PROBABILITY THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 5
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

ПРИМЕНЕНИЯ АНАЛОГА НЕРАВЕНСТВ С. В. НАГАЕВА И Д. X. ФУКА ДЛЯ ВЗВЕШЕННЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН К ЗАКОНУ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

М. У. ГАФУРОВ

Математический институт, АН Уз.ССР, Ташкент, СССР

1

Пусть $\{X_k\}$ последовательность независимых случайных величин, $\{a_{nk}\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $n = 1, 2, \ldots$ — некоторая бесконечная матрица.

Положим

$$S_n = \sum_k a_{nk} X_k.$$

Изучению асимптотического поведения случайной величины S_n посвящено большое количество работ, в которых при известных ограничениях на матрицу коэффициентов $\{a_{nk}\}$ и величины $\{X_k\}$ устанавливаются применимость слабого и усиленного закона больших чисел для последовательности $\{S_n\}$. Так, например, В. К. Рохатги [4], [5] при определенных условиях на $\{a_{nk}\}$ показал, что если случайные величины $\{X_k\}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ имеют нулевые математические ожидания, равномерно ограничены случайной величиной X и при этом $E|X|^\alpha < \infty$, $\alpha > 0$ — заданное число, то при $n \to \infty$ $S_n \xrightarrow{\text{п.н.}} 0$.

В работах Д. Л. Хансона и Ф. Л. Райта [7], [8], В. Э. Франка, Д. Л. Хансона [6], В. К. Рохатги [4], [5] и др. изучены скорость сходимости в слабом законе больших чисел. Доказательство этих результатов основывается на методе усечений, оценка вероятностей $P(|S_n| \geqslant x)$, $x > 0$, через характеристики усеченных случайных величин. Использование этих соображений делают вычисления довольно громоздкими и иногда приводят к излишне жестким условиям на матрицы коэффициентов $\{a_{nk}\}$ (см. по этому поводу теор. 1, 2 из [7]).

Настоящая работа по существу является продолжением исследований вышеупомянутых авторов и опирается на аналоги неравенств С. В. Нагаева и Д. Х. Фука [2] для взвешенных сумм — S_n независимых случайных величин. Предлагаемый метод также позволяет получить аналогичные результаты и для случая, когда случайные величины X_k принимают значения из евклидового пространства R^s, $s \geqslant 1$.

Теоремы 4–7 дают более точные, чем получены ранее, оценки для $P(|S_n| \geqslant x)$ и отвечают на вопросы Д. Л. Хансона и Ф. Л. Райта, которые были сформулированы в работе [7].

2. Аналоги неравенств С. В. Нагаева и Д. Х. Фука

В этом пункте будем придерживаться обозначений, введенных в работе [2].

Положим

$$F_k(u) = P(X_k \leqslant u), \quad k = 0, \pm 1, \ldots;$$

$$S_{nN} = \sum_{k=-N}^{N} a_{nk} X_k, \quad N = 0, 1, 2, \ldots; \; n = 1, 2, \ldots,$$

$x > 0$ — любое положительное число, $Y = \{\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots\}$ некоторый набор положительных чисел и

$$y = \sup\{\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots\}.$$

Обозначим через $A(t; \ldots)$, $B^2(\cdot, \cdot)$ и $\mu(\cdot, \cdot)$ суммы урезанных на уровнях указанного в скобках, соответственно абсолютных моментов порядка t (указанного в скобках) дисперсий и математических ожиданий.

Буква Y обозначает суммирование по $k = 0, \ldots, -1, 0, 1, \ldots$ урезанных на уровнях $\ldots, y_{-1}, y_0, y_1, \ldots$ моментов. Например,

$$A(t, -Y, 0) = \sum_k |a_{nk}|^t \int_{-y_k}^{0} |u|^t dF_k(u),$$

$$B^2(-Y, Y) = \sum_k a_{nk}^2 \int_{-y_k}^{y_k} u^2 dF_k(u),$$

$$\mu(-Y, Y) = \sum_k a_{nk} \int_{-y_k}^{y_k} u\, dF_k(u).$$

Имеют место следующие неравенства, являющиеся аналогами неравенств С. В. Нагаева и Д. Х. Фука [2].

