de Besov et les solutions auto-similaires globales et régulières font leur apparition, même si, dans le contexte des équations de Navier-Stokes, les espaces de Besov avaient été déjà traités par T. Kobayoshi et T. Muramatu [75] et l'existence de solutions auto-similaires déjà prouvée par Y. Giga et T. Miyakawa [54] (voir aussi [117, 102]).

Les résultats obtenus par Y. Meyer et son école sont ensuite adaptés à d'autres équations d'évolution [114–116], en particulier celle de Schrödinger [25].

Dès lors, nombre de thèses de doctorat se succèdent, consacrées à Navier-Stokes, aux solutions de Kato et aux espaces de Besov [15, 110, 114, 134, 34, 104, 42, 127].

En 1994 H. Brézis [9, 10, 51] et en 1996 J.-Y. Chemin [30, 31] s'attaquent, indépendamment, à une question fondamentale laissée irrésolue depuis les travaux de T. Kato et H. Fujita : l'unicité des solutions `mild` dans leur espace naturel d'appartenance. Mais ils ne parviennent qu'à des réponses partielles.

Le tout culmine par le résultat obtenu par G. Furioli, P.-G. Lemarié et E. Terraneo [43, 44], où la question de l'unicité est finalement résolue *sans aucune hypothèse supplémentaire*. Dans leur démonstration les espaces de Besov jouent un rôle fondamental.

Quelque temps après [96], Y. Meyer simplifie considérablement la démonstration de l'unicité de P.-G. Lemarié et ses élèves (et celle de l'existence des solutions auto-similaires) en réduisant le problème à l'étude des solutions dans l'espace de Lebesgue faible $L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$. C'est sur ce même espace $L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$ que nous reviendrons dans les pages suivantes (lemmes IV.7-8).

4.1. *Démonstration des théorèmes IV.1 et IV.2.* Commençons par une remarque évidente. Si on introduit les variables

$$\begin{aligned} v' &= \frac{v}{\nu} \\ t' &= \nu t, \end{aligned} \tag{4.4}$$

l'équation intégrale (4.1) est transformée en la même équation avec $\nu = 1$. C'est pourquoi, dans ce qui suit, nous nous limiterons, sans perte de généralité, au cas $\nu = 1$.

Alors que l'existence des solutions faibles se fait à l'aide des inégalités de l'énergie et des critères de compacité faible, la démonstration de l'existence des solutions `mild` fait usage de l'algorithme de point fixe de Picard. Il s'agit du résultat suivant [15, 96]:

Lemme IV.1. *Soit X un espace de Banach space et $\| \ \|$ sa norme. Si $B : X \times X \to X$ est un opérateur bilinéaire, tel que pour tout $x_1, x_2 \in X$ on ait*

$$\|B(x_1, x_2)\| \leq \eta \|x_1\| \|x_2\|, \tag{4.5}$$

alors, pour tout $y \in X$ tel que

$$4\eta \|y\| < 1, \tag{4.6}$$

il existe une solution $x \in X$ de l'équation

$$x = y + B(x, x), \tag{4.7}$$

qui est l'unique parmi celles qui satisfont la condition

$$\|x\| < \frac{1}{2\eta}. \tag{4.8}$$

Enfin l'application $y \to x$ ainsi définie est analytique.

Nous allons appliquer ce lemme abstrait à l'équation

$$v(t) = S(t)v_0 - \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}\nabla \cdot (v \otimes v)(s)ds, \tag{4.9}$$

dont la solution $v(t, x)$ sera cherchée dans l'espace (naturel)

$$\mathcal{N}_p(T) = \mathcal{C}([0, T); L^p(\mathbb{R}^3)). \tag{4.10}$$

Il s'agit des fonctions $v(t, x)$ fortement continues de l'intervalle $[0, T)$ à valeurs dans l'espace $L^p(\mathbb{R}^3)$, $3 \leq p \leq \infty$, telles que la quantité

$$\|v\|_{\mathcal{N}_p(T)} = \sup_{0<t<T} \|v(t, x)\|_p \tag{4.11}$$

soit finie. Pour $v_0 \in L^p(\mathbb{R}^3)$ donnée, il convient de définir aussi le sous-espace $\mathcal{A}_p(T)$ de $\mathcal{N}_p(T)$ des *fonctions $v(t, x)$ admissibles*, c'est-à-dire qui vérifient en outre

$$\lim_{t\to 0} \|v(t) - v_0\|_p = 0. \tag{4.12}$$

Avec la convention que, pour $p = \infty$, la topologie forte de L^∞ est remplacée par la topologie de la norme faible $*$, ceci à cause de la non-séparabilité de l'espace L^∞ [15, 17, 96].

Pour appliquer l'algorithme de point fixe il faut établir la continuité de l'opérateur bilinéaire

$$B(v,u)(t) = \int_0^t S(t-s)\mathbb{P}\nabla \cdot (v \otimes u)(s)ds. \tag{4.13}$$

Comme dans [15], nous allons nous limiter à l'étude de l'opérateur scalaire

$$B(f,g)(t) = \int_0^t (t-s)^{-2}\Theta\left(\frac{\cdot}{\sqrt{t-s}}\right) * (fg)(s)ds \tag{4.14}$$

où $f = f(t,x)$ et $g = g(t,x)$ sont deux champs scalaires et $\Theta = \Theta(x)$ une fonction analytique d'intégrale nulle, $\int_{\mathbb{R}^3} \Theta = 0$, qui est $O(|x|^{-4})$ pour $|x| \to \infty$. Pour simplifier, on choisira pour Θ la fonction dont la transformée de Fourier est donnée par

$$\hat{\Theta}(\xi) = |\xi| e^{-|\xi|^2}. \tag{4.15}$$

L'importance de cette remarque vient de ce qu'elle nous permet de considérer l'opérateur de projection $\mathbb{P}$, celui de divergence $\nabla\cdot$ et le semi-groupe de la chaleur $S(t)$ comme un seul opérateur de convolution Θ. Parmi les conséquences de cette simplification nous en citons deux. D'abord, à la différence de l'énoncé originel de T. Kato, aucune condition supplémentaire sur le gradient de la solution v n'apparaît dans le théorème IV.2. Ensuite, dans le théorème IV.1 nous pouvons inclure le cas $p = \infty$, à une seule condition près, de changer la continuité forte pour $t = 0$ par celle de la convergence faible $*$. Démontré dans [15, 17] en utilisant la structure scalaire simplifiée du terme bilinéaire (voir aussi G. H. Knightly [14, 73, 74]), ce dernier résultat est inattendu car l'opérateur $\mathbb{P}$ tout seul n'est pas borné dans $L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Récemment, Y. Giga et son école à Sapporo ont exhibé une démonstration différente de ce même résultat d'existence de solutions locales bornées [52].

