PROBABILITY THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 5
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ЛОКАЛЬНОЙ И ИНТЕГРАЛЬНОЙ МНОГОМЕРНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМ

Т. А. АЗЛАРОВ и Ш. А. ИСМАТУЛЛАЕВ

Математический факультет, Ташкентский Университет, Ташкент, СССР

Пусть $S(N_\nu)$ — k-мерный шар радиуса N_ν $(N_\nu \geqslant 1)$ с центром в начале координат; P_ν — число точек в $S(N_\nu)$, имеющих целые координаты.

Введем в рассмотрение последовательность

(1) $$X_1, X_2, \ldots, X_n; \quad X_\nu = (x_{\nu 1}, \ldots, x_{\nu k}),$$

независимых случайных векторов с распределениями

(2) $$P\{X_\nu = m\} = \frac{1}{P_\nu}; \quad m \in S(N_\nu), \ \nu = 1, 2, \ldots, n;$$

здесь $m = (m_1, \ldots, m_k)$ — вектор с целыми координатами.

Обозначим: (t, x) — скалярное произведение векторов $t = (t_1, \ldots, t_k)$ и $x = (x_1, \ldots, x_k)$ из евклидова пространства $\boldsymbol{R}^k$, $|x| = (x, x)^{1/2}$; если A матрица, то $|A|$ — ее детерминант; $\Phi(x)$ и $\varphi(x)$ — функция распределения и плотность распределения k-мерного стандартного нормального закона;

$$\lambda_n = (N_1^2 + \ldots + N_n^2)^{1/2} \cdot \min_{1 \leqslant \nu \leqslant n} N_\nu^{-1}, \quad \sigma_{\nu j}^2 = Ex_{\nu j}^2, \quad \sigma_\nu^2 = E|X_\nu|^2,$$

$$B_{nj}^2 = \sum_{\nu=1}^n \sigma_{\nu j}^2, \quad B_n^2 = \sum_{\nu=1}^n \sigma_\nu^2; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \ j = 1, 2, \ldots, k;$$

$$Y_n = \sum_{\nu=1}^n X_\nu, \quad D_n = EY_n' Y_n, \quad P_n(m) = P\{Y_n = m\},$$

$$Z_n = K_n Y_n = (z_{n1}, \ldots, z_{nk}), \quad U_n(x) = P\{z_{n1} < x_1, \ldots, z_{nk} < x_k\};$$

здесь матрица K_n такая, что $K_n D_n K_n' = I$ (I — единичная матрица; штрих означает транспонирование).

По определению, последовательность (1) удовлетворяет центральной предельной теореме (ц.п.т.), если

(3) $$\sup_x |U_n(x) - \Phi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и удовлетворяет локальной предельной теореме (л.п.т.), если

$$\sup_m \left|\sqrt{|D_n|}\cdot P_n(m)-\varphi(mK_n)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{4}$$

Очевидно, что всегда из утверждения (4) следует (3). Ниже будет показано, что верна и обратная импликация.

Нахождению условий эквивалентности ц.п.т. и л.п.т., в случае, когда у случайных величин существует ограниченная плотность, посвящены работы Ю. В. Прохорова [4], П. Сурвилы [5] — в одномерном случае; и Т. Л. Шервашидзе, Л. И. Саулиса [7] — в многомерном случае. В этих работах рассмотрены случайные величины похожие в некотором смысле на случайные величины с непрерывным равномерным распределением в шаре.

Нижеприводимые теоремы обобщают результаты работы [1] на многомерный случай, и являются аналогами для решетчатого случая результатов из [7] и [6].

Теорема 1. *Условие $\lambda_n\to\infty$ при $n\to\infty$ является необходимым и достаточным для применимости к последовательности* (1) *как центральной, так и локальной предельных теорем* (*при произвольной фиксированной размерности k*).

Теорема 2. *При всех n, для которых $\lambda_n\geqslant 2$, имеют место неравенства*

$$\left|\sqrt{|D_n|}P_n(m)-\varphi(mK_n)\right|\leqslant c\lambda_n^{-1}, \tag{5}$$

где c — положительная постоянная, зависящая только от k.

Всюду в дальнейшем c, c_ν — положительные постоянные зависящие разве лишь от k.

