PROBABILITY THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 5
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

ОПТИМАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ЧАСТИЧНО НАБЛЮДАЕМЫХ ДВУМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ*

А. А. НОВИКОВ

Математический институт, АН СССР, Москва, СССР

Рассматривается задача восстановления *ненаблюдаемого* двумерного случайного поля в каждой точке прямоугольника по известным значениям (на всем прямоугольнике) *наблюдаемого* поля, которое представляет смесь ненаблюдаемого поля и помехи типа белого шума. В случае, когда ненаблюдаемое поле управляется дифференциальным уравнением гиперболического типа, для оптимальной (по величине среднеквадратичного уклонения) оценки ненаблюдаемого поля, получено стохастическое уравнение с краевыми условиями.

1. Введение и основной результат

В этом разделе мы опишем постановку задачи и основной результат, не вдаваясь в подробное описание условий. Точные формулировки и условия будут даны в следующих разделах.

Наблюдаемое поле ξ_z, $z = (z_1, z_2) \in \Pi_T$ (Π_T — прямоугольник $[0, T_1] \times \times [0, T_2]$) представляет собой смесь ненаблюдаемого поля и помехи типа белого шума вида

$$\xi_z = \int_{\Pi_z} A(u)\theta_u\,du + \int_{\Pi_z} B(u)\,dw_u, \tag{1}$$

где: θ_z — ненаблюдаемое гауссовское поле с $E\theta_z = 0$ и непрерывной корреляционной функцией $K(u, z) = E\theta_u\theta_z$; w_z — винеровское поле и $\int B(u)\,dw_u$ — стохастический интеграл по полю w_z (см. [3], [11]); $A(z)$ и $B(z)$ — известные неслучайные функции. Предполагается, что поле θ_z не зависит от w_z. Требуется по известным значениям ξ_z на всем прямоугольнике Π_T оценить с наименьшей среднеквадратичной ошибкой поле θ_z в каждой точке $z \in \Pi_T$ (задача интерполяции).

* Работа выполнена в Центре Банаха (Варшава) во время работы Семестра по теории вероятностей (февраль–июнь 1976 г.).

Отметим, что если рассматривать поле w_z и ξ_z как обобщенные (см., например, [2]), то уравнение (1) при соответствующей гладкости функции $B(z)$ можно записать в следующем виде

$$\ddot{\xi}_z = A(z)\theta_z + B(z)\ddot{w}_z, \tag{2}$$

где $\ddot{\xi}_z = \dfrac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}\xi_z$ и $\ddot{w}_z = \dfrac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2}w_z$ — белый гауссовский шум на плоскости.

Обозначим $\mathscr{F}_T^\xi = \sigma\{\omega\colon \xi_z,\ z \in \Pi_T\}$ — σ-алгебру, порожденную значением поля ξ_z. Как известно, оптимальной оценкой для θ_z является условное среднее $\bar{\theta}_z = \boldsymbol{E}(\theta_z | \mathscr{F}_T^\xi)$. Нетрудно доказать, что имеет место представление (см. ниже лемму 1)

$$\bar{\theta}_z = \int\limits_{\Pi_T} H(u, z)\, d\xi_u, \tag{3}$$

где $H(u, z)$ — неслучайная функция (так называемая передаточная функция), а стохастический интеграл можно рассматривать как предел в среднеквадратичном соответствующих интегральных сумм. Таким образом, задача восстановления поля θ_z сводится к отысканию функции $H(u, z)$, для которой в свою очередь ниже получено интегральное уравнение с параметром z (см. теорему 1). В принципе можно найти функцию $H(u, z)$, например, методом последовательных приближений ([1]), но поскольку придется вычислять $H(u, z)$ при каждом значении $z \in \Pi_T$, то реализовать практически эту процедуру, по-видимому, трудно. Гораздо интереснее и с практической и теоретической точек зрения найти уравнение (стохастическое) для самой оценки $\bar{\theta}_z$. Но без дополнительных предположений относительно корреляционной функции $K(u, z)$ это сделать невозможно. В аналогичной одномерной задаче (т.е. при $z \in [0, T]$) удалось получить замкнутую систему уравнений для непосредственного вычисления $\bar{\theta}_z$ в так называемом условно-гауссовском случае (см. [7], гл. 12, § 4), в рамки которого входят, в частности, схема фильтра Калмана–Бьюси ([5]).

