References

[1] W. H. Fleming and R. W. Rishel, *Deterministic and stochastic optimal control*, Appl. Math. 1, Springer-Verlag, 1975.

[2] B. I. Grigelionis and A. N. Shiryaev, *On Stefan problem and optimal stopping rules for Markov processes*, Theor. Probability Appl. 11 (1966), pp. 541–558.

[3] K. Ito, *Stochastic processes*, Lect. Notes 16, Aarhus Univ., 1969.

[4] N. V. Krylov, *Control of a solution of a stochastic integral equation*, Theor. Probability Appl. 17 (1972), pp. 114–131.

[5] —, *On Bellman's equation*, Proc. School–Seminar on the theory of random processes, Part I, Vilnius 1974, pp. 203–235.

[6] —, *Optimal stopping of controlled diffusion processes*, 3rd USSR–Japan Symp. Prob. Th., 1975.

[7] H. P. McKean, *Stochastic integrals*, Academic Press, 1969.

[8] M. Nisio, *Some remarks on stochastic optimal controls*, 3rd USSR–Japan Symp. Prob. Th., 1975.

[9] —, *On a non-linear semi-group attached to stochastic optimal control*, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ. 12 (1976), pp. 513–537.

[10] —, *On stochastic optimal controls and envelope of Markovian semi-groups*, Proc. Intern. Symp. SDE Kyoto 1976, pp. 297–325.

[11] K. R. Parthasarathy, *Probability measures on metric spaces*, Academic Press, 1967.

[12] K. Yosida, *Functional analysis*, Springer-Verlag, 1968.

[13] J. Zabczyk, *Optimal control by means of switchings*, Studia Math. 45 (1973), pp. 161–171.

[14] —, *Stochastic control with at most denumerable number of corrections*, Proc. IFIP Conf., Roma 1974.

Presented to the Semester
Probability Theory
February 11–June 11, 1976

PROBABILITY THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 5
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

О МОМЕНТАХ ОСТАНОВКИ ПОЛУУСТОЙЧИВЫХ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

А. А. НОВИКОВ

Математический институт АН СССР, Москва, СССР

Рассматриваются некоторые классы моментов остановки полуустойчивых диффузионных процессов. Получены точные и асимптотические результаты, характеризующие распределения рассматриваемых моментов остановки.

I. Введение

Одномерный марковский процесс $(X_t, \mathscr{F}_t, P_x)$ со значениями на полупрямой $\boldsymbol{R}^+$ называется *полуустойчивым*, если его переходная функция $P(t, x, B)$ ($B \in \mathscr{B}^+$ — борелевская σ-алгебра на $\boldsymbol{R}^+$) обладает автомодельным свойством, т.е.

$$P(rt, X, B) = P(t, r^{-\alpha}x, r^{-\alpha}B)$$

при всех $r > 0$ и некотором показателе $\alpha > 0$. Полуустойчивые марковские процессы на $\boldsymbol{R}^+$ ввел и описал Ламперти в работе [5], в которой показано, что все невырожденные полуустойчивые диффузионные процессы порождаются оператором

$$L_x f(x) = bx^{1-1/\alpha}f'(x)+dx^{2-1/\alpha}f''(x),$$

где $d > 0$ и b — параметры. Мы будем далее обозначать $\varrho = \dfrac{\alpha b}{d}+1-\alpha$. Из результатов Ламперти следует, что граница $x = \infty$ при всех значениях параметров является естественной, а граница $x = 0$ является естественной только при $\varrho \geqslant 1$; при $\varrho \geqslant 0$ является захватывающей и при $0 < \varrho < 1$ является регулярной, причем в силу предположения о непрерывности траекторий на границе $x = 0$ может быть либо поглощение либо отражение.

В этой заметке рассматриваются следующие классы моментов остановки:

$$\tau_a = \inf\{t \geqslant 0\colon X_t \leqslant a(t+y)^\alpha\},$$

$$\sigma_c = \inf\{t \geqslant 0\colon X_t \geqslant c(t+y)^\alpha \text{ или } X_t = 0\},$$

$$\sigma_c = \inf\{t \geqslant 0\colon X_t \geqslant c(t+y)^\alpha\},$$

при любых значениях параметров $a \geqslant 0, y \geqslant 0$ и $c \geqslant 0$. Если $X_0 \equiv x \leqslant ay^\alpha$, то, очевидно, $\tau_\alpha = 0$, и если $x \geqslant cy^\alpha$, то $\sigma_c = \tilde{\sigma}_c = 0$. В дальнейшем мы будем предполагать выполнение противоположных неравенств. Из результатов Лamперти следует, что $P_x(\tau_0 = \infty) = 1$ при $\varrho \geqslant 1$ и $P_x(\tau_0 < \infty) = 1$ при $\varrho < 1$ (в этом случае распределение τ_0 вычисляется в явном виде, см. формулу (14)). Отсюда следует, что момент остановки $\tilde{\sigma}_c$ определен только при $\varrho \geqslant 1$.