Après ce préambule, venons-en à la démonstration du théorème IV.1. On dispose de deux lemmes, dont la preuve est élémentaire (voir [15]).

LEMME IV.2. *Soient $1 \le p \le \infty$ et $0 < T \le \infty$ fixés. Si $v_0 \in L^p(\mathbb{R}^3)$, alors $S(t)v_0 \in \mathcal{A}_p(T)$ et*

$$\|S(t)v_0\|_{\mathcal{N}_p(T)} = \|v_0\|_p. \tag{4.16}$$

LEMME IV.3. *Soient $3 < p \le \infty$ et $0 < T < \infty$ fixés. L'opérateur bilináire $B(f,g)(t)$ est bicontinu de $\mathcal{N}_p(T) \times \mathcal{N}_p(T) \to \mathcal{N}_p(T)$ et on a*

$$\|B(f,g)(t)\|_{\mathcal{N}_p(T)} \le \eta_p(T)\|f(t)\|_{\mathcal{N}_p(T)}\|g(t)\|_{\mathcal{N}_p(T)} \tag{4.17}$$

avec

$$\eta_p(T) = C_p T^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{p})} = \frac{C}{1-\frac{3}{p}} T^{\frac{1}{2}(1-\frac{3}{p})}. \tag{4.18}$$

Relions ces deux lemmes au théorème de point fixe. Si la condition

$$4\eta_p(T)\|v_0\|_p < 1 \tag{4.19}$$

est vérifiée, l'existence de la solution $v(t,x)$ du théorème IV.1 est assurée. Concernant son unicité, il suffit de remarquer que, pour toute autre solution `mild` $v'(t,x)$ avec $v'(0,x) = v(0,x)$, on a

$$\|v(t) - v'(t)\|_{\mathcal{N}_p(T)} \leq (\|v(t)\|_{\mathcal{N}_p(T)} + \|v'(t)\|_{\mathcal{N}_p(T)})\eta_p(T)\|v(t) - v'(t)\|_{\mathcal{N}_p(T)}. \tag{4.20}$$

Le théorème IV.1 suit alors sans difficulté [15].

La démonstration du théorème IV.2 est plus compliquée, car non seulement la constante C_p dans (4.18) diverge si $p \to 3$, mais, comme l'a montré F. Oru [104], l'opérateur bilinéaire vectoriel $B(v,u)$ *n'est pas continu* de $\mathcal{N}_3(T) \times \mathcal{N}_3(T) \to \mathcal{N}_3(T)$.

Pour contourner cette difficulté dans le demi-espace $\mathbb{R}^3_+$, F. Weissler, suivant T. Kato et H. Fujita, introduit des espaces arbitraires où la bicontinuité de B est assurée, ce qui permet d'appliquer le schéma de point fixe et obtenir une solution qui s'avère appartenir, *ultimo*, à l'espace $\mathcal{C}([0,T); L^3(\mathbb{R}^3))$.

T. Kato utilise la même stratégie pour l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier. Dans la relecture de l'algorithme de Kato donnée dans [15, 21, 110], les espaces auxiliaires $\mathcal{K}_q(T)$ sont définis de la manière suivante. Une fonction $v(t,x)$ appartient à $\mathcal{K}_q(T)$, avec q fixé dans l'intervalle $3 \leq q \leq \infty$ et $\alpha = \alpha(q) = 1 - \frac{3}{q}$, si elle vérifie les conditions

$$t^{\frac{\alpha}{2}} v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T); L^q(\mathbb{R}^3)) \tag{4.21}$$

et

$$\lim_{t \to 0} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t)\|_q = 0, \tag{4.22}$$

et, si $T = \infty$,

$$\lim_{t \to \infty} t^{\frac{\alpha}{2}} \|v(t)\|_q = 0. \tag{4.23}$$

Les deux lemmes suivants (voir [15] pour la démonstration) permettent d'appliquer l'algorithme de point fixe dans l'espace $\mathcal{K}_q(T)$.

LEMME IV.4. *Soient* $3 < q < \infty$ *et* $0 < T \leq \infty$ *fixés. Si* $v_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$*, alors* $S(t)v_0 \in \mathcal{K}_q(T)$.

LEMME IV.5. *Soient* $3 < q < \infty$ *et* $0 < T \leq \infty$ *fixés. L'opérateur bilinéaire* $B(f,g)(t)$ *est bicontinu dans* $\mathcal{K}_q(T) \times \mathcal{K}_q(T) \to \mathcal{K}_q(T)$ *et on a*

$$\|B(f,g)(t)\|_{\mathcal{K}_q(T)} \leq \eta_q \|f(t)\|_{\mathcal{K}_q(T)} \|g(t)\|_{\mathcal{K}_q(T)}. \tag{4.24}$$

où la constante η_q *ne dépend pas de* T.

On fixe alors q dans l'intervalle $3 < q < \infty$ et on obtient une solution `mild` $v(t,x) \in \mathcal{K}_q(T)$ dès que la condition

$$4\eta_q \sup_{0<t<T} t^{\frac{\alpha}{2}} \|S(t)v_0\|_q < 1 \tag{4.25}$$

est vérifiée. Or, grâce au lemme IV.4, ceci est le cas si $\|v_0\|_3 < \frac{C}{4\eta_q}$ et $T = \infty$, mais aussi si $v_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ est arbitraire et $T = T(v_0)$ est suffisamment petit.

Une simple application du lemme suivant permet d'assurer que la solution $v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T); L^3(\mathbb{R}^3))$ et de prouver (4.12) pour $p = 3$ et (4.23) pour $T = \infty$ et $q = 3$. En effet, on obtient encore plus: que $v(t,x) \in \mathcal{K}_q(T)$ pour *tout* $3 < q < \infty$.

Lemme IV.6. *Soit* $0 < T \leq \infty$ *fixé. L'opérateur bilinéaire* $B(f,g)(t)$ *est bicontinu de* $\mathcal{K}_q(T) \times \mathcal{K}_q(T) \to \mathcal{K}_p(T)$ *si* $3 \leq p < \frac{3q}{6-q}$ *et* $3 < q < 6$*, si* $3 \leq p < \infty$ *et* $q = 6$*, et enfin si* $\frac{q}{2} \leq p \leq \infty$ *et* $6 < q < \infty$*.*

Pour terminer la preuve du théorème IV.2 il ne nous reste plus qu'à démontrer l'unicité de la solution $v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T); L^3(\mathbb{R}^3))$ (à ce propos voir aussi [93]).

Ce résultat fondamental a été démontré en 1997 par G. Furioli, P.-G. Lemarié et E. Terraneo [43, 44] en utilisant la bicontinuité de l'opérateur $B(f,g)$ respectivement de $L^\infty((0,T); L^3(\mathbb{R}^3)) \times L^\infty((0,T); L^3(\mathbb{R}^3)) \to L^\infty((0,T); \dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}(\mathbb{R}^3))$ et de $L^\infty((0,T); \dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)) \times L^\infty((0,T); L^3(\mathbb{R}^3)) \to L^\infty((0,T); \dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}(\mathbb{R}^3))$.