Теорема 1. *Предположим, что ряд* $\sum_k a_{nk} X_k$ *сходится при любом* $n \geqslant 1$. *Тогда*

(а) *при* $0 < t \leqslant 1$ *имеет место соотношение*

$$(1) \qquad P\{|S_n| \geqslant x\} \leqslant \sum_k P(|a_{nk} X_k| \geqslant y_k) + e^{x/y} \left[\frac{A(t, -Y, Y)}{xy^{t-1} + A(t, -Y, Y)}\right]^{x/y};$$

(б) *при* $1 < t \leqslant 2$ *имеет место неравенство*

$$(2) \qquad P(|S_n| \geqslant x) \leqslant \sum_k P(|a_{nk} X_k| > y_k) + 2\exp\left\{\frac{x}{y} - \left(\frac{x - \mu(-Y, Y)}{y} + \frac{A(t - Y, Y)}{y^t}\right) \ln\left(\frac{xy^{t-1}}{A(t, -Y, Y)} + 1\right)\right\};$$

(в) *пусть* $EX_k = 0$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ *Если* $t \geqslant 2$, $\beta = t/t+2$ *и* $\alpha = 1 - \beta$, *то имеет место соотношение*

$$(3) \qquad P(|S_n| \geqslant x) \leqslant \sum_k P(|a_{nk} X_k| \geqslant y_k) + \left[\frac{A(t, -Y, Y)}{\beta x y^{t-1}}\right]^{\beta x/y} + 2\exp\left\{-\frac{\alpha^2 x^2}{2e^t B^2(-\infty, \infty)}\right\}.$$

Доказательство. Ограничимся доказательством соотношения (1); (2) и (3) доказываются аналогично.

Обозначим

$$A_N(t; -Y, Y) = \sum_{k=-N}^{N} |a_{nk}|^t \int_{-y_k}^{y_k} |u|^t dF_k(u).$$

Выпишем неравенство С. В. Нагаева и Д. Х. Фука ([2], фор. (36)) для суммы $S_{n,N}$. Имеем

$$(4) \qquad P(|S_{nN}| \geqslant x) \leqslant \sum_{k=-N}^{N} P(|a_{nk} X_k| \geqslant y_k) + e^{x/y} \left[\frac{A_N(t; -Y, Y)}{xy^{t-1} + A_N(t; -Y, Y)}\right]^{x/y}.$$

Поскольку $S_n = \sum a_{nk} X_k$ сходится при каждом $n \geqslant 1$, то при $N \to \infty$ для каждого $x > 0$

$$(5) \qquad \lim_{N \to \infty} P(|S_{nN}| \geqslant x) = P(|S_n| \geqslant x).$$

Следовательно, переходя к пределу при $N \to \infty$ в соотношении (4) и при этом учитывая (5), получаем неравенство (1). Теорема 1 доказана.

Замечание. В предположении существования абсолютных моментов какого-либо порядка в соответствующих неравенствах, полученных в теореме 1, урезанные моменты можно заменить полными абсолютными моментами.

3. Применение к усиленному закону больших чисел

Будем говорить, что непрерывная функция $\varphi(x)$, определенная на всей прямой, принадлежит классу B, если выполнены следующие условия:

(а) φ — четная, монотонно возрастает на $[0, \infty]$;

$$\varphi(0) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty;$$

(б) для любых x и y и некоторого фиксированного $D \geqslant 1$

$$(6) \qquad \varphi(x+y) \leqslant D[\varphi(x) + \varphi(y)].$$

Примерами функций из класса B могут служить функции

$$\varphi(x) = |x|^p, \quad p > 0.$$

Отметим, что аналогичные классы функций были введены в ряде работ В. М. Круглова (см. напр. [1]).

Замечание. Приводимые ниже рассуждения позволяют рассмотреть и другой класс функций B_1, который отличается от B заменой условия (б) на

(б$_1$) для любых x и y и некоторого $D_1 \geqslant 1$

$$\varphi(x+y) \leqslant D_1 \varphi(x)\varphi(y). \tag{7}$$

Примерами функций из класса B могут служить функции

$$\varphi(x) = C\exp(\alpha|x|^\delta), \quad C \geqslant 1,\ \alpha > 0,\ 0 < \delta \leqslant 1.$$

В дальнейшем $\psi(x)$ будет обозначать обратную функцию $\varphi(x)$.