Для доказательства теорем необходимы следующие вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — последовательность независимых случайных векторов с конечными третьими моментами, тогда для величины*

$$\delta(t) = |E\exp\{i(t, K_nY_n)\}-\exp(-|t|^2/2)|$$

справедлива оценка

$$\delta(t)\leqslant\begin{cases}L_n|t|^3\exp(-|t|^2/2) & \text{при} \quad |t|\leqslant L_n^{-1/3},\\ \exp(-|t|^2/2)+\exp(-|t|^2/3) & \text{при} \quad |t|\leqslant \frac12 L_n^{-1},\end{cases}$$

где

$$L_n=\sum_{j=1}^n E|K_nX_j|^3.$$

Эта лемма, являющаяся многомерным аналогом одного результата В. М. Золотарёва [2], сообщена нам Т. Л. Шервашидзе.

Лемма 2. *Пусть $f_\nu(t)$ — характеристическая функция случайного вектора X_ν с распределением* (2). *Существует постоянная c такая, что при $|t|<c\sigma_\nu^{-1}$ справедлива оценка*

$$|f_\nu(t)|<\exp\left(-\tfrac14(\sigma_{\nu1}^2t_1^2+\ \ldots\ +\sigma_{\nu k}^2t_k^2)\right).$$

Доказательство. Очевидно,

$$|f_\nu(t)|^2=\int_{R^k}\int_{R^k}\cos(t, x-y)\,dF_\nu(x)dF_\nu(y);$$

здесь $F_\nu(x)$ функция распределения X_ν. Так как

$$\cos\alpha\leqslant 1-\frac{\alpha^2}{2}+\frac{|\alpha|^3}{6},$$

то

$$|f_\nu(t)|^2\leqslant 1-\tfrac12\int_{R^k}\int_{R^k}[(t, x)-(t, y)]^2dF_\nu(x)dF_\nu(y)+$$

$$+\tfrac46\int_{R^k}\int_{R^k}\left(|(t, x)|^3+|(t, y)|^3\right)dF_\nu(x)dF_\nu(y)\leqslant \tag{6}$$

$$\leqslant 1-(\sigma_{\nu1}^2t_1^2+\ \ldots\ +\sigma_{\nu k}^2t_k^2)+\tfrac43k^2(\beta_{\nu1}|t_1|^3+\ \ldots\ +\beta_{\nu k}|t_k|^3);$$

где $\beta_{\nu j}=E|x_{\nu j}|^3$, $j=1, 2, \ldots, k$. В силу очевидных неравенств

$$\begin{aligned}c_1N_\nu\leqslant\sigma_{\nu j}\leqslant c_2N_\nu,\\ c_3N_\nu^3\leqslant\beta_{\nu j}\leqslant c_4N_\nu^3,\end{aligned}\qquad j=1, 2, \ldots, k, \tag{7}$$

при достаточно малом c для $|t|<c\sigma_\nu^{-1}$ имеем

$$\frac12\sigma_{\nu j}^2t_j^2-\frac{4k^2}{3}\beta_{\nu j}|t_j|^3\geqslant\frac{\sigma_{\nu j}^2t_j^2}{2}\left(1-\frac{8k^2\beta_{\nu j}}{3\sigma_{\nu j}^3}c\right)>0,$$

что в соединении с (6) доказывает лемму.

Лемма 3. *Пусть $E_0=\{t:\ -\frac12\leqslant t_j\leqslant\frac12;\ j=1, 2, \ldots, k\}$. Существует постоянная $\chi<1$, независящая от N_ν, такая, что при $t\in E_0\backslash S(c/2\pi\sigma_\nu)$ справедливо неравенство $|f_\nu(2\pi t)|\leqslant\chi$; здесь c из леммы* 2.

Доказательство. Так как

$$S(c/2\pi\sigma_\nu)\supset\{t:\ |t_j|<c/2\pi\sigma_\nu\sqrt{k},\ j=1, 2, \ldots, k\}=E_1,$$

то достаточно доказать лемму для $t\in E_0\backslash E_1$.