Quelque temps après [96], Y. Meyer simplifiait la démonstration de Lemarié et de ses élèves en se servant seulement de la bicontinuité de B de $L^\infty((0,T); L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)) \times L^\infty((0,T); L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)) \to L^\infty((0,T); L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3))$. C'est ce résultat clef que nous allons démontrer. En effet, nous obtenons un résultat plus précis, à savoir les lemmes IV.7 et IV.8 (voir aussi [20]).

Lemme IV.7. *Soient* $\frac{3}{2} < q < \infty$ *et* $0 < T \leq \infty$ *fixés. L'opérateur bilinéaire* $B(f,g)(t)$ *est bicontinu de* $L^\infty((0,T); L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)) \times L^\infty((0,T); L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)) \to L^\infty((0,T); \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}(\mathbb{R}^3))$.

On démontre ce lemme par dualité. On considère alors une fonction de test $\chi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ et on en évalue le crochet de dualité dans $\mathbb{R}^3$ avec le terme bilinéaire. Cela donne

$$|\langle B(f,g)(t), \chi\rangle| \leq \int_0^t |\langle s^{-2}\Theta\left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}}\right) * \chi, (fg)(t-s)\rangle| ds. \tag{4.26}$$

Si on disposait d'une généralisation de l'inégalité de Young classique

$$\|a * b\|_\infty \leq \|a\|_{\frac{3}{2}} \|b\|_3, \tag{4.27}$$

on pourrait espérer modifier l'argument suivant qui donne la continuité de $B(f,g)$ de $L^\infty((0,T); L^3(\mathbb{R}^3)) \times L^\infty((0,T); L^3(\mathbb{R}^3)) \to L^\infty((0,T); \dot{B}^{1,\infty}_{3/2}(\mathbb{R}^3))$, à savoir

$$\begin{aligned}
|\langle B(f,g)(t), \chi\rangle| &\leq (\sup_{0<t<T} \|fg(t)\|_{3/2}) \int_0^t \left\| s^{-2}\Theta\left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}}\right) * \chi\right\|_3 ds \\
&\leq 2(\sup_{0<t<T} \|f(t)\|_3)(\sup_{0<t<T} \|g(t)\|_3) \int_0^\infty u \left\| \frac{1}{u^3}\Theta\left(\frac{\cdot}{u}\right) * \chi\right\|_3 \frac{du}{u}, \\
&\leq C(\sup_{0<t<T} \|f(t)\|_3)(\sup_{0<t<T} \|g(t)\|_3) \|\chi\|_{\dot{B}_3^{-1,1}}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

la dernière estimation étant une conséquence de la caractérisation des espaces de Besov rappelée dans l'Appendice ci-dessous.

Or, l'inégalité de Young généralisée aux espaces de Lebesgue faibles [112],

$$\|a * b\|_r \leq C_{p,q} \|f\|_p \|g\|_{q,\infty} \tag{4.29}$$

ne s'applique que si $1 < p,q,r < \infty$ et $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$. On ne peut donc modifier (4.27).

Pour contourner cette difficulté, nous allons décomposer le noyau Θ en deux parties Θ_1 et Θ_2 définies en transformée de Fourier par

$$\hat{\Theta}_1(\xi) =: |\xi| e^{-\frac{|\xi|^2}{2}} \tag{4.30}$$

et

$$\hat{\Theta}_2(\xi) =: e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}, \tag{4.31}$$

de telle sorte que

$$|\xi| \exp[-s|\xi|^2] = \frac{1}{\sqrt{s}} \hat{\Theta}(\sqrt{s}\xi) = \frac{1}{\sqrt{s}} \hat{\Theta}_1(\sqrt{s}\xi) \hat{\Theta}_2(\sqrt{s}\xi). \tag{4.32}$$

A l'aide de cette décomposition, nous pouvons alors écrire, en passant par la transformée de Fourier inverse (p et q exposants conjugués)

$$\begin{aligned} |\langle B(f,g)(t), \chi \rangle| &\leq \int_0^t \left| \left\langle s^{-2} \Theta_1 \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) * \chi, \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right)^3 \Theta_2 \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) * fg(t-s) \right\rangle \right| ds \\ &\leq \int_0^t \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right)^3 \Theta_2 \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) * fg(t-s) \right\|_q \left\| s^{-2} \Theta_1 \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) * \chi \right\|_p ds \end{aligned} \tag{4.33}$$

et l'inégalité de Young généralisée ($3/2 < q < \infty$, $q^{-1} + 1 = \alpha^{-1} + 2/3$)

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right)^3 \Theta_2 \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) * fg(t-s) \right\|_q &\leq C \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{s}} \right)^3 \Theta_2 \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) \right\|_\alpha \|fg(t-s)\|_{3/2,\infty} \\ &\leq C s^{-\frac{3}{2}(\frac{2}{3} - \frac{1}{q})} \|fg(t-s)\|_{3/2,\infty} \end{aligned} \tag{4.34}$$

permet de conclure

$$\begin{aligned} |\langle B(f,g)(t), \chi \rangle| &\leq (\sup_{0<t<T} \|fg(t)\|_{3/2,\infty}) \int_0^t \frac{\|s^{-2} \Theta_1 \left(\frac{\cdot}{\sqrt{s}} \right) * \chi\|_p}{s^{\frac{3}{2}(\frac{2}{3} - \frac{1}{q})}} ds \\ &\leq 2 (\sup_{0<t<T} \|f(t)\|_{3,\infty}) (\sup_{0<t<T} \|g(t)\|_{3,\infty}) \int_0^\infty \frac{\| \frac{1}{u^3} \Theta_1 \left(\frac{\cdot}{u} \right) * \chi\|_p}{u^{1-\frac{3}{q}}} \frac{du}{u} \\ &\leq C (\sup_{0<t<T} \|f(t)\|_{3,\infty}) (\sup_{0<t<T} \|g(t)\|_{3,\infty}) \|\chi\|_{\dot{B}_p^{1-\frac{3}{q},1}}. \end{aligned} \tag{4.35}$$

Pour pouvoir utiliser le lemme IV.7 dans la preuve de l'unicité des solutions `mild` comme dans [96], nous avons besoin d'un résultat classique (voir [6]).