Предположим, что существует случайная величина X такая, что для всех $x > 0$

$$P(|X_k| \geqslant x) \leqslant P(|X| \geqslant x). \tag{8}$$

Отсюда, в частности, следует, что если $E|X|^r < \infty$ для некоторого r, $(0 < r < \infty)$, то

$$E|X_k|^r \leqslant E|X|^r < \infty, \quad k = 0, \pm 1, \ldots$$

Обозначим через $F(x)$ функцию распределения случайной величины X.

Пусть $B_{\{\varphi\}}$ совокупность тех функций $\varphi(x)$, $\varphi(x) \in B \cup B_1$, что

(1) При всех $n \geqslant 1$

$$\max_k |a_{nk}| \leqslant \frac{B}{\varphi(n)} \qquad B \text{ — постоянное число;}$$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-\alpha}(n) < \infty$, где

$$\alpha = \begin{cases} (t-1)\left[\dfrac{1}{\gamma} - A\right], & \text{если} \quad 1 < t \leqslant 2, \\[2ex] \dfrac{t}{(t+2)\gamma}, & \text{если} \quad t \geqslant 2, \end{cases}$$

$A = \sup\limits_n \sum\limits_k |a_{nk}|$, γ — любая положительная константа.

Теорема 2. *Пусть последовательность независимых случайных величин $\{X_k\}$ с $EX_k = 0$ удовлетворяют условию (8), а матрица $\{a_{nk}\}$ такова, что $A < \infty$ и в $B_{\{\varphi\}}$ найдется такая функция φ, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|\varphi(x)\,dF(x) < \infty.$$

Тогда при $n \to \infty$ $S_n \overset{\text{п.н.}}{\to} 0$.

Доказательство теоремы 2. Будем пользоваться идеями работ Прюита [3]. Рассмотрим следующие возможные случаи:

1. $1 < t \leqslant 2$,
2. $t > 2$.

Будем пользоваться теоремой 1. Поскольку y_k, $k = 0, \pm 1, \ldots$ произвольные, то положим $y \equiv y_k = \gamma x$, где $\gamma > 0$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ После элементарных преобразований в силу условия (8) из соотношения (2) получаем

$$P(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \sum_k P(|a_{nk}X_k| \geqslant \gamma\varepsilon) + C_\gamma(t,\varepsilon)\Big[\sum_k |a_{nk}|^t\Big]^{(1-A\gamma)/\gamma}, \tag{9}$$

здесь

$$C_\gamma(t,\varepsilon) = 2e^{1/\gamma}\Big(\int_{-\gamma\varepsilon}^{\gamma\varepsilon} |u|^t dF(u)\Big)(\varepsilon^{-1}\gamma^{-(t-1)})^{1/\gamma - A}.$$

По известной лемме Бореля–Кантелли нам достаточно показать, что для всех $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|S_n| \geqslant \varepsilon\} < \infty.$$

Из соотношения (9) выводим

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|S_n| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\sum_k P\{|a_{nk}X| \geqslant \varepsilon\gamma\} + C_\gamma(t,\varepsilon)\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_k |a_{nk}|^t\Big)^{1/\gamma - A} = I_1 + I_2. \tag{10}$$

Оценим I_1. Введем следующие функции

$$A_n(x) = (\varepsilon\gamma)^{-1} \sum_{[k;\, \varepsilon\gamma|a_{nk}|^{-1} \leqslant x]} |a_{nk}|, \qquad H(x) = P\{|X| \geqslant x\}.$$

Из определения $A_n(x)$ следует, что $A_n(x) = 0$ для

$$x < \frac{\varepsilon\gamma}{B}\varphi(n) = \beta\varphi(n)$$

и

$$\int_0^{\infty} dA_n(x) = \frac{1}{\varepsilon\gamma}\sum_k |a_{nk}| \leqslant \frac{A}{\varepsilon\gamma}.$$

Применяя преобразования типа Абеля, а затем интегрируя по частям и при этом учитывая, что $E|X| < \infty$, получаем

$$\sum_k P\{|a_{nk}X_k| \geqslant \varepsilon\gamma\} = \sum_k H(\varepsilon\gamma|a_{nk}|^{-1}) = \tag{11}$$

$$= \int_0^{\infty} xH(x)\,dA_n(x) \leqslant (\varepsilon\gamma)^{-1}A \int_{\beta\varphi(n)}^{\infty} d(|H_n(x)|.$$