В настоящей работе мы сделаем предположения относительно поля θ_z, которые аналогичны предположениям схемы фильтра Калмана–Бьюси, а именно: далее предполагается, что поле θ_z удовлетворяет стохастическому уравнению в частных производных (в обобщенном смысле) вида

$$L_z\theta_z = b(z)\ddot{w}'_z, \tag{4}$$

где: $L_z = \dfrac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + \alpha(z)\dfrac{\partial}{\partial z_1} + \beta(z)\dfrac{\partial}{\partial z_2} + \gamma(z)$ — дифференциальный оператор гиперболического типа; $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$ и $b(z)$ — известные функции; w'_z — винеровское поле, независящее от w_z. Относительно начальных условий мы предположим, что $\theta_z = 0$ при $z_1 = 0$ и $z_2 = 0$ (стохастическая задача Гурса). Случай общих граничных условий для θ_z и ξ_z будет рассмотрен в другой работе.

Оказалось, что для поля θ_z, удовлетворяющего уравнению (4), оценка $\bar{\theta}_z$ при некоторых условиях удовлетворяет следующему уравнению, понимаемому в обобщенном смысле:

$$L_z^*\left(\frac{1}{b^2(z)} L_z\bar{\theta}_z\right) + \frac{A^2(z)}{B^2(z)}\bar{\theta}_z = \frac{A(z)}{B^2(z)}\ddot{\xi}_z \tag{5}$$

с краевыми условиями

$$L_z\bar{\theta}_z = 0, \quad z \in \partial\hat{\Pi}_T = \{z_1 = T_1,\ 0 < z_2 \leqslant T_2\} \cup \{z_2 = T_2,\ 0 < z_1 \leqslant T_1\} \tag{6}$$

и

$$\bar{\theta}_z = 0, \quad z \in \partial\check{\Pi}_T = \{z_1 = 0,\ 0 \leqslant z_2 < T_2\} \cup \{z_2 = 0,\ 0 \leqslant z_1 < T_1\}, \tag{7}$$

где L_z^* — сопряженный дифференциальный оператор к L_z.

Уравнение (5) и краевое условие (6) следует из интегро-дифференциального уравнения (28), которое понимается в обычном („итовском") смысле (см. раздел 4).

Из работ, близких к настоящей по постановке задачи, автору известны только работы [10] и [9]. В [10] для общего случая (без предположения о гауссовости) получено некоторое стохастическое уравнение для оценок функционалов от значений ненаблюдаемого поля θ_z на границе Π_z по известным значениям ξ_u, $u \in \Pi_z$ (задача фильтрации). Но это уравнение не является замкнутым для моментов $\bar{\theta}_z$ и неясно, можно ли из него получить какую-либо замкнутую систему (как из аналогичного уравнения в одномерном случае, см. [7]). В работе [9] рассматривались задачи интерполяции и фильтрации для поля θ_z, удовлетворяющего некоторому стохастическому интегральному уравнению, которое, если трактовать θ_z как обобщенное, сводится к уравнению типа (4) с $\alpha(z) = \beta(z) = 0$.

Интересно отметить, что уравнение (5) с краевыми условиями (6) и (7) справедливо также и в одномерной схеме фильтра Калмана–Бьюси, если считать $L_z = \dfrac{d}{dz} + a(z)$ и соответственно заменить $\ddot{w}_z$ и $\ddot{\xi}_z$ на $\dot{w}_z$ и $\dot{\xi}_z$, $z \in [0, T]$. Этот факт, по-видимому, был не известен, хотя с вычислительной точки зрения уравнение (5) проще чем хорошо известные системы уравнении прямой и обратной интерполяции (см. [7], гл. 12). Доказательство соответствующего утверждения аналогично приводимому ниже и легко обобщается на случай векторных процессов θ_z и ξ_z.