Моменты остановки σ_c и $\tilde{\sigma}_c$ рассматривались в работе Куджмы [3], в которой была решена задача об оптимальной остановке полуустойчивых диффузионных процессов для цепи вида

$$\operatorname*{Sup}_{\tau \in M} E_x X_\tau^\delta (y+\tau)^{-\gamma}, \quad \delta > 0, \gamma > 0,$$

где M — множество моментов остановки. В [3] найдены условия существования оптимального правила остановки для цепи указанного вида и показано, что при $\varrho \geqslant 1$ и при $0 < \varrho < 1$ с условием отражения в нуле оптимальное правило находится в классе моментов $\tilde{\sigma}_c$, а при $\varrho \leqslant 0$ и при $0 < \varrho < 1$ с условием поглощения в нуле — в классе σ_c. Куджма нашел уравнения для оптимальных значений c и показал, что оптимальные правила остановки конечны с вероятностью единица. Из формулируемых ниже результатов можно тоже очевидным образом получить уравнение для оптимальных значений c, а также найти условия существования степенных моментов оптимальных правил остановки.

II. Основные результаты

Обозначим $\varkappa(\nu, \varrho)$ — *наибольший* положительный корень функции $\Psi(-\nu, \varrho, z)$ и $\varkappa^*(\nu, \varrho)$ — *наименьший* положительный корень $\Phi(-\nu, \varrho, z)$, где $\Psi(\cdot, \cdot, z)$ и $\Phi(\cdot, \cdot, z)$ — стандартные обозначения вырожденных гипергеометрических функций (см., например, [1]). Функция $\Psi(-\nu, \varrho, z)$ не имеет положительных нулей только при $\varrho \geqslant 1$, когда $\nu < 0$ и при $\varrho < 1$, $\nu < 1-\varrho$; в этих случаях нам будет удобно считать $\varkappa(\nu, \varrho) = 0$. Если $\varrho > 0$, то функция $\Phi(-\nu, \varrho, z)$ не имеет положительных нулей только при $\nu < 0$; в этом случае будем полагать $\varkappa^*(\nu, \varrho) = +\infty$.

Утверждение 1. *При всех* ν, ϱ *и при* $\alpha^2 a^{1/\alpha}/d > \varkappa(\nu, \varrho)$

$$E_x(\tau_a + y)^\nu = y^\nu \frac{\Psi(-\nu, \varrho, \alpha^2 x^{1/\alpha}/yd)}{\Psi(-\nu, \varrho, \alpha^2 a^{1/\alpha}/d)}. \tag{1}$$

Если $\alpha^2 a^{1/\alpha}/d \leqslant \varkappa(\nu, \varrho)$, *то* $E_x \tau_a^\nu = \infty$.

Утверждение 2. *При всех* ν, $\varrho < 1$ *и при* $\alpha^2 c^{1/\alpha}/d < \varkappa^*(\nu+\varrho-1, 2-\varrho)$

$$E_x(\sigma_c+y)^\nu = y^\nu \left(\frac{x^{1/\alpha}}{c^{1/\alpha} y}\right)^{1-\varrho} \frac{\Phi(-\nu+\varrho-1, 2-\varrho, \alpha^2 x^{1/\alpha}/yd)}{\Phi(-\nu+\varrho-1, 2-\varrho, \alpha^2 c^{1/\alpha}/d)} \times \left[1 - \frac{\Psi(-\nu, \varrho, \alpha^2 c^{1/\alpha}/d)}{\Psi(-\nu, \varrho, 0)}\right] + y^\nu \frac{\Psi(-\nu, \varrho, \alpha^2 x^{1/\alpha}/yd)}{\Psi(-\nu, \varrho, 0)}, \tag{2}$$

где значения правой части при $\nu = 1-\varrho+k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *вычисляются по непрерывности. Если* $\alpha^2 c^{1/\alpha}/d \geqslant \varkappa^*(\nu+\varrho-1, 2-\varrho)$, *то* $E_x \sigma_c^\nu = \infty$.