Lemme IV.8. *Les inclusions suivantes sont continues: $\dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3)$ pour tout $0 < q < 3$ et $L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_q^{\frac{3}{q}-1,\infty}(\mathbb{R}^3)$ pour tout $3 < q < \infty$.*

Sans perte de généralité, démontrons ce résultat seulement pour $q = 2$. Pour cela, il convient d'utiliser la caractérisation des espaces de Besov et de Lebesgue faibles donnée par la théorie de l'interpolation, à savoir

$$(L^2(\mathbb{R}^3), L^4(\mathbb{R}^3))_{2/3,\infty} = L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3) \tag{4.36}$$

et

$$(\dot{B}_2^{0,1}(\mathbb{R}^3), \dot{B}_2^{\frac{3}{4},1}(\mathbb{R}^3))_{2/3,\infty} = \dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}(\mathbb{R}^3). \tag{4.37}$$

Or, puisque

$$\dot{B}_2^{0,1}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^3) \tag{4.38}$$

et que

$$\dot{B}_2^{\frac{3}{4},1}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \dot{B}_4^{0,1}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R}^3), \tag{4.39}$$

on obtient le résultat

$$\dot{B}_2^{\frac{1}{2},\infty}(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^{3,\infty}(\mathbb{R}^3). \tag{4.40}$$

4.2. *Fonctions de Lyapunov et stabilité des solutions de Kato.* Comme dans les pages précédentes, nous allons nous intéresser à la projection des équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} - \nu \Delta v = -\nabla \cdot (v \otimes v) - \nabla P \\ \nabla \cdot v = 0 \end{cases} \tag{4.41}$$

sur les champs vectoriels à divergence nulle

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \nu \Delta v - F(v,v) \\ v = \mathbb{P} v \end{cases} \tag{4.42}$$

où

$$F(u,v)(t) = \mathbb{P} \nabla \cdot (u \otimes v)(t) \tag{4.43}$$

et $\mathbb{P}$ est comme d'habitude l'opérateur de projection de Leray-Hopf.

Commençons par une définition classique.

Définition IV.1. Soit $v(t)$ solution de (4.42). Toute fonction $\mathcal{L}(v)(t)$ qui décroît en temps est appelée *fonction de Lyapunov* associée à v.

L'exemple le plus connu de fonction de Lyapunov est donné par l'énergie, à savoir la fonctionnelle

$$E(v)(t) = \frac{1}{2} \|v(t)\|_2^2 \tag{4.44}$$

car, comme on l'a déjà fait remarquer, éq. (3.22),

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\nu \|\nabla v\|_2^2 < 0. \tag{4.45}$$

Dans un article qui semble peu cité [65], T. Kato a démontré qu'il existe d'autres fonctions de Lyapunov pour les équations de Navier-Stokes. L'importance de ce résultat vient de son lien avec la théorie de la stabilité. Le théorème IV.3 qui suit, complète les résultats du théorème IV.2 et entraîne de manière évidente la stabilité conditionnelle asymptotique de la solution nulle.

Théorème IV.3 [65]. *Il existe $\delta > 0$ tel que, si le nombre de Reynolds $R_3(v_0) = \frac{\|v_0\|_3}{\nu} < \delta$, alors la quantité $R_3(v)(t) = \frac{\|v(t)\|_3}{\nu}$ est une fonction de Lyapunov associée à v.*

Ce résultat s'applique aussi dans le cas d'autres normes fonctionnelles, en particulier celles de Besov [23]. Par ailleurs, la stabilité conditionnelle des solutions de Kato est une conséquence immédiate du Lemme IV. 1 (voir aussi [71]). En effet, à la différence des solutions de Leray (Théorème III.1), l'application qui à la donnée initiale $v_0 \in L^3(\mathbb{R}^3)$ associe la solution `mild` au sens de Kato $v(t,x) \in \mathcal{C}([0,T); L^3(\mathbb{R}^3))$ est analytique au voisinage de zéro, en tant que fonctionnelle agissant sur $L^3(\mathbb{R}^3)$ à valeurs dans $\mathcal{C}([0,T); L^3(\mathbb{R}^3))$.

Appendice. Décomposition de Littlewood-Paley et espaces de Besov. Commençons par définir la décomposition de Littlewood-Paley. Pour cela, on considère une fonction (arbitraire) φ dans la classe de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ et dont la transformée de Fourier $\hat{\varphi}$ est telle que

$$0 \leq \hat{\varphi}(\xi) \leq 1, \quad \hat{\varphi}(\xi) = 1 \quad \text{si} \quad |\xi| \leq \frac{3}{4}, \quad \hat{\varphi}(\xi) = 0 \quad \text{si} \quad |\xi| \geq \frac{3}{2} \tag{$A.1$}$$

et l'on pose

$$\psi(x) = 8\varphi(2x) - \varphi(x) \tag{$A.2$}$$

$$\varphi_j(x) = 2^{3j}\varphi(2^j x), \quad j \in \mathbb{Z} \tag{$A.3$}$$

$$\psi_j(x) = 2^{3j}\psi(2^j x), \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{$A.4$}$$

On désigne par S_j et Δ_j respectivement les opérateurs de convolution avec φ_j et ψ_j. Enfin, l'ensemble $\{S_j, \Delta_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ représente la (une) décomposition de Littlewood-Paley de l'unité, à savoir

$$I = S_0 + \sum_{j\geq 0} \Delta_j = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Delta_j. \tag{$A.5$}$$

L'importance de cette décomposition vient de ce qu'elle permet de définir (indépendamment du choix de la fonction φ) les espaces de Besov [106, 41] et de Triebel-Lizorkin [128, 129, 41].

Définition A.1. Soient $0 < p, q \leq \infty$ et $s \in \mathbb{R}$. Une distribution tempérée f appartient à l'espace (homogène) de Besov $\dot{B}_q^{s,p}(\mathbb{R}^3)$ si et seulement si

$$\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{sj} \|\Delta_j f\|_q)^p \Big)^{\frac{1}{p}} < \infty. \tag{$A.6$}$$

Définition A.2. Soient $0 < p \leq \infty$, $0 < q < \infty$ et $s \in \mathbb{R}$. Une distribution tempérée f appartient à l'espace (homogène) de Triebel-Lizorkin $\dot{F}_q^{s,p}(\mathbb{R}^3)$ si et seulement si

$$\Big\| \Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}} (2^{sj} |\Delta_j f|)^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big\|_q < \infty. \tag{$A.7$}$$

Les quatre propositions suivantes permettent de définir des normes équivalentes dans les espace de Besov et de Triebel-Lizorkin en termes du semi-groupe de la chaleur $S(t)$ et de la fonction Θ qui interviennent dans le formulation intégrale `mild` des équations de Navier-Stokes.