2. Интегральное уравнение для передаточной функции

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ задано винеровское поле w_z, т.е. гауссовское поле с независимыми приращениями,

$$\boldsymbol{E}w_z = 0 \quad \text{и} \quad \boldsymbol{E}w_u w_z = \min(u_1, z_1)\min(u_2, z_2). \tag{8}$$

Обозначим $L_2(\Pi_T)$ пространство действительных неслучайных функций $\varphi(u)$, $u \in \Pi_T$, таких, что $\int \varphi^2(u)\,du < \infty$. Для $\varphi \in L_2(\Pi_T)$ определен стохастический интеграл $\int \varphi(u)\,dw_u$ ([1], [11]), причем справедливы следующие соотношения

$$(9)\qquad E\int_{\Pi_z}\varphi(u)\,dw_u = 0,\quad E\Big\{\int_{\Pi_z}\varphi(v)\,dw_v\int_{\Pi_z}\psi(v)\,dw_v\Big\} = \int_{\Pi_u\cap\Pi_z}\varphi(v)\psi(v)\,dv.$$

Мы предполагаем везде далее выполнение следующих условий:

(10) поля θ_z и ω_z — независимы;

(11) функции $A(z)$, $K(u,z)$, $B(z)$ — непрерывны;

(12) $B^2(z) > 0$.

Эти условия не являются необходимыми для выполнения формулируемых ниже утверждений и заведомо могут быть ослаблены (в этой работе не ставилась цель получить решение сформулированной задачи при самых общих условиях). В предположениях (10), (11) и (12) поле ξ_z, удовлетворяющее уравнению (1), является гауссовским.

В дальнейшем существенно будет использоваться представление условных средних относительно $\mathscr{F}_T^\xi$ ввиде стохастического интеграла $\int\varphi(u)\,d\xi_u$ и по полю ξ_z, который определен для $\varphi \in L_2(\Pi_T)$. Относительно определения этого интеграла отметим только, что его можно понимать как в смысле равенства

$$(13)\qquad \int\varphi(v)\,d\xi_v = \int\varphi(v)\theta_v\,dv + \int\varphi(v)B(v)\,dw_v,$$

так и в другом, но равносильном смысле, как предел в среднеквадратичном соответствующих интегральных сумм для ступенчатых функций.

Лемма 1. *Если случайные величины η и ξ_z образуют гауссовскую систему при всех $z \in \Pi_T$ и выполнены условия* (10), (11) *и* (12), *то*

$$(14)\qquad E(\eta|\mathscr{F}_T^\xi) = E\eta + \int_{\Pi_T} H(u)\,d\xi_u,$$

где $H(u) \in L_2(\Pi_T)$.

Эта лемма является аналогом известного утверждения о представлении условных средних для случайных процессов, которое используется при выводе уравнений фильтрации в схеме фильтра Калмана–Бьюси ([7], лемма 10.1).

Доказательство леммы 1. Доказательство проводится по тому же плану, что и леммы 10.1 из [7] и поэтому мы наметим его здесь только в общих чертах.

Введем на Π_T двоично-рациональное разбиение $\{u_{k,l}^{(n)}\}$, где $u_{k,l}^{(n)} = (u_{1,k}^{(n)}, u_{2,l}^{(n)})$, $u_{i,k}^{(u)} = k2^{-n}T_i$ при $i = 1, 2$ и $0 \leqslant k \leqslant 2^n$. Обозначим $\xi_{k,l}^{(n)}$ значение поля ξ_u в точке $u = u_{k,l}^{(n)}$. Введем σ-алгебру

$$\mathscr{F}_{T,n}^\xi = \sigma\{\omega:\ \Box\xi_{k,l}^{(n)},\ 0 \leqslant k \leqslant 2^n,\ 0 \leqslant l \leqslant 2^n\},$$

где

$$\Box\xi_{k,l}^{(n)} = \xi_{k+1,l+1}^{(n)} - \xi_{k,l-1}^{(n)} - \xi_{k+1,l}^{(n)} + \xi_{k,l}^{(n)}.$$