Для оценки последнего интеграла воспользуемся следующим элементарным соотношением для $x_1 < x_2$

$$x_2 H(x_2)-x_1 H(x_1) = (x_2-x_1)H(x_1)+x_2[H(x_2)-H(x_1)].$$

В силу этого равенства имеем

$$\int\limits_{\beta\varphi(n)}^{\infty} d|H(x)x| = \sum_{m=n}^{\infty} \int\limits_{\beta\varphi(m)}^{\beta\varphi(m+1)} d|xH(x)| \leqslant \beta \sum_{m=n}^{\infty} [\varphi(m-1)-\varphi(m)]H(\beta\varphi(m))+$$

$$+\beta \sum_{m=n}^{\infty} \varphi(m+1)[H(\beta\varphi(m))-H(\beta\varphi(m+1))].$$

Суммируя по частям, легко видеть, что первое слагаемое правой части последнего неравенства не превосходит второго. Следовательно,

$$\int\limits_{\beta\varphi(n)}^{\infty} d|xH(x)| \leqslant 2\beta \sum_{m=n}^{\infty} \varphi(m+1)[H(\beta\varphi(m))-H(\beta\varphi(m+1))]. \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем

$$I_1 \leqslant 2\beta(\varepsilon\gamma)^{-1}A \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=n}^{\infty} \varphi(m+1)[H(\beta\varphi(m))-H(\beta\varphi(m+1))] =$$

$$= 2\frac{A}{B}\sum_{n=1}^{\infty} n\varphi(n+1)[H(\beta\varphi(n))-H(\beta\varphi(n+1))].$$

Поскольку $\varphi(x) \in B \cup B_1$, то используя (6) или (7) легко видеть, что последнее выражение не превосходит

$$2\frac{AD}{B}\sum_{n=0}^{\infty} n\varphi(n)H[(\beta\varphi(n))-H(\beta\varphi(n+1))] \leqslant \tag{13}$$

$$\leqslant 2AD(\varepsilon\gamma)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|\psi(x)\,dF(x) < \infty .$$

Далее так как

$$\sum_k |a_{nk}|^t \leqslant (\max_k |a_{nk}|)^{t-1}\sum_k |a_{nk}| \leqslant \frac{AB^{t-1}}{\varphi^{t-1}(n)},$$

то в силу соотношения (2)

$$I_2 < \infty. \tag{14}$$

Из (10), (13) и (14) получаем доказательство утверждения теоремы для случая $1 < t < 2$.

Случай $t \geqslant 2$ доказывается аналогично, только здесь вместо неравенства (2) воспользуемся соотношением (3).

В частности, если $\varphi(x) = |x|^\delta$, $\delta > 0$, из теоремы 2 следует результат В. К. Рохатги [4].

В качестве других применений теоремы 1 дадим новый упрощенный вариант доказательства следующей теоремы 3, принадлежащей П. Эрдешу [9].

Пусть случайные величины $\{X_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$ распределены одинаково с общей функцией распределения $F(x)$ и

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{для} \quad k = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема 3. *Для того, чтобы*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|X_1+\ldots+X_n-na| \geqslant n\varepsilon\} < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$Ex_1 = a, \quad E(X_1-a)^2 < \infty.$$

Достаточность (ср. с [9]). Будем пользоваться следующей леммой, которая следует из теоремы 1 (в).

Лемма. *Пусть $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ независимые, одинаково распределенные случайные величины с $E\eta_1 = 0$ и $E\eta_1^2 = \sigma^2 < \infty$. Тогда, для любых $\gamma > 0$ и $x > 0$ имеет место соотношение*

$$P(|\eta_1+\ldots+\eta_n| \geqslant x) \leqslant nP(|\eta_1| \geqslant \gamma x)+C_\gamma\left(\frac{n\sigma^2}{x^2}\right)^{1/2\gamma},$$

здесь C_γ постоянная, зависящая только от γ.

Не нарушая общности, положим, что $EX_1 = a$. Будем считать, что $\gamma < 1/2$. Тогда, воспользуясь леммой имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1+\ldots+X_n| \geqslant \varepsilon n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} nP(|X_1| \geqslant \varepsilon\gamma n)+C_\gamma\sigma^{1/\gamma}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2\gamma}.$$

Поскольку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1/2\gamma} < \infty$, то достаточно показать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP(|X_1| \geqslant \varepsilon\gamma n) < \infty. \tag{$*$}$$

В силу $EX_1^2 < \infty$ соотношение $(*)$ следует из следующих равенств:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP(|X_1| \geqslant \varepsilon\gamma n) = \sum_{n=1}^{\infty} n\sum_{k=n}^{\infty} P(\varepsilon\gamma k \leqslant |X_1| \leqslant \varepsilon\gamma(k+1)) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)P(\varepsilon\gamma n \leqslant |X_1| \leqslant \varepsilon\gamma(n+1)).$$

Доказательство части необходимости то же, что и у П. Эрдеша [9]. Теорма 3 доказана.