Les deux premières équivalences, Propositions A.1-2 ci-dessus, sont naturelles. Les opérateurs de convolution Δ_j peuvent être interprétés comme un sous-ensemble discret ($j \in \mathbb{Z}$) de l'ensemble continu ($t > 0$) des opérateurs de convolution Θ_t où

$$\Theta_t = \frac{1}{t^3} \Theta\left(\frac{\cdot}{t}\right) \tag{$A.8$}$$

et, comme dans (4.15), Θ est définie par sa transformée de Fourier $\hat{\Theta}(\xi) = |\xi| e^{-|\xi|^2}$. Si la fonction Θ était régulière et à support compact du côté de Fourier, on obtiendrait une caractérisation complète des espaces de Besov et de Triebel-Lizorkin, sans restriction aucune sur le troisième exposant s qui apparaît dans les Définitions A.1-2. Et il en serait de même si la fonction Θ avait tous ses moments nuls [106]. Or, on ne dispose que d'un seul moment nul pour Θ : son intégrale. C'est pourquoi il convient de se limiter à $s < 1$.

Pour les démonstrations, le lecteur se reportera à [106] et, pour une caractérisation plus générale, à [128, 129, 41].

Proposition A.1. *Soient $1 \le p, q \le \infty$ et $s < 1$, alors les quantités*

$$\Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{sj} \|\Delta_j f\|_q)^p \Big)^{\frac{1}{p}} \tag{A.9}$$

et

$$\Big(\int_0^\infty (t^{-s} \|\Theta_t f\|_q)^p \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{p}} \tag{A.10}$$

sont équivalentes et seront désignées indifféremment par $\|f\|_{\dot{B}_q^{s,p}(\mathbb{R}^3)}$.

Proposition A.2. *Soient $1 \le p \le \infty$, $1 \le q < \infty$ et $s < 1$, alors les quantités*

$$\Big\| \Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{sj} |\Delta_j f|)^p \Big)^{\frac{1}{p}} \Big\|_q \tag{A.11}$$

et

$$\Big\| \Big(\int_0^\infty (t^{-s} |\Theta_t f|)^p \frac{dt}{t} \Big)^{\frac{1}{p}} \Big\|_q \tag{A.12}$$

sont équivalentes et seront désignées indifféremment par $\|f\|_{\dot{F}_q^{s,p}(\mathbb{R}^3)}$.

Les équivalences suivantes, Propositions A.3-4, sont encore plus utiles car elles permettent de passer de Δ_j à S_j (et, de la version discrète S_j à celle continue $S(t)$). Même si on arrive facilement à donner une estimation supérieure des quantités qui font intervenir Δ_j, par d'autres ne faisant intervenir que S_j, et ceci grâce à l'identité

$$\Delta_j = S_{j+1} - S_j, \tag{A.13}$$

le passage de Δ_j à S_j, via l'identité

$$S_{j+1} = \sum_{k \le j} \Delta_k, \tag{A.14}$$

n'est pas possible si $s \ge 0$ ([106]).

Dans le contexte des équations de Navier-Stokes, un contre-exemple explicite pour $s = 0$ a été donné dans [15] pour les espaces de Besov. Un deuxième, toujours pour $s = 0$, mais concernant les espaces de Triebel-Lizorkin est contenu dans [21].

Venons-en aux équivalences dont il est question.

Proposition A.3. *Soient $1 \le p, q \le \infty$ et $s < 0$, alors les quantités*

$$\Big(\sum_{j \in \mathbb{Z}} (2^{sj} \|\Delta_j f\|_q)^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{A.15}$$

$$\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(2^{sj}\|S_jf\|_q)^p\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{A.16}$$

$$\Big(\int_0^\infty (t^{-\frac{s}{2}}\|S(t)f\|_q)^p\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{A.17}$$

et

$$\Big(\int_0^\infty (t^{-s}\|\Theta_tf\|_q)^p\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{p}} \tag{A.18}$$

sont équivalentes et sont désignées indifféremment par $\|f\|_{\dot{B}_q^{s,p}(\mathbb{R}^3)}$.

PROPOSITION A.4. *Soient* $1\le p\le\infty$, $1\le q<\infty$ *et* $s<0$, *alors les quantités*

$$\Big\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(2^{sj}|\Delta_jf|)^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|_q, \tag{A.19}$$

$$\Big\|\Big(\sum_{j\in\mathbb{Z}}(2^{sj}|S_jf|)^p\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|_q, \tag{A.20}$$

$$\Big\|\Big(\int_0^\infty (t^{-\frac{s}{2}}|S(t)f|)^p\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|_q, \tag{A.21}$$

et

$$\Big\|\Big(\int_0^\infty (t^{-s}|\Theta_tf|)^p\frac{dt}{t}\Big)^{\frac{1}{p}}\Big\|_q \tag{A.22}$$

sont équivalentes et sont désignées indifféremment par $\|f\|_{\dot{F}_q^{s,p}(\mathbb{R}^3)}$.

Remerciements. L'auteur tiens à remercier W. Zajączkowski et D. Wrzosek pour leur accueil chaleureux au Banach Center. Il remercie aussi P. Souplet pour lui avoir signalé lors du "Minisemester Evolution Equations" l'article [56].

Références

[1] C. Bardos, F. Golse and D. Levermore, *Fluid dynamical limits of kinetic equations, I: Formal derivation*, J. Stat. Physics 63 (1991), 323–344.

[2] C. Bardos, F. Golse and D. Levermore, *Fluid dynamical limits of kinetic equations, II: Convergence proofs*, Comm. Pure and Appl. Mathematics 46 (1993), 667–753.

[3] C. Bardos, F. Golse and D. Levermore, *Acoustic and Stokes limits for the Boltzmann equation*, C.R.A.S.P. 327 (1998), 323–328.

[4] C. Bardos, *From molecules to turbulence. An overview of multiscale analysis in fluid dynamics*, in: Advanced topics in theoretical fluid mechanics, J. Málec, J. Nečas and M. Rokyta (ed.), Pitman Research Notes in Mathematics Series 392, Longman, 1998.

[5] O. A. Barraza, *Self-similar solutions in weak L^p spaces of the Navier-Stokes equations*, Rev. Mat. Iberoamericana 12 (1996), 411–439.

[6] J. Bergh and J. Löfstrom, *Interpolation spaces, An Introduction*, Springer-Verlag,1976.

[7] P. Biler, *The Cauchy problem and self-similar solutions for a nonlinear parabolic equation*, Studia Mathematica 114 (1995), 181–205.

[8] J. M. Bony, *Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 4ème Série 14 (1981), 209–246.

[9] H. Brézis, *Remarks on the preceding paper by M. Ben-Artzi*, Arch. Rat. Mech. Anal. 128 (1994), 359–360.

[10] H. Brézis and T. Cazenave, *A nonlinear heat equation with singular initial data*, J. Anal. Math. 68 (1996), 277–304.

[11] C. P. Calderón, *Existence of weak solutions for the Navier-Stokes equations with initial data in L^p*, Trans. Amer. Math. Soc. 318 (1990), 179–200.

[12] C. P. Calderón, *Addendum to the paper: "Existence of weak solutions for the Navier-Stokes equations with initial data in L^p"*, Trans. Amer. Math. Soc. 318 (1990), 201–207.

[13] C. P. Calderón, *Initial values of solutions of the Navier-Stokes equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 117 (1993), 761–766.