Поскольку $\mathscr{F}_{T,n}^\xi \uparrow \mathscr{F}_T^\xi$ п.в. при $n \to \infty$, то

$$E(\eta|\mathscr{F}_{T,n}^\xi) \to E(\eta|\mathscr{F}_T^\xi)$$

в смысле сходимости п.в. и в среднеквадратичном. Далее, используя теорему нормальной корреляции, получаем

$$E(\eta|\mathscr{F}_{T,n}^\xi) = E\eta + \sum_{k,l} H_{k,l}^{(n)}\Box\xi_{k,l}^{(n)},$$

где $H_{k,l}^{(n)}$ — некоторые неслучайные коэффициенты. Полагая $H^{(n)}(u) = H_{k,l}^{(n)}$ при $u_{1,k}^{(n)} < u_1 \leqslant u_{1,k+1}^{(n)}$ и $u_{2,l}^{(n)} < u_2 \leqslant u_{2,l+1}^{(n)}$, получаем представление (14) с $\mathscr{F}_{T,n}^\xi$ вместо $\mathscr{F}_T^\xi$. Далее, в точности как и в [7], доказывается фундаментальность последовательности функций $H^{(n)}(u)$ в пространстве $L_2(\Pi_T)$, что и приводит к возможности предельного перехода по $n \to \infty$.

Нетрудно проверить, что условия леммы 1 выполнены для $\eta = \theta_z$. Поэтому, существует функция $H(u) = H(u,z) \in L_2(\Pi_T)$ при $z \in \Pi_T$ такая, что справедливо представление (3).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (10), (11) *и* (12). *Тогда при каждом $z \in \Pi_T$ передаточная функция $H(u,z)$ из представления* (3) *удовлетворяет уравнению*

$$(15)\qquad A(u)K(u,z) = \int_{\Pi_T} A(u)K(u,v)A(v)H(v,z)\,dv + B^2(u)H(u,z).$$

Решение этого уравнения существует и единственно в классе непрерывных функций.

Доказательство теоремы 1. Доказательство которое приводится ниже, основано на методе, которым выведено уравнение для передаточной функции фильтра Калмана–Бьюси в [7] (лемма 10.3).

В силу известных свойств условных математических ожиданий справедливо равенство

$$E\{(\theta_z - \bar\theta_z)\int_{\Pi_T} f(u)\,d\xi_u\} = 0$$

для любой функции $f \in L_2(\Pi_T)$.

Отсюда, учитывая соотношение (13), независимость полей θ_z и w_z, свойство (9) и представление (3), получим

$$\int_{\Pi_T}\Big\{A(u)K(u,z) - \int_{\Pi_T}\bar K(u,v)H(v,z)\,dv - B^2(u)H(uz)\Big\}f(u)\,du = 0,$$

где $\bar K(u,v) = A(u)K(u,v)A(v)$. В силу произвольности функции f получаем соотношение (15) при п.в. $u \in \Pi_T$.

Поскольку ядро $\bar K(u,v)$ получившегося интегрального уравнения является положительным и непрерывным, а свободный член $A(u)K(u,z)$ непрерывен, то по известной теории Гильберта–Шмидта (см. например, [1]) решение этого уравнения существует и единственно в классе непрерывных функций.

Замечание 1. Используя теорему Мерсера [1], можно показать, что при $B^2 \equiv 1$

$$A(z)H(u,z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{\lambda_k+1}\,\varphi_k(u)\varphi_k(z), \tag{16}$$

где φ_k и λ_k собственные функции и собственные значения ($\lambda_k > 0$) ядра $\overline{K}(u, z)$, а ряд (16) сходится регулярно на $\Pi_T\times\Pi_T$ и значит $A(z)\,H(u,z)$ — непрерывно на $\Pi_T\times\Pi_T$. Аналогичный факт имеет место при выполнении условий (11) и (12).