Утверждение 3. *При всех* ν, $\varrho > 0$ *и при* $\alpha^2 c^{1/\alpha}/d < \varkappa^*(\nu, \varrho)$

$$E_x(\tilde{\sigma}_c + y)^\nu = y^\nu \frac{\Phi(-\nu, \varrho, \alpha^2 x^{1/\alpha}/yd)}{\Phi(-\nu, \varrho, \alpha^2 c^{1/\alpha}/d)}. \tag{3}$$

Если $\alpha^2 c^{1/\alpha}/d \geqslant \varkappa^*(\nu, \varrho)$, *то* $E_x \tilde{\sigma}_c^\nu = \infty$.

Метод, которым получены эти формулы, состоит в следующем. Мы подбираем специальным образом функцию $U(t, x)$ такую, что процесс $U(t \wedge \tau, X_{t\wedge\tau})$, где τ — некоторый момент остановки и $t \wedge \tau = \min(t, \tau)$ является мартингалом (относительно семейства $\mathscr{F}_{t\wedge\tau}$). Отсюда следует, что при некоторых условиях на момент остановки τ выполняется соотношение $E_x U(\tau, X_\tau) = U(0, x)$. Из этого соотношения и выводятся затем нужные формулы. Подобный метод использовался во многих работах. Например, в работе Шеппа [8] аналогичным методом найдены моменты времени первого выхода винеровского процесса на двухстороннюю границу параболического типа (этот результат является частным случаем утверждения 3 при $\overline{x} = 0$, $\alpha = 1/2$, $b = 0$, $d = 1$). Подобный метод использовался в работе [6], а также в работах [7] и [4] для расчета вероятностей пересечения границ, зависящих от времени.

III. Доказательство утверждений 1, 2 и 3

Полуустойчивый диффузионный процесс X_t можно рассматривать при $t < \xi_\varepsilon$, $\xi_\varepsilon = \inf\{t \geqslant 0\colon X_t = \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, как процесс, управляемый стохастическим уравнением

$$X_t = x + \int_0^t B(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma(X_s)\,dw_s, \tag{4}$$

где w_s — стандартный винеровский процесс, $B(x) = bx^{1-1/\alpha}$ и $\sigma(x) = \sqrt{2d}\,x^{1-1/\alpha}$ при $x < \varepsilon$ и соответствующим образом доопределяются при $x \leqslant \varepsilon$ (см. [2], гл. 3). Пусть функция $U(t, x)$ дважды дифференцируема по x при $x > 0$, непрерывно дифференцируема по t и удовлетворяет уравнению

$$U_t'(t, x) + L_x U(t, x) = 0. \tag{5}$$

Тогда, применяя формулу Ито ([8]) к $U(t, X_t)$, получим, что для любого момента остановки τ $(\tau \leqslant \xi_\varepsilon)$

$$U(\tau, X_\tau) = U(0, x) + \int_0^\tau \sqrt{2d}\, X_s^{1-1/2\alpha} U_x'(s, X_s)\,dw_s. \tag{6}$$

Математическое ожидание стохастического интеграла в этом соотношении равно нулю при выполнении, например, следующего условия ([6])

$$E_x\left(\int_0^\tau X_s^{2-1/\alpha} [U_x(s, X_s)]^2 ds\right)^{1/2} < \infty \tag{7}$$

(при этом условии процесс $U(t \wedge \tau, X_{t\wedge\tau})$ является мартингалом).

Пусть далее $U(t, X_t) = (t+y)^\nu \varphi(z_t)$, где $z_t = \alpha^2 X_t^{1/\alpha}/(t+y)d$, $y > 0$. Тогда из (5) получим следующее уравнение для $\varphi(z)$:

$$z\frac{d^2}{dz^2}\varphi(z)+(\varrho-z)\frac{d}{dz}\varphi(z)+\nu\varphi(z) = 0. \tag{8}$$

Решениями этого уравнения являются функции

$$\Psi(-\nu, \varrho, z),\ z^{1-\varrho}\Phi(-\nu+\varrho-1, 2-\varrho, z)\ (\varrho < 1) \quad \text{и} \quad \Phi(-\nu, \varrho, z)\ (\varrho \neq 0, -1, -2, \ldots), \tag{9}$$

из которых можно составить фундаментальную систему решений, причем эти функции являются аналитическими функциями от ν при действительных ϱ и $z \geqslant 0$ (для которых они определены) (см. [1]).