[14] J. R. Cannon and G. H. Knightly, *A note on the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations*, SIAM J. Appl. Math. 18 (1970), 641–644.

[15] M. Cannone, *Ondelettes, Paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot Editeur, 1995.

[16] M. Cannone, *A generalisation of a theorem by Kato on Navier-Stokes equations*, Revista Matematica Iberoamericana 13 (1997), 515–541.

[17] M. Cannone and Y. Meyer, *Littlewood-Paley decomposition and the Navier-Stokes equations*, Meth. and Appl. of Anal. 2 (1995), 307–319.

[18] M. Cannone, Y. Meyer and F. Planchon, *Solutions auto-similaires des équations de Navier-Stokes*, Exposé n. VIII, Séminaire X-EDP, Ecole Polytechnique (Janvier 1994).

[19] M. Cannone and F. Planchon, *Self-similar solutions of the Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^3$, Comm. Part. Diff. Eq. 21 (1996), 179–193.

[20] M. Cannone and F. Planchon, *On the regularity of the bilinear term for solutions of the incompressible Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^3$, Revista Matematica Iberoamericana 16 (2000), 1–16.

[21] M. Cannone and F. Planchon, *On the non stationary Navier-Stokes equations with an external force*, Adv. in Diff. Eq. 4 (1999), 697–730.

[22] M. Cannone, F. Planchon and M. Schonbek, *Navier-Stokes equations in the half space*, Comm. P.D.E. (à paraître, 1999).

[23] M. Cannone and F. Planchon, *Fonctions de Lyapunof pour les équations de Navier-Stokes*, à paraître dans séminaire X-EDP, Ecole Polytechnique (1999–2000).

[24] A. L. Cauchy, *Sur les équations qui expriment les conditions d'équilibre ou les lois du mouvement des fluides*, dans "Exercices de Mathématiques" Œuvres complètes, II Série, Tome VIII (1890), Gauthier-Villars, Paris, (1828), 158–179.

[25] T. Cazenave and F. Weissler, *Asymptotically self-similar global solutions of the non linear Schrödinger and heat equations*, Math. Zeit. 228 (1998), 83–120.

[26] C. Cercignani, R. Illner and M. Pulvirenti, *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, Applied Mathematical Sciences 104, Springer-Verlag, 1994.

[27] C. Cercignani, *Ludwig Boltzmann: the man who trusted atoms*, Oxford University Press, 1998.

[28] J. Y. Chemin, *Remarques sur l'existence globale pour le système de Navier-Stokes incompressible*, SIAM J. Math. Anal. 23 (1992), 20–28.

[29] J. Y. Chemin, *About Navier-Stokes system*, Publ. Lab. Anal. Num. (Univ. Paris 6) R 96023, (1996) 1–43.

[30] J. Y. Chemin, *Sur l'unicité dans le système de Navier-Stokes tridimensionnel*, Exposé n. XXIV, Séminaire X-EDP, Ecole Polytechnique, (1996-1997).

[31] J. Y. Chemin, *Sur l'unicité dans le système de Navier-Stokes tridimensionnel*, J. Anal. Math. 77 (1999), 27–50.

[32] P. Constantin and C. Foias, *Navier-Stokes equations*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 1988.

[33] J. S. Darrozes et C. François, *Mécanique des Fluides Incompressibles*, Springer Verlag, Berlin, 1982.

[34] N. Depauw, *Solutions peu régulières des équations d'Euler et Navier-Stokes incompressibles sur un domaine à bord*, Thèse de Doctorat de l'Université de Paris Nord, 1998.

[35] P. G. Drazin and W. H. Reid, *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, 1981.

[36] R. Dugas, *Histoire de la mécanique*, Paris, Editions Dunod, Neuchatel Editions du Griffon, 1950.

[37] E. B. Fabes, B. F. Jones and N. M. Rivière, *The initial value problem for the Navier-Stokes equations with data in L^p*, Arch. Rat. Mech. Anal. 45 (1972), 222–240.

[38] E. B. Fabes, J. E. Lewis and N. M. Rivière, *Boundary value problems for the Navier-Stokes equations*, Am. Jour. of Math. 99 (1977), 601–625.

[39] P. Federbush, *Navier and Stokes meet the wavelet*, Comm. Math. Phys. 155 (1993), 219–248.

[40] C. Foias and R. Temam, *Self-similar universal homogeneous statistical solutions of the Navier-Stokes equations*, Comm. Math. Phys. 90 (1983) 187–20.

[41] M. Frazier, B. Jawerth and G. Weiss, *Littlewood-Paley Theory and the Study of Function Spaces*, Monograph in the CBM-AMS 79, 1991.

[42] G. Furioli, *Applications de l'analyse harmonique réelle à l'étude des équations de Navier–Stokes et de Schrödinger non linéaires*, Thèse de Doctorat de l'Université d'Orsay, 1999.

[43] G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset and E. Terraneo, *Sur l'unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ des solutions* `mild` *des équations de Navier-Stokes*, C. R. Acad. Sci. Paris 325 (1997), 1253–1256.

[44] G. Furioli, P.-G. Lemarié-Rieusset and E. Terraneo, *Unicité dans $L^3(\mathbb{R}^3)$ et d'autres espaces fonctionnels limites pour Navier-Stokes*, Rev. Mat. Iberoamericana (à paraître, 2000).

[45] H. Fujita and T. Kato, *On the Navier-Stokes initial value problem I*, Arch. Rat. Mech. Anal. 16 (1964), 269–315.

[46] A. Georgescu, *Hydrodynamic stability theory*, Martinus Nijhoff Publishers, Kluwer 1985.

[47] Y. Giga, *Weak and strong solutions of the Navier-Stokes initial value problem*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 19 (1983), 887–910.

[48] Y. Giga, *Domains of fractional powers of the Stokes operator in L_r spaces*, Arch. Mech. Rat. Anal. 89 (1985), 251–265.

[49] Y. Giga, *Solutions for semi linear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system* J. Diff. Equat. 61 (1986), 186–212.

[50] Y. Giga, *Regularity criteria for weak solutions of the Navier-Stokes system*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 45 (1986), 449–453.

[51] Y. Giga, *Review of the paper by H. Brezis, "Remarks on the preceding paper by M. Ben-Artzi"*, Math. Reviews 96h:35149, (August 1996) [see, for the revised form, at the address http://klymene.mpim-bonn.mpg.de:80/msnprhtml/review_search.html].

[52] Y. Giga, K. Inui and S. Matsui, *On the Cauchy problem for the Navier-Stokes equations with nondecaying initial data*, Quaderni di Matematica (à paraître, 2000).

[53] Y. Giga and T. Miyakawa, *Solutions in L^r of the Navier-Stokes initial value problem*, Arch. Mech. Rat. Anal. 89 (1985), 267–281.