3. Ненаблюдаемое поле

Будем называть поле θ_z *решением* (*обобщенным*) уравнения (4) если для любой функции $\varphi_z \in C_0^2(\Pi_T)$ (т. е. любой дважды непрерывно дифференцируемых функций с носителем $\operatorname{supp}\varphi \subset \Pi_T$) с вероятностью единица выполняется равенство

$$\int L_z^*\varphi(z)\theta_z\,dz = \int \varphi(z)b(z)\,dw_z. \tag{17}$$

Относительно коэффициентов оператора L_z предположим, что:

(18) функции $\alpha(z)$, $\beta(z)$, $\gamma(z)$, $\dfrac{\partial\alpha(z)}{\partial z_1}$, $\dfrac{\partial\beta(z)}{\partial z_2}$ — непрерывны;

(19) функция $b(z)$ — непрерывна и $b^2(z) > 0$.

Обозначим $R(u,z)$ функцию Римана оператора L_z, т.е. функцию, обладающую следующими свойствами ([6]):

1) $L_z R(u,z) = 0$ при $u_1 < z_1,\ u_2 < z_2$;

2) $\dfrac{\partial R(u,z)}{\partial z_1} + \beta(z)R(u,z) = 0$ при $u_2 = z_2,\ u_1 \leqslant z_2$;

$\dfrac{\partial R(u,z)}{\partial z_2} + \alpha(z)R(u,z) = 0$ при $u_1 = z_1,\ u_2 \leqslant z_2$;

3) $R(z,z) = 1$.

Функция $R(u,z)$ существует, например, при предположении (18) ([6]) и обладает также следующими свойствами:

4) $L_z^* R(u,z) = 0$ при $u_1 < z_1,\ u_2 < z_2$;

5) $\dfrac{\partial R(u,z)}{\partial u_1} - \beta(u)R(u,z) = 0$ при $u_2 = z_2,\ u_1 \leqslant z_1$;

$\dfrac{\partial R(u,z)}{\partial u_2} - \alpha(u)R(u,z) = 0$ при $u_1 = z_1,\ u_2 \leqslant z_2$.

Лемма 2. *Если выполнены условия* (10), (11), (12), (18) *и* (19), *то решение уравнения* (4) *имеет представление*

$$\theta_z = \int_{\Pi_z} R(u,z)b(u)\,dw_u. \tag{20}$$

Доказательство. Подставляя представление (20) в левую часть (17) и меняя порядки интегрирования (возможность этой операции легко доказать по аналогии с одномерным случаем, см. [4], а также [7], теорема 15.1), получим, что левая часть (17) равна

$$\int_{\Pi_T} f(z)b(z)\,dw_z$$

где

$$f(z) = \int_{\Pi_T} I(z \prec u)L_u^*\varphi(u)R(z,u)\,du,$$

$I(\ )$ — индикаторная функция и $u \prec z \Leftrightarrow u_1 < z_1,\ \ u_2 < z_2$. Исходя из перечисленных свойств функции Римана, нетрудно проверить, что $f(z) = \varphi(z)$. Это и требовалось показать.

Отметим, что уравнение (4) имеет единственное решение в классе обобщенных случайных полей над пространством $C_0^2(\Pi_T)$. Этот факт вытекает очевидным образом из единственности решения задачи Гурса ([6]).

Из представления (20) и свойств стохастических интегралов (9) следует, что $E\theta_z = 0$ и

$$K(u,z) = \int_{\Pi_u\cap\Pi_z} R(v,u)R(v,z)b^2(v)\,dv. \tag{21}$$

Отсюда и из свойств функции Римана вытекает, что

$$L_z K(u,z) = I(z \prec u)R(z,u)b^2(z), \quad u \notin \partial\hat{\Pi}_z. \tag{22}$$

Из (22) следует, что в смысле обобщенных функций

$$L_z^*\left(\frac{1}{b^2(z)}\,L_z K(u,z)\right) = \delta(u,z), \tag{23}$$

где $\delta(u,z)$ — δ-функция Дирака.