Приступим теперь непосредственно к выводу формул (1) и (2). Положим в (6) $\tau = \sigma_c \wedge \tau_a$, $a > 0$. Ясно, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ п.в. $\tau_a \leqslant \xi_\varepsilon$. Нетрудно проверить, что в силу неравенств $0 < a \leqslant X_S(s+y)^{-\alpha} \leqslant c$ при всех $s \leqslant \sigma_c \wedge \tau_a$, условие (7) заведомо выполняется при $\nu < 0$ для любой функции из набора (9) (при $\nu > 0$ выполнено, если $E_x(\sigma_c \wedge \tau_a + y)^\nu < \infty$). Поэтому из (6) получаем, учитывая непрерывность траектории X_t, что для любого решения уравнения (8) при $\nu < 0$

$$E_x I(\sigma_c \leqslant \tau_a)(\sigma_c+y)^\nu \varphi(\alpha^2 c^{1/\alpha}/y)+E_x I(\tau_a < \sigma_c)(\tau_a+y)^\nu \varphi(\alpha^2 a^{1/\alpha}/y) = = y^\nu \varphi(\alpha^2 x^{1/\alpha}/yd), \tag{10}$$

где $I(\ )$ — индикаторная функция.

Теперь вывод формул (1) и (2) при $\nu < 0$ сводится к подбору решений уравнения (8) и предельным переходам. Рассмотрим в качестве $\varphi(z)$ функцию $\Psi(-\nu, \varrho, z)$. Известно, что

$$\Psi(-\nu, \varrho, z) = z^\nu\big((1+O(|z|^{-1})\big), \quad z \to \infty, \tag{11}$$

(см. [1], это единственное с точностью до константы решение уравнения (8), имеющее степенную асимптотику на бесконечности). Учитывая этот факт, нетрудно показать, что предел первого слагаемого в (10) при $c \to \infty$ равен нулю. Предельный переход во втором слагаемом дает формулу (1) при всех $\nu < 0$.

Для доказательства этой формулы при $\nu \geqslant 0$, заметим, что правая часть формулы представляет отношение двух аналитических функций. Поэтому правая часть формулы (1) представляет аналитическую функцию от ν при всех ν из области $\operatorname{Re}\nu < \bar{\nu}$, где $\bar{\nu}$ — определяется из равенства $\alpha^2 a^{1/\alpha}/d = \varkappa(\bar{\nu}, \varrho)$. Из этого факта следует возможность аналитического продолжения равенства в формуле (1) на все ν, определяемых из условия $\alpha^2 a^{1/\alpha}/d > \varkappa(\nu, \varrho)$.

Для доказательства формулы (2) рассмотрим в качестве $\varphi(z)$ функции $\Psi(-\nu, \varrho, z)$ и $z^{1-\varrho}\Phi(-\nu-\varrho+1, 2-\varrho, z)$ $(\varrho < 1)$.

Для этих функций предельным переходом при $a \to 0$ в (10) с учетом того, что $\Phi(-\nu, \varrho, 0) = 1$, получим

$$E_x I(\sigma_c < \tau_0)(\sigma_c+y)^\nu \Psi(-\nu, \varrho, \alpha^2 c^{1/\alpha}/d)+E_x I(\sigma_c = \tau_0)(\sigma_c+y)^\nu \Psi(-\nu, \varrho, 0) = = y^\nu \Psi(-\nu, \varrho, \alpha^2 x^{1/\alpha}/d),$$

$$E_x I(\sigma_c < \tau_0)(\sigma_c+y)^\nu \left(\frac{\alpha^2}{d}c^{1/\alpha}\right)^{1-\varrho}\Phi\left(-\nu+\varrho-1, 2-\varrho, \frac{\alpha^2}{d}c^{1/\alpha}\right) = = y^\nu\left(\frac{\alpha^2}{d}x^{1/\alpha}\right)^{1-\varrho}\Phi\left(-\nu+\varrho-1, 2-\varrho, \frac{\alpha^2}{d}x^{1/\alpha}\right).$$