4. Оценки скорости сходимости в законе больших чисел

В этом пункте мы не предполагаем существование каких-либо моментов у случайных величин X_k, $k = 0, \pm 1, \ldots$

Как и выше

$$S_n = \sum_k a_{nk} X_k$$

и если существует EX_k, то положим

$$\overline{S}_n = \sum_k a_{nk}(X_k - EX_k).$$

Далее, пусть

$$G(y) = \sup_k P(|X_k| \geqslant y),$$

$$\overline{G}(y) = \sup_k P(|X_k - EX_k| \geqslant y),$$

и для некоторого $t > 0$

$$\sum_k |a_{nk}|^t \leqslant \varrho_n. \tag{15}$$

В работе [7] Д. Л. Хансон и Ф. Л. Райт доказали следующую теорему:

Теорема (Д. Л. Хансон, Ф. Л. Райт). (а) *Пусть соотношение* (15) *имеет место при* $t = 1$. *Если* $yG(y) \leqslant M < \infty$, M — *постоянное число, для всех* $y > 0$ *и если выполнено одно из следующих условий*

$$\sum_k a_{nk} \log |a_{nk}| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty \tag{16}$$

или

$$\lim_{T\to\infty} \sup_k \left| \int_{-T}^{T} y\,dF_k(y) \right| < \infty, \tag{17}$$

тогда

$$P(|S_n| \geqslant \varepsilon) = O(\varrho_n) \quad \textit{для любого} \quad \varepsilon > 0.$$

(б) *Пусть неравенство* (15) *имеет место с* $t = 2$. *Если* $y^2\overline{G}(y) \leqslant M < \infty$ *для всех* $y > 0$ *и при некотором* $\lambda > 0$

$$\sum_k a_{nk}^2 \log |a_{nk}|^{-1} = O(\varrho_n^{\lambda}), \tag{18}$$

то

$$P(|\overline{S}_n| \geqslant \varepsilon) = O(\varrho_n).$$

Аналогично, при соответствующих условиях утверждается, что при $n \to \infty$

$$P(|S_n| \geqslant \varepsilon) = o(\varrho_n) \quad \textit{и} \quad P(|\overline{S}_n| \geqslant \varepsilon) = o(\varrho_n).$$

В этой же работе ставится вопрос об ослаблении условия (16)–(18) и соотношения (2.6) из [7], а также о возможности рассмотрения аналогичных задач для случая $t > 2$.

Оказывается, что вышеупомянутые условия излишни, и в самом деле можно доказать более сильные утверждения. Сформулированные ниже теоремы 4–6 дают ответы на вопросы Д. Л. Хансона и Ф. Л. Райта [7].

Теорема 4. (а) *Если матрица коэффициентов* $\{a_{nk}\}$ *удовлетворяет условию* (15) *с* $0 < t \leqslant 1$ *и* $y^t G(y) \leqslant M < \infty$ *для всех* $y > 0$, *то имеет место неравенство*

$$P(|S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varrho_n \left(e + \frac{M}{\varepsilon^t} \right)$$

при всех $\varepsilon > 0$ *и* $n = 1, 2, \ldots$

(б) *Пусть для матрицы коэффициентов* $\{a_{nk}\}$ *выполняется условие* (15) *с* $1 < t \leqslant 2$.

Если величины $\{X_k\}$, $k = 0, \pm 1, \ldots$, *симметричны и* $y^2\overline{G}(y) \leqslant M < \infty$ *для всех* $y > 0$, *то при любом* $\varepsilon > 0$ *и* $n = 1, 2, \ldots$ *справедливо неравенство*

$$P(|\overline{S}_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varrho_n \left(2e + \frac{M}{\varepsilon^t} \right).$$

Приведенные в теореме 4 неравенства уточняют и усиливают соответствующие результаты В. К. Рохатги [4], Д. Л. Хансона, Ф. Л. Райта [7], [8] и другие.