[54] Y. Giga and T. Miyakawa, *Navier-Stokes flows in $\mathbb{R}^3$ with measures as initial vorticity and the Morrey spaces*, Comm. PDE 14 (1989), 577–618.

[55] G. Grubb, *Initial value problems for the Navier-Stokes equations with Neumann conditions*, in: "The Navier-Stokes equations II", J. G. Heywood, K. Masuda, R. Rautmann and S. A. Solonnikov (ed.), Proc. Conf. Oberwolfach 1991, Lecture Notes in Mathematics 1530, Springer, Berlin, 1992, 262–283.

[56] A. Haraux and F. Weissler, *Non-uniqueness for a semi-linear initial value problem*, Indiana Univ. Math. J. 31 (1982), 167–189.

[57] J. G. Heywood and R Rannacher, *An analysis of stability concepts for the Navier–Stokes equations*, J. Reine Angew. Math. 372 (1986), 1–33.

[58] J. E. Johnsen, *The Stationary Navier-Stokes Equations in L^p and Related Spaces*, Ph. D. Thesis, Mathematics Institute University of Copenhagen, Denmark, 1993.

[59] D. D. Joseph, *Stability of fluid motions*, (2 vols) Springer Tracts in Natural Philosophy, Berlin, Springer Verlag, 1976.

[60] R. Kajikaya and T. Miyakawa, *On L^2-decay of weak solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$*, Math. Z. 192 (1986), 135–148.

[61] T. Kato, *Nonlinear evolution equations in Banach spaces*, Proceedings of the Symposium on Applied Mathematics, AMS 17 (1965), 50–67.

[62] T. Kato, *Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in $\mathbb{R}^3$*, J. Functional Analysis 9 (1972), 296–305.

[63] T. Kato, *Quasi-linear equations of evolution with application to partial differential equations*, in: Lecture Notes in Mathematics 448, Springer, 1975, 25–70.

[64] T. Kato, *Strong L^p solutions of the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^m$ with applications to weak solutions*, Math. Zeit. 187 (1984), 471–480.

[65] T. Kato, *Liapunov functions and monotonicity in the Navier-Stokes equations*, Lecture Notes in Mathematics 1450, 1990, 53–63.

[66] T. Kato, *Strong solutions of the Navier-Stokes equations in Morrey spaces*, Bol. Soc. Brasil. Math. (N.S.) 22 (1992), 127–155.

[67] T. Kato, *Well-posedness nitsuite*, Sugaku (en japonais) 48 (1996), 298–300.

[68] T. Kato and H. Fujita, *On the non-stationary Navier-Stokes system*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 32 (1962), 243–260.

[69] T. Kato and G. Ponce, *Commutator estimates and the Euler and Navier-Stokes equations*, Comm. Pure Appl. Math. 41 (1988), 891–907.

[70] T. Kato and G. Ponce, *The Navier-Stokes equations with weak initial data*, Int. Math. Res. Not. 10 (1994), 435–444.

[71] T. Kawanago, *Stability estimate of strong solutions for the Navier-Stokes system and its application*, Electron. J. Differential Equations (electronic) (see: http://ejde.math.swt.edu/Volumes/1998/15-Kawanago/abstr.html) 15 (1998), 1–23.

[72] A. A. Kiselev and O. A. Ladyzhenskaya, *On the existence and uniqueness of solutions of the initial value problem for viscous incompressible fluids*, Izvestia Akad. Nauk SSSR, 21 (1957), 655–680 (en russe).

[73] G. H. Knightly, *A Cauchy problem for the Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^n$*, SIAM J. Math. Anal. 3 (1972), 506–511.

[74] G. H. Knightly, *On a class of global solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Mech. Rat. Anal. 21 (1966), 211–245.

[75] T. Kobayoshi and T. Muramatu, *Abstract Besov spaces approach to the non-stationary Navier-Stokes equations*, Math. Meth. Appl. Sc. 15 (1992), 599–620.

[76] H. Kozono and M. Yamazaki, *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equation with distributions in new function spaces as initial data*, Comm. P.D.E. 19 (1994), 959–1014.

[77] H. Kozono and M. Yamazaki, *The stability of small stationary solutions in Morrey spaces of the Navier-Stokes equation*, Ind. Univ. Math. Journ. 44 (1995), 1307–1336.

[78] L. D. Landau, *Sur le problème de la turbulence*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 44 (1944), 339–342 (en russe).

[79] L. D. Landau et E. M. Lifchitz, *Mécanique des fluides*, MIR, Moscou, 2ème édition, 1989.

[80] O. A. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, 2nd ed., 1969.

[81] Y. Le Jan and A. S. Sznitman, *Cascades aléatoires et équations de Navier-Stokes*, C. R. Acad. Sci. Paris 324 (1997), 823–826.

[82] Y. Le Jan and A.S. Sznitman, *Stochastic cascades and 3-dimensional Navier-Stokes equations*, Prob. Theory Related Fields 109 (1997) 343–366.

[83] P. G. Lemarié-Rieusset, *Some remarks on the Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^3$, Jour. Math. Phys. 39 (1998), 4108–4117.

[84] J. Leray, *Etudes de diverses équations intégrales non linéaires et de quelques problèmes que pose l'hydrodynamique*, J. Math. Pures Appl. 12 (1933), 1–82.

[85] J. Leray, *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. 63 (1934), 193–248.

[86] J. Leray, *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois*, J. Math. Pures Appl. 13 (1934), 331–418.

[87] J. Leray, *Aspects de la mécanique théorique des fluides*, La Vie des Sciences, Comptes Rendus, Série générale, II (1994), 287–290.

[88] J. Leray, *Selected Papers*, *Œuvres Scientifiques*, Springer et Société Mathématique de France, Volume II, Fluid Dynamics and Real Partial Differential Equations. Introduction by Peter D. Lax, 1998.

[89] J. E. Lewis, *The initial-boundary value problem for the Navier-Stokes equations with data in* L^p, Indiana Univ. Math. Jour. 22 (1973), 739–761.

[90] C. C. Lin, *The theory of hydrodynamic stability*, Corrected reprinting, Cambridge University Press, New York, 1966.

[91] J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[92] P. L. Lions, *Mathematical Topics in Fluid Mechanics. Vol 1. Incompressible models*, Oxford University Press, 1996.

[93] P. L. Lions et N. Masmoudi, *Unicité des solutions faibles de Navier-Stokes dans* $L^N(\Omega)$, C.R.A.S.P. 327 (1998), 491–496.

[94] A. M. Lyapunov, *Stability of Motion*, (traduit du russe), Academic Press, 1966.

[95] J. Málek, J. Nečas, M. Pokorný and M. E. Schonbek, *On possible singular solutions to the Navier-Stokes equations*, Math. Nachr. (1998).