Из этих соотношений получаем формулу (2) при всех $\nu < 0$. Отметим, что

$$\Psi(-\nu, \varrho, 0) = \Gamma(1-\varrho)/\Gamma(1-\varrho-\nu), \tag{12}$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция. Поэтому правая часть формулы (2) неопределена при $\nu = 1-\varrho+k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Если $\varrho \neq 0, -1, -2, \ldots$, то эта неопределенность раскрывается с помощью известной формулы, связывающей функции $\Phi(-\nu, \varrho, z)$ и $\Psi(-\nu, \varrho, z)$ (см. [1], формула 6.5.7). Применяя эту формулу, мы получаем следующее выражение для правой части (2) при $\varrho \neq 0, -1, -2, \ldots$

$$y^\nu\left(\frac{x^{1/\alpha}}{c^{1/\alpha}y}\right)^{1-\varrho}\frac{\Phi(-\nu+\varrho-1, 2-\varrho, \alpha^2 x^{1/\alpha}/y)}{\Phi(-\nu+\varrho-1, 2-\varrho, \alpha^2 c^{1/\alpha}/d)}\times \times[1-\Phi(-\nu, \varrho, \alpha^2 c^{1/\alpha}/d)]+y^\nu\Phi(-\nu, \varrho, \alpha^2 x^{1/\alpha}/yd).$$

Для раскрытия неопределенности в случае $\varrho = 0, -1, -2, \ldots$ (так называемый „логарифмический'' случай) надо воспользоваться формулами (6.7.13) из [1] (мы не приводим эту формулу ввиду ее громоздкости). Во всех случаях мы получаем, что правая часть формулы (2) является аналитической функцией от ν, в области $\operatorname{Re}\nu < \nu^*$, где ν^* определяются из равенства $\alpha^2 c^{1/\alpha}/d = \varkappa^*(\nu+\varrho-1, 2-\varrho)$. Отсюда следует утверждение 2 в общем случае.

Формулу (3) при всех $\varrho \geqslant 1$ можно получить тем же методом, что и выше были найдены формулы (1) и (2). Действительно, если рассмотреть в качестве $\varphi(z)$ функцию $\Phi(-\nu, \varrho, z)$, то с учетом того, что $P(\tau_0 = \infty) = 1$ при $\varrho \geqslant 1$, получим сначала (3) при $\nu < 0$, а затем с помощью аналитического продолжения при всех ν, определяемых из условия $\alpha^2 c^{1/\alpha}/d < \varkappa^*(\nu, \varrho)$. Случай $0 < \varrho < 1$ требует особого рассмотрения, так как в этом случае $P(\sigma_c > \tau_0) > 0$, а описание процесса с помощью стохастического уравнения (4) возможно только при $t < \tau_0$. В этом случае можно воспользоваться, например, результатами работы Лея [4], в которой обобщается известная формула Дынкина [2] на случай функций, зависящих от времени. С помощью теоремы 1 этой работы можно доказать, что процесс $(t \wedge \sigma_c + y)^\nu \Phi\left(-\nu, \varrho, \frac{\alpha^2}{d}x_{t\wedge\sigma_c}^{1/\alpha}\right)$, $\nu < 0$, является мартингалом относительно $\mathscr{F}_{t\wedge\sigma_c}$. Доказательство этого факта сводится к непосредственной проверке условий теоремы 1 из [4] для процесса

x_t с временем жизни $\xi = \sigma_c$ и функцией $\varphi(x) = 1$ (в обозначениях этой теоремы). Отсюда следует, что при $\nu < 0$

$$E_x(t\wedge\sigma_c+y)^\nu \Phi\left(-\nu,\varrho,\frac{\alpha^2}{d}x_{t\wedge\sigma_c}^{1/\alpha}/(t\wedge\sigma_c+y)\right) = y\Phi\left(-\nu,\varrho,\frac{\alpha^2}{yd}x\right). \tag{13}$$

Так как на множестве $\{t \leqslant \sigma_c\}$ $x_t^{1/\alpha}/(t+y) \leqslant c^{1/\alpha}$ при всех t, то нетрудно проверить, что

$$\lim_{t\to\infty} E_x I(t\leqslant\sigma_c)\Phi(-\nu,\varrho,\cdot) = 0.$$

Поэтому из (13) предельным переходом по $t\to\infty$ получим формулу (3) при всех $\nu < 0$. Далее, как обычно, аналитическим продолжением получим формулу (3) и в общем случае.