Теорема 5. *Предположим* $\varrho_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

(а) *Пусть матрица коэффициентов* $\{a_{nk}\}$ *удовлетворяет условию* (15) *с* $0 < t \leqslant 1$ *и пусть при* $y \to \infty$, $y^t G(y) \to 0$. *Тогда при* $n \to \infty$ *для любого* $\varepsilon > 0$

$$P(|S_n| \geqslant \varepsilon) = o(\varrho_n). \text{ (*)}$$

(б) *Если матрица коэффициентов удовлетворяет условию* (15) *с* $1 < t \leqslant 2$, *случайные величины* $\{X_k\}$ *распределены симметрично и при* $y \to \infty$ $y^t\overline{G}(y) \to 0$ *то для всех* $\varepsilon > 0$ *при* $n \to \infty$

$$P(|\overline{S}_n| \geqslant \varepsilon) = o(\varrho_n).$$

Теорема 6. *Пусть* $t > 2$ *и матрица коэффициентов удовлетворяет условию* (15).

Далее, пусть существуют постоянные $L > 0$ *и* $\nu \geqslant 1$ *такие, что для всех* $n \geqslant 1$

$$\left(\sum_k a_{nk}^2 \sigma_k^2 \right)^{\nu} \leqslant L\varrho_n, \quad \textit{где} \quad \sigma_k^2 = E(X_k - EX_k)^2$$

и $y^t\overline{G}(y) \leqslant M < \infty$ *при всех* $y > 0$.

Тогда, для $n \geqslant 1$ *имеет место неравенство*

$$P(|\overline{S}_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varrho_n \left[\left(\frac{t+2}{t} \right)^t \left(\frac{M}{\varepsilon^t} + 1 \right) + LC(t, \varepsilon, \nu) \right], \tag{19}$$

где $C(t, \varepsilon, \nu)$ *постоянное, зависящее от параметров указанных в скобках.*

(*) На самом деле имеет место более точное утверждение (см. соотношение (25)).

Если $y^t\bar{G}(y)\to 0$ *при* $y\to\infty$, *то*

$$P(|\bar{S}_n|\geqslant\varepsilon)=o(\varrho_n). \tag{20}$$

Доказательство теорем 4, 5.

(а) Будем пользоваться неравенством (1).

Ввиду произвольности y_k положим $y_k=\varepsilon$, $k=0,\pm1,\ldots$ Тогда, после элементарных преобразований из (1) получаем

$$P(|S_n|\geqslant\varepsilon)\leqslant\sum_k P(|a_{nk}X_k|\geqslant\varepsilon)+e\varrho_n. \tag{21}$$

Очевидно, что в условиях теоремы 4 (часть (а))

$$\sum_k P(|a_{nk}X_k|\geqslant\varepsilon)\leqslant\frac{1}{\varepsilon^t}\sum_k|a_{nk}|^t\operatorname*{Sup}_{y>\varepsilon/|a_{nk}|}\{y^tP(|X_k|\geqslant y)\}\leqslant \tag{22}$$

$$\leqslant\frac{\varrho_n}{\varepsilon^t}\operatorname*{Sup}_k\operatorname*{Sup}_{y>\varepsilon/|a_{nk}|}\{y^tP(|X_k|\geqslant y)\}\leqslant\frac{M\varrho_n}{\varepsilon^t}.$$

Из (21) и (22) следует доказательство соответствующей части теоремы 4.

Для доказательства части (а) теоремы 5 также будем пользоваться неравенством (1) при этом полагая $y_k=\gamma\varepsilon$, $k=0,\pm1,\ldots,0<\gamma<1$.

Из неравенства (1) имеем

$$P(|S_n|\geqslant\varepsilon)\leqslant\sum_k P\left(|X_k|\geqslant\frac{\varepsilon\gamma}{|a_{nk}|}\right)+\gamma^{1/\gamma}e^{1/\gamma}\varrho_n^{1/\gamma}. \tag{23}$$

Легко видеть, что

$$\sum_k P\left(|X_k|\geqslant\frac{\varepsilon\gamma}{|a_{nk}|}\right)\leqslant\frac{1}{(\varepsilon\gamma)^t}\sum_k|a_{nk}|^t\operatorname*{Sup}_{y>\varepsilon\gamma/|a_{nk}|}\{y^tP(|X_k|\geqslant y)\}\leqslant \tag{24}$$

$$\leqslant\frac{\varrho_n}{(\varepsilon\gamma)^t}\operatorname*{Sup}_{y>\varepsilon\gamma/\varrho_n}\{y^tG(y)\}.$$