Замечание 2. Приведем два примера гауссовских полей, удовлетворяющих уравнению типа (4). Первый пример — так называемое *условное винеровское поле* w_z^0 (см. [12], [8]), т.е. гауссовское поле с $Ew_z^0 = 0$ и корреляционной функцией $Ew_u^0 w_z^0 = |\min(u,z)| - |u|\cdot|z|$, где $|z| = z_1\cdot z_2$, $z \in \Pi_{(1,1)}$. Как нетрудно проверить, это поле при всех $z \prec (1,1)$ удовлетворяет уравнению (4) с $b^2(z) = (1+|z|)(1-|z|)^{-1}$ и

$$L_z = \frac{\partial z}{\partial z_1\partial z_2} + \frac{z_1}{1-|z|}\,\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{z_2}{1-|z|}\,\frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{1+|z|}{(1-|z|)^2}.$$

Функция Римана этого поля определяется единственным образом и равна $(1-|z|)(1-|u|)^{-1}$.

Второй пример — гауссовское поле $\tilde{w}_z$ с $E\tilde{w}_z = 0$ и

$$E\tilde{w}_u w_z = [\min(u_1,z_1) - u_1 z_1]\,[\min(u_2,z_2) - u_2 z_2], \quad z \in \Pi_{(1,1)}.$$

Это поле обладает тем свойством, что оно принимает нулевые значения на всей границе квадрата $\Pi_{(1,1)}$ („броуновская простыня") ([12], [8]). Для этого поля

$$R(u,z) = (1-z_1)(1-z_2)(1-u_1)^{-1}(1-u_2)^{-1}, \qquad b^2(z) = 1$$

и

$$L_z = \frac{\partial^2}{\partial z_1 \partial z_2} + \frac{1}{(1-z_2)}\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{1}{(1-z_1)}\frac{\partial}{\partial z_2} + \frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)}.$$

Замечание 3. Утверждение леммы 2 в случае $\alpha(z) = \beta(z) = 0$ следует из работы [9].

4. Уравнение оптимальной интерполяции

По аналогии с определением решения уравнения (4), естественно считать, что поле $\overline{\theta}_z$ удовлетворяет уравнению (5), если для любой функции $\varphi \in C_0^2(\Pi_T)$ с вероятностью единица выполняется равенство

$$\int L_z\varphi(z)\frac{1}{b^2(z)}L_z\overline{\theta}_z\,dz = \int \varphi(z)\frac{A(z)}{B^2(z)}\left(d\xi_z - A(z)\overline{\theta}_z\,dz\right). \tag{24}$$

Ниже будет показано, что поле $L_z\overline{\theta}_z$ можно рассматривать в обычном смысле и поэтому запись (24) имеет смысл.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (10), (11), (12), (18) *и* (19). *Тогда оценка* $\overline{\theta}_z$ *удовлетворяет уравнению* (5) *с краевыми условиями* (6) *и* (7).

Перед формальным доказательством этой теоремы покажем, как эвристически можно получить уравнение (5) из следующих простых соображений.

Применим оператор $L_z^*(b^{-2}(z)L_z)$ к обеим частям уравнения (15). Тогда в силу (23) получим

$$A(u)\delta(u,z) = \int \overline{K}(u,v)L_z^*\big(b^{-2}(z)L_zH(v,z)\big)dv + B^2(u)L_z^*\big(b^{-2}(z)L_zH(u,z)\big).$$

Отсюда, используя опять (15), определение δ-функции и вводя обозначение $M_z = L_z^*(b^{-2}(z)L_z) + A^2(z)B^{-2}(z)$, имеем

$$\int \overline{K}(u,v)\left[M_zH(v,z) - \frac{A(z)}{B^2(z)}\delta(v,z)\right]dv + M_zH(u,z) - \frac{A(z)}{B^2(z)}\delta(u,z) = 0.$$

Из этого уравнения в силу положительности ядра $\overline{K}(u,v)$ следует, что функция $H(u,z)$ является функцией Грина оператора M_z, т.е.

$$M_zH(u,z) = \frac{A(z)}{B^2(z)}\delta(u,z).$$

Применяя оператор M_z к обеим частям представления (3) получим уравнение (5).