IV. Несколько следствий

1. Из формулы (1) предельным переходом по $y\to 0$ в силу (11) получим

$$E_x\tau_a^\nu = \left(\frac{\alpha^2 x^{1/\alpha}}{d}\right)^\nu \Psi^{-1}\left(-\nu,\varrho,\frac{\alpha^2}{d}a^{1/\alpha}\right),\qquad \frac{\alpha^2}{d}x^{1/\alpha} > \varkappa(\nu,\varrho).$$

Так как при $\varrho < 1$ выполняется (12), то еще одним предельным переходом по $a\to 0$ получаем

$$E_x\tau_0^\nu = \left(\frac{\alpha^2 x^{1/\alpha}}{d}\right)^\nu \frac{\Gamma(1-\varrho)}{\Gamma(1-\varrho-\nu)},\qquad \varrho<1,\qquad \nu<1-\varrho.$$

Обращая это преобразование Меллина для τ_0, находим, что

$$\frac{d}{dt}P_x\left(\tau_0 < \frac{\alpha^2}{d}x^{1/\alpha}t\right) = \frac{t^{\varrho-2}}{\Gamma(1-\varrho)}\exp(-1/t),\qquad (t>0, x>0). \tag{14}$$

2. Формулы (1), (2) и (3) задают преобразование Лапласа для логарифмов рассматриваемых моментов остановки. Правые части этих формул являются аналитическими функциями от значений ν, допускаемых по условиям утверждений 1. Обозначим $\bar\nu(a)$ корень уравнения $\varkappa(\nu,\varrho) = \frac{\alpha^2}{d}a^{1/\alpha}$ и $\nu^*(c,\varrho)$ корень уравнения $\varkappa^*(\nu,\varrho) = \frac{\alpha^2}{d}c^{1/\alpha}$. Нетрудно проверить, что правая часть формулы (1) имеет простой полюс при $\nu = \bar\nu(a)$, а правые части формулы (2) и (3) имеет простые полюса при $\nu = \nu^*(c, 2-\varrho)+\varrho-1$ и $\nu = \nu^*(c,\varrho)$ соответственно. Поэтому применением теоремы тауберова типа получим, что при $t\to\infty$:

$$P_x(\tau_a\geqslant t) = ct^{-\bar\nu(a)}(1+o(1)),$$
$$P_x(\sigma_c\geqslant t) = ct^{\varrho-1-\nu^*(c,2-\varrho)}(1+o(1)),\qquad \varrho<1,$$
$$P_x(\tilde\sigma_c\geqslant t) = ct^{-\nu^*(c,\varrho)}(1+o(1)),\qquad \varrho>0.$$

где константы c зависят только от параметров процесса и моментов остановки.

3. Из конкретных результатов, полученных в этой работе, можно извлечь и некоторые общие результаты. Например, нетрудно доказать, что, если x_t — полуустойчивый процесс с параметрами α и ϱ $(\varrho\geqslant 1)$ и $\tau = \inf\{t\geqslant 0\colon x_t\geqslant f(t)\}$, где $x<f(0)$, $f(t)$ — непрерывная монотонная функция такая, что $f(t)t^{-\alpha} = o(1)$ при $t\to\infty$, то $E_x\tau^\nu < \infty$ при всех $\nu\geqslant 0$.

Литература

[1] Г. Бейтман, А. Эрдейн, *Высшие трансцендентные функции*, Наука, Москва 1973.

[2] Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы*, Физматгиз, Москва 1963.

[3] Р. А. Куджма, *Оптимальная остановка полуустойчивых диффузионных процессов*, Литовск. мат. сб. 12 (1972), стр. 4–11.

[4] [Т. Л. Лей] T. L. Lai, *Martingales and boundary crossing probabilities for Markov processes*, Ann. Prob. 2 (1974), стр. 1152–1168.

[5] [Дж. Ламперти] J. Lamperti, *Semi-stable Markov processes, I*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 22 3 (1972), стр. 205–225.

[6] А. А. Новиков, *О моментах остановки винеровского процесса*, Теория вероятн. и её прим. 16 (1971), стр. 458–465.

[7] [Г. Роббинс, Д. Зигмунд] H. Robbins, D. Siegmund, *Boundary crossing probabilities for the Wiener processes and sample sums*, Ann. Math. Statist. 41 (1970), стр. 1410–1429.

[8] [Л. А. Шепп] L. A. Shepp, *A first passage problem for the Wiener process*, Ann. Math. Statist. 38 (1967), стр. 1912–1914.

Presented to the Semester
Probability Theory
February 11–June 11, 1976