Следовательно, из (23) и (24) получаем

$$P(|S_n|\geqslant\varepsilon)\leqslant\varrho_n\Big\{(\varepsilon\gamma)^{-t}\operatorname*{Sup}_{y>\varepsilon\gamma/\sigma_n}\{y^tG(y)\}+\gamma^{1/\gamma}e^{1/\gamma}\varrho_n^{1/\gamma-1}\Big\}. \tag{25}$$

Поскольку, в силу условия теоремы при $n\to\infty$

$$\operatorname*{Sup}_{y>\varepsilon\gamma/\sigma_n}\{y^tG(y)\}\to 0,$$

то из неравенства (25) следует утверждение теоремы 5 (часть (а)).

Доказательство части (б) теорем 4 и 5 повторяет рассуждения, которые проводились выше.

Доказательство теоремы 6. Полагая $y_k=y=\varepsilon\gamma$, $k=0,\pm1,\ldots$ из неравенства (3) получаем

$$P(|\bar{S}_n|\geqslant\varepsilon)\leqslant\sum_k P(|a_{nk}(X_k-FX_k)|\geqslant\varepsilon\gamma)+ \tag{26}$$

$$+\left(\frac{t+2}{t\gamma^{t-1}}\right)^{t/\gamma(t+2)}\left(\sum_k|a_{nk}|^t\right)^{t/\gamma(t+2)}+2\exp\left\{-\frac{4\varepsilon^2}{(t+2)^2\sum_k a_{nk}^2\sigma_k^2}\right\}.$$

Положим $\gamma=\dfrac{t}{t+2}$. Пользуясь очевидным неравенством

$$2\exp\left\{-\frac{4\varepsilon^2}{(t+2)^2\sum_k a_{nk}^2\sigma_k^2}\right\}\leqslant C(t,\varepsilon,\nu)\cdot\left(\sum_k\sigma_k^2a_{nk}^2\right)^\nu,\qquad \nu\geqslant 1$$

и учитывая условия теоремы, имеем

$$P(|\bar{S}_n|\geqslant\varepsilon)\leqslant\left(\frac{t+2}{t}\right)^t\varepsilon^{-t}\sum_k|a_{nk}|^t\operatorname*{Sup}_{y>(\varepsilon\gamma)^t/|a_{nk}|^t}\{y^tP(|X_k-EX_k|\geqslant y)\}+$$

$$+\left(\frac{t+2}{t}\right)^t\sum_k|a_{nk}|^t+C(t,\varepsilon,\nu)\left(\sum_k a_{nk}^2\sigma_k^2\right)^\nu\leqslant$$

$$\leqslant\varrho_n\left[\left(\frac{t+2}{t}\right)^t\left(\frac{M}{\varepsilon^t}+1\right)+LC(t,\varepsilon,\nu)\right].$$

Это доказывает неравенство (19).

Аналогично, чтобы доказать соотношение (20) в неравенстве (26) будем считать, что $0<\gamma<t/(t+2)$. Дальнейшие рассуждения очевидны.

Литература

[1] В. М. Круглов, Теория вероятностей и ее применения 18 (1973), стр. 734–752.
[2] С. В. Нагаев, Д. Х. Фук, Теория вероятностей и ее применения 14 (1971), стр. 660–675.
[3] [В. Е. Пруит] W. E. Pruitt, J. Math. Mech. 15 (1966), стр. 769–776.
[4] [В. К. Рохатги] K. Rohatgi, Proc. Camb. Phil. Soc. 69 (1971), стр. 305–307.
[5] —, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969), стр. 570–574.
[6] [В. Е. Франк, Д. Л. Хансон] W. E. Franck, D. L. Hanson, Trans. Amer. Math. Soc. 124 (1966), стр. 347–359.
[7] [Д. Л. Хансон, Ф. Л. Райт] D. L. Hanson, F. L. Wright, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 19 (1971), стр. 81–89.
[8] —, —, Trans. Amer. Math. Soc. (1969), стр. 443–464.
[9] [П. Эрдеш] P. Erdös, Ann. Math. Statist. 20 (1949), стр. 286–291.

Presented to the Semester
Probability Theory
February 11–June 11, 1976