Proof. Since $a_n = E[Z_n^2 - Z_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n]$, the Doob decomposition of $(Z_n^2)_{n \geq 0}$ has the form

$$Z_n^2 = M_n - \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n + \sum_{k=1}^{n} c_k,$$

where

$$S_n \equiv M_n - \sum_{k=1}^{n} (a_k + c_k) \geq -\sum_{k=1}^{n} c_k$$

is a supermartingale bounded from below in L^1, hence a.s. convergent to some finite limit. This implies the convergence of Z_n^2, resp. Z_n to some finite limit and, in particular, $Z_n - Z_{n+1} \to 0$ P-a.s. Now the lemma of Hunt yields

$$E[Z_n - Z_{n+1} | \mathcal{F}_n] \to 0$$

due to (3.2); cf., for example, [7], p. 143. Thus (3.3) implies $h(|Z_n|) \to 0$, hence $|Z_n| \to 0$ P-a.s.

(3.8) *Remark.* The argument for almost sure convergence of (Z_n^2) is included only for the sake of completeness, since I learned from D. Siegmund that it is contained in Theorem 1 of [8]. Condition (3.6) means in fact that (Z_n^2) is an "almost supermartingale" in the sense of [8].

References

[1] R. S. Bucy, *Stability and positive supermartingales*, J. Differential Equations 1 (1965), pp. 151–155.

[2] J. L. Doob, *Generalized sweeping out and probability*, J. Functional Analysis 2 (1968), pp. 207–255.

[3] H. Föllmer, *A Liapunov principle for semimartingales*, to appear in the Proceedings of the AMS Probability Symposium, Urbana, March 15–18, 1976.

[4] W. Hildenbrand and R. Radner, *Adjustment with random disturbances*, preprint, Universität Bonn, Bonn 1976.

[5] J. Lamperti, *Criteria for the recurrence or transience of stochastic processes*, J. Math. Anal. Appl. 1 (1960), pp. 314–330.

[6] P. A. Meyer, *Martingales and stochastic integrals, I*, Lectures Notes in Math. 285 (1972), Springer-Verlag.

[7] —, *Un lemme de théorie de martingales*, ibid. 88 (1969), Springer-Verlag.

[8] H. Robbins and D. Siegmund, *A convergence theorem for negative almost supermartingales and some applications*, in: Optimizing methods in statistics, Academic Press, New York–London 1971.

[9] W. M. Wonham, *Liapunov criteria for weak stochastic stability*, J. Differential Equations 2 (1966), pp. 195–207.

Presented to the Semester
Probability Theory
February 11–June 11, 1976

PROBABILITY THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 5
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ПОВОДУ ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ В R^d

М. У. ГАФУРОВ

Математический институт, АН Уз.ССР, Ташкент, СССР

Пусть

(1) $$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots; \quad X_i = (X_{i1}, \ldots, X_{id})$$

последовательность независимых, одинаково распределенных случайных векторов принимающих значения из евклидового пространства $\boldsymbol{R}^d$, $d \geq 1$.

Обозначим через $a = (a_1, \ldots, a_d)$ вектор математических ожиданий и B — ковариационную матрицу вектора X_1.

Если $x \in \boldsymbol{R}^d$, то положим

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_d^2}\,.$$

Пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, ε — любое положительное число, $I_n(\varepsilon)$ индикатор события $\{|S_n - na| > n\varepsilon\}$. Тогда

$$\nu_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\varepsilon)$$

есть „считающая величина", т.е. число осуществлений события $\{|S_n - na| > n\varepsilon\}$.

Легко понять, что конечность почти всюду „считающей величины" ν_ε (для любого $\varepsilon > 0$) означает выполнение усиленного закона больших чисел для случайных векторов последовательности (1).

Имеет место следующая теорема, являющаяся многомерным аналогом одного результата П. Эрдеша [4].

Теорема 1. *Для того, чтобы при любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ $E\nu_\varepsilon < \infty$ *необходимо и достаточно*

$$EX_1 = a, \quad E|X_1|^2 < \infty.$$

Очевидно, что в силу известной леммы Бореля–Контелли из теоремы 1 следует применимость усиленного закона больших чисел для случайных векторов последовательности (1).

Доказательство теоремы 1 существенно основывается на одном неравенстве вероятностей больших уклонений, которое было выведено С. В. Нагаевым и Д. Х. Фуком ([2], фор. (47)).

Следует отметить, что использование этого неравенства позволяет существенно упростить вычисления при доказательстве теоремы. Представляет также интерес изучение поведения $E\nu_\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$.

Анализ доказательства теоремы 1 показывает, что

$$E\nu_\varepsilon = O(\varepsilon^{-2}). \tag{2}$$

В работе [3] И. Сливка и Н. Северо для случая $d = 1$ и когда величины $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ распределены нормально с параметрами (0, 1) показали, что при всех $\varepsilon > 0$

$$\varepsilon^{-2} - 1 \leqslant E\nu_\varepsilon \leqslant \varepsilon^{-2}. \tag{3}$$

Следующая теорема принадлежащая А. В. Нагаеву [1] уточняет соотношения (2) и (3).

Теорема 2. *Пусть* $EX_1 = 0$, $E|X_1|^2 < \infty$. *Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$E\nu_\varepsilon = \varepsilon^{-2} \int_0^\infty P\{|\eta| > \sqrt{x}\}\, dx + o(\varepsilon^{-2}).$$

Здесь η — нормальный случайный вектор с нулевым вектором математических ожиданий и ковариационной матрицей B.

Приводимые ниже теоремы являются аналогом теорем 1 и 2 для случая, когда общая функция распределения $F(x)$ случайных векторов последовательности (1) принадлежит области нормального притяжения многомерного устойчивого распределения с показателем $\alpha \in (1, 2)$.

Приведем некоторые результаты для этого случая.

Теорема 3. *Пусть* $F(x)$ *принадлежит области нормального притяжения устойчивого распределения с характеристическим показателем* $\alpha \in (1, 2)$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$, $p \in (\alpha/t, 2\alpha/t)$

$$\delta_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} n^{pt/\alpha - 2} P\{|S_n - na| > \varepsilon n^{p/\alpha}\} < \infty. \tag{4}$$

Теорема 4. *Если соотношение* (4) *имеет место для* $p \in (\alpha/t, 2\alpha/t)$, *то*

$$EX_1 = a, \quad E|X_1|^t < \infty, \quad t < \alpha.$$

Теорема 5. *В условиях теоремы* 3 *при* $\varepsilon \to 0$

$$\delta_\varepsilon = \varepsilon^{-(pt-\alpha)/(p-1)} \int_0^\infty x^{pt/\alpha - 2} P\{|\eta^{(\alpha)}| > x^{(p-1)/\alpha}\}\, dx + o(\varepsilon^{-(pt-\alpha)/(p-1)}).$$

Здесь $\eta^{(\alpha)}$ — многомерный устойчивый случайный вектор с показателем $\alpha \in (1, 2)$.

Литература

[1] А. В. Нагаев, Тезисы III Советско-Японского симпозиума по теории вероятностей, I, Ташкент 1975.

[2] С. В. Нагаев, Д. Х. Фук, Теория вероятностей и ее применения 14 (1971), стр. 660–675.

[3] [И. Сливка, Н. Северо] I. Slivka, N. Severo, Proc. Amer. Math. Soc. 24 (1970), стр. 729–734.

[4] [П. Эрдеш] P. Erdös, Ann. Math. Stat. 20 (1949), стр. 286–291.

Presented to the Semester
Probability Theory
February 11–June 11, 1976