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим функцию

$$\psi(v,z) = -b^2(z)\int_{\Pi_T} I(z\prec y)R(z,y)A(y)H(v,y)B^{-2}(y)\,dy + b^2(z)I(z\prec v)R(z,v)B^{-2}(v), \tag{25}$$

где $H(v,y)$ — решение интегрального уравнения (15). В силу сделанных предположений интеграл в (25) существует и значит функция $\psi(v,z)$ определена. Умножая обе части (25) на $\overline{K}(u,v)$ и интегрируя по v на Π_T, а затем меняя порядки интегрирования и используя исходное уравнение (15), получим следующее соотношение

$$\int_{\Pi_T}\overline{K}(u,v)\psi(v,z)\,dv + B^2(u)\psi(u,z) = b^2(z)I(z\prec u)R(z,u)A(u). \tag{26}$$

Покажем теперь, что выполнено равенство

$$H(u,z) = \int_{\Pi_z} R(v,z)\psi(u,v)\,dv. \tag{27}$$

Для этого рассмотрим функцию $\tilde{H}(u,z) = \int_{\Pi_z} R(v,z)\psi(u,v)\,dv$. Эта функция является, как нетрудно проверить исходя из соотношений (26) и (25), решением исходного уравнения (15) при всех значениях параметра $z \in \Pi_T$. В силу единственности решения уравнения (15) $\tilde{H}(u,z) = H(u,z)$, что и дает нужный результат.

Подставляя (27) в формулу (3) и меняя порядки интегрирования, получим, что

$$\overline{\theta}_z = \int_{\Pi_z} R(u,z)\eta_u\,du, \tag{28}$$

где ввиду (25)

$$\eta_z \equiv \int_{\Pi_T}\psi(u,z)\,d\xi_u = b^2(z)\int_{\Pi_T} I(z\prec v)R(z,v)A(v)B^{-2}(v)\left[d\xi_v - A(v)\overline{\theta}_v\,dv\right].$$

Используя гауссовость полей ξ_z и $\overline{\theta}_z$ и непрерывность смешанных производных функции $R(z,v)$ (см. напр. [1]), нетрудно установить, что поле η_z является с вероятностью единица непрерывным. (Для установления этого факта можно воспользоваться, например, теоремой Ченцова [13], являющейся обобщением известной теоремы Колмогорова о непрерывности п.в. случайных процессов). Из непрерывности поля η_z и из представления (28) следует, что поле $\overline{\theta}_z$ имеет непрерывные п.в. частные и смешанные производные по z_1 и z_2, причем

$$L_z\overline{\theta}_z = \int_{\Pi_T} L_zH(u,z)\,d\xi_u.$$

Отсюда, из (25), (27) и (3) получаем следующее интегро-дифференциальное уравнение для $\overline{\theta}_z$:

$$L_z\overline{\theta}_z = b^2(z)\int_{\Pi_T} I(z\prec v)R(z,v)\frac{A(v)}{B^2(v)}\left[d\xi_v - A(v)\overline{\theta}_v\,dv\right].$$

Из этого уравнения непосредственно следует выполнение краевого условия (6). Краевое условие (7) выполняется в силу того, что $\theta_z = 0$ при $z_1 = 0$ или $z_2 = 0$.

Чтобы доказать соотношение (24) заметим, что для любой функции $\varphi \in C_0^2(\Pi_T)$ с вероятностью единица

$$\int\limits_{\Pi_T} L_z \varphi(z) \left\{ \int\limits_{\Pi_T} I(z \prec v) R(z, v) \frac{A(v)}{B^2(v)} d\xi_v \right\} dz = \int\limits_{\Pi_T} f(v) \frac{A(v)}{B^2(v)} d\xi_v,$$

где $f(v) = \int I(z \prec v) R(z, v) L_z \varphi(z) dz$ и, как нетрудно проверить, $f(v) = \varphi(v)$. Отсюда следует (24) и, значит, $\bar{\theta}_z$ удовлетворяет уравнению (5) (в обобщенном смысле).