[96] Y. Meyer, *Wavelets, paraproducts and Navier-Stokes equations*, Current Developments in Mathematics 1996, International Press, 105–212 (à paraître, 1999).

[97] Y. Meyer, *New estimates for Navier-Stokes equations* (manuscrit), Colloque en l'honneur de J.-L. Lions à l'occasion de son 70^{e} anniversaire, Paris 26–27 mai 1998, Auditorium du CNRS, 3 rue Michel-Ange, Paris XVI^{e}, 1998.

[98] T. Miyakawa, *On the initial value problem for the Navier-Stokes equations in L^p spaces*, Hiroshima Math. J. 11 (1981), 9–20.

[99] T. Miyakawa, *On L^1-Stability of Stationary Navier-Stokes Flows in $\mathbb{R}^n$*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 4 (1997), 67–119.

[100] C. L. M. H. Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mém. Acad. Sci. Inst. France 6 (1822), 389–440.

[101] J. Nečas, M. Růžička and V. Šverák, *On Leray self-similar solutions of the Navier-Stokes equations*, Acta Math. 176 (1996), 283–294.

[102] H. Okamoto, *Exact solutions of the Navier-Stokes equations via Leray's scheme*, Japan J. Indust. Appl. Math.14 (1997), 169–197.

[103] W. Mc F. Orr, *The stability or instability of the steady motion of a liquid. Part II, A viscous fluid*, Proc. Roy. Irish Acad. A 27 (1907), 69–138.

[104] F. Oru, *Rôle des oscillations dans quelques problèmes d'analyse non-linéaire*, Thèse de Doctorat de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, 1998.

[105] M. Oseen, *Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik*, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1927.

[106] J. Peetre, *New Thoughts on Besov Spaces*, Duke Univ. Math. Series, 1976.

[107] F. Planchon, *Global strong solutions in Sobolev or Lebesgue spaces for the incompressible Navier-Stokes equations in $\mathbb{R}^3$*, Ann. Inst. H. Poinc. 13 (1996), 319–336.

[108] F. Planchon, *Convergence de solutions des équations de Navier-Stokes vers des solutions auto-similaires*, Exposé n. III, Séminaire X-EDP, Ecole Polytechnique, 1996.

[109] F. Planchon, *Asymptotic behavior of global solutions to the Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^3$, Revista Matematica Iberoamericana 14 (1998), 71–93.

[110] F. Planchon, *Solutions Globales et Comportement Asymptotique pour les Equations de Navier-Stokes*, PhD Thesis, Ecole Polytechnique, France, 1996.

[111] S. D. Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, Jour. de l'Ecole Polytechnique 13 (1831), 1–74.

[112] M. Reed and B. Simon, *Fourier Analysis*, vol 2, Academic Press, 1975.

[113] O. Reynolds, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinouos and the law of resistence in parallel chanels*, Phil. Trans. Roy. Soc. London 174 (1883), 935–982.

[114] F. Ribaud, *Analyse de Littlewood-Paley pour la Résolution d'Equations Paraboliques Semi-linéaires*, PhD Thesis, Université d'Orsay, 1996.

[115] F. Ribaud, *Problème de Cauchy pour les équations paraboliques semi-linéaires avec données dans $H^s_p(\mathbb{R}^n)$*, C. R. Acad. Sci. Paris 322 (1996), 25–30.

[116] F. Ribaud, *Semilinear parabolic equations with distributions as initial data*, Discrete Contin. Dynam. Systems 3 (1997), 305–316.

[117] G. Rosen, *Navier-Stokes initial value problem for boundary-free incompressible fluid flow*, Phys. Fluid 13 (1970), 2891–2903.

[118] M. E. Schonbek, *L^2-decay for weak solutions of the Navier-Stokes equations*, Arch. Rat. Mech. 88 (1985), 209–222.

[119] J. Serrin, *On the stability of viscous fluid motions*, Arch. Rat. Mech. Anal. 3 (1959), 1–13.

[120] J. Serrin, *Mathematical principles of classical fluid mechanics*, Encyclopedia of Physics, Edited by S. Flügge, vol VIII/1, Fluid Dynamics I, co-editor C. Truesdell, Springer-Verlag, 1959.

[121] M. Shinbrot, *Lectures on Fluid Mechanics*, Gordon and Breach, New York, 1973.

[122] M. E. Taylor, *Pseudodifferential Operators and Nonlinear PDE*, Progress in mathematics 100, Birkhäuser, 1991.

[123] M. E. Taylor, *Analysis on Morrey spaces and applications to the Navier-Stokes and other evolution equations*, Comm. PDE 17 (1992), 1407–1456.

[124] M. E. Taylor, *Partial differential equations. I, II*, Applied Mathematical Sciences 115 and 116, Springer Verlag, 1996.

[125] R. Temam, *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis. With an appendix by F. Thomasset*, Third Edition, Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland, 1984.

[126] R. Temam, *Some developments on Navier-Stokes equations in the second half of the 20th century*, in: Développement des Mathématiques au cours de la seconde moité du XXème siècle, J.P. Managing (ed.), 1998.

[127] E. Terraneo, *Applications de certains espaces fonctionnels de l'analyse harmonique réelle aux équations de Navier-Stokes et de la chaleur non-linéaires*, Thèse de Doctorat de l'Université d'Evry Val d'Essonne, 1999.

[128] H. Triebel, *Theory of Function Spaces*, Monograph in mathematics 78, Birkhäuser, 1983.

[129] H. Triebel, *Theory of Function Spaces II*, Monograph in mathematics 84, Birkhäuser, 1992.

[130] C. Truesdell, *The mechanical foundations of elasticity and fluid dynamics*, J. Rat. Mech. Anal 1 (1952), 125–291.

[131] T. P. Tsai, *On Leray's self-similar solutions of the Navier-Stokes equations satisfying local energy estimates*, Arch. Rat. Mech. Anal. 143 (1998), 29–51.

[132] H. Villat, *Leçons sur les fluides visqueux*, recueillies et rédigées par J. Kravtchenko, Gauthier-Villars, Paris, 1943.

[133] M. Vishik, *Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in bordeline spaces of Besov type*, preprint (1998).

[134] K. A. Voss, *Self-similar Solutions of the Navier-Stokes Equations*, Ph. D. Thesis Yale University, 1996.

[135] W. von Wahl, *The equations of Navier-Stokes and abstract parabolic equations.* Aspects of Mathematics, E8. Friedr. Vieweg and Sohn, Braunschweig, 1985.

[136] F. B. Weissler, *Local existence and non existence for semilinear parabolic equation in L^p*, Indiana Univ. Math. Journ. 29 (1980), 79–102.

[137] F. B. Weissler, *The Navier-Stokes initial value problem in L^p*, Arch. Rat. Mech. Anal. 74 (1981) 219–230.

[138] M. Wiegner, *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations on $\mathbb{R}^n$*, J. London Math. Soc. 35 (1987), 303–313.