В заключение автор выражает признательность Р. Ш. Липцеру и А. Н. Ширяеву за внимание к работе.

Литература

[1] В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, Наука, Москва 1971.

[2] И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Некоторые применения гармонического анализа, оснащенные гильбертовы пространства*, Москва 1961.

[3] [К. Ито] K. Ito, *Multiple Wiener integrals*, J. Math. Soc. Japan 3 (1951), стр. 157–169.

[4] [Г. Каллианпур, Ш. Стрибел] G. Kallianpur, C. Striebel, *Stochastic differential equations, occurring in the estimation of continuous parameter stochastic processes*, Теория вероятн. и ее примен. 14 (1969), стр. 597–622.

[5] [Р. Е. Калман, Р. С. Бьюси] R. E. Kalman, R. S. Bucy, *New results in linear prediction and filtering theory*, J. Basic Eng. (Trans. Asme. Ser. D) 83 D (1961), стр. 95–108.

[6] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, Москва 1972.

[7] Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев, *Статистика случайных процессов*, Наука, Москва 1974.

[8] [Р. Пайк] R. Pyke, *Partial sums of matrix arrays and Brownian sheets*, Stochastic Analysis, London 1973.

[9] Л. Л. Пономаренко, *Линейная фильтрация случайных полей, управляемых стохастическими уравнениями*, Кибернетика 2 (1973), стр. 87–91.

[10] [Е. Уонг] E. Wong, *Recursive filtering for two-dimensional random fields*, IEEE Trans. Information Theory 21 (1975), стр. 84–86.

[11] [Е. Уонг, М. Закаи] E. Wong, M. Zakai, *Martingales and stochastic integrales for processes with a multidimensional parameter*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 29 (1974), стр. 109–122.

[12] Н. Н. Ченцов, *Обоснование статистических критериев методами теории случайных процессов*, Диссертация, МИАН, 1958.

[13] —, *Винеровские случайные поля от несколкзх параметров*, ДАН СССР 106 (1965), стр. 607–609.

Presented the Semester
Probability Theory
February 11–June 11, 1976

PROBABILITY THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS VOLUME 5
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

ON THE RATE OF CONVERGENCE IN THE CENTRAL LIMIT THEOREM

Z. RYCHLIK and D. SZYNAL

Institute of Mathematics, Maria Curie-Skłodowska University, Lublin, Poland

This note studies the rate of convergence in the central limit theorem in terms of Trotter's operators. The obtained results are more general and, in some cases, give sharper estimates than those of [1].

1. Introduction and notations

Let $\{X_n, n \geqslant 1\}$ be a sequence of independent random variables with variances

$$0 < \sigma_n^2 = \sigma^2 X_n < \infty, \quad \text{for each } n \in N.$$

Write

$$\alpha_{ij} = EX_i^j, \quad \beta_{ij} = E|X_i|^j, \quad 0 \leqslant j \leqslant r;\ i, j \in N,\ r \geqslant 2.$$

Further on, we assume that

$$\frac{\alpha_{ij}}{\sigma_i^j} = \gamma_j, \quad \text{for} \quad 0 \leqslant j \leqslant r;\ i \in N. \tag{1}$$

Let us observe that (1) takes place if, for instance, we have the pseudomoments

$$\nu_i(j) = \int\limits_R x^j d[F_{X_i}(x) - \Phi(x/\sigma_i)] = 0, \quad \text{for} \quad 0 \leqslant j \leqslant r;\ i \in N,$$

where Φ denotes the standard normal distribution function.

Let us put

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2, \quad X_i^* = X_i/s_n,$$

$$S_n^* = \sum_{i=1}^n X_i^*, \quad a_{nt}^{-1}(\delta) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} \int\limits_{|x| < \delta s_n} |x|^t dF_i(x),$$

where $\delta > 0$, $t > 0$;

$$b_{it} = E\frac{|X_i|^t}{s_n^{2t} + X_n^{2t}}, \quad b'_{it} = E\frac{\sigma_i^t |Y|^t}{s_n^{2t} + (\sigma_i Y)^{2t}},$$