Пусть $t\in E_0\backslash E_1$; тогда существует номер j ($j=1, 2, \ldots, k$) такой, что $c/2\pi\sigma_\nu\sqrt{k}\leqslant|t_j|\leqslant 1/2$. Для определённости положим $j=1$ и будем опускать индекс ν.

Обозначим

$$\tilde m=(m_2, \ldots, m_k),\quad \tilde t=(t_2, \ldots, t_k),\quad m=(m_1, \ldots, m_k)=(m_1; \tilde m),$$

$$W=\{\tilde m:\ |m_j|\leqslant N/\sqrt{2k},\ j=2, 3, \ldots, k\}.$$

Очевидно,

$$|Pf(2\pi t)|=\left|\sum_{m\in S(N)}\exp\left(2\pi i(t_1m_1+t_2m_2+\ \ldots\ +t_km_k)\right)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\sum_{\tilde m\in W}\sum_{(m_1;\tilde m)\in S(N)}\exp(2\pi it_1m_1)\cdot\exp(2\pi i(\tilde t, \tilde m))\right|+P-\sum_{(m_1, \tilde m)\in S(N),\ \tilde m\in W}1\leqslant \tag{8}$$

$$\leqslant\sum_{\tilde m\in W}\left|\sum_{(m_1;\tilde m)\in S(N)}\exp(2\pi it_1m_1)\right|+P-\sum_{(m_1;\tilde m)\in S(N), \tilde m\in W}1.$$

Количество слагаемых в любой из внутренних сумм $> N/\sqrt{2}$ — по построению W; то есть, каждая из них является суммой вида

$$\sum_{x=T+1}^{T+Q} \exp(2\pi i t_1 x), \tag{9}$$

где T и Q целые; причём $Q > N/\sqrt{2}$.

Для суммы (9) справедлива очевидная оценка

$$\Big|\sum_{x=T+1}^{T+Q} \exp(2\pi i t_1 x)\Big| < 1/2(t_1), \tag{9'}$$

где (α) — расстояние от числа α до ближайшего целого.

Интервал $[c/2\pi\sigma\sqrt{k}, 1/2]$ разобьём на две части w_1 и w_2: $w_1 = [c/2\pi\sigma\sqrt{k}, 1/Q]$, $w_2 = (1/Q, 1/2]$. При $t_1 \in w_2$ из неравенства (9′) следует

$$\Big|\frac{1}{Q}\sum_{x=T+1}^{T+Q} \exp(2\pi i t_1 x)\Big| = |\Psi_{Q,T}(t_1)| < 1/2.$$

Функция $\Psi_{Q,T}(t_1)$ является характеристической функцией случайной величины, принимающей значения $T+1, T+2, \ldots, T+Q$ с равными вероятностями $1/Q$; поэтому, применяя лемму Крамера ([3], стр. 37), для $t_1 \in w_1$ получим

$$|\Psi_{Q,T}(t)| \leqslant 1-3t_1^2Q^2/32 \leqslant \chi_1 = 1-3c^2/256k^2c_2^2$$

— так как, в силу (7), $\sigma^2 \leqslant c_2^2 kN^2$ и $Q > N/\sqrt{2}$.

Так как

$$\sum_{m\in S(N),\,\tilde{m}\in W} 1 \geqslant c_5 P,$$

то, подставив оценку, полученную для суммы (9), в неравенство (8), будем иметь

$$|Pf(2\pi t)| \leqslant \chi_1 \sum_{(m_1;\,\tilde{m})\in S(N),\,\tilde{m}\in W} 1 + P - \sum_{(m_1;\,\tilde{m})\in S(N),\,\tilde{m}\in W} 1 =$$

$$= P-(1-\chi_1)\sum_{m\in S(N),\,\tilde{m}\in W} 1 \leqslant \chi\cdot P.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Из неравенства (5), доказательство которого будет приведено ниже, следует, что условие

$$\lambda_n \to \infty \quad (\text{при } n\to\infty) \tag{10}$$

является достаточным для выполнения л.п.т. для последовательности (1). Докажем, что условие (10) является необходимым для ц.п.т., откуда будет следовать необходимость этого условия и для л.п.т. Допустим, что для (1) выполнена ц.п.т., но (10) не имеет места. Тогда найдутся две последовательности целых чисел $\{n_j\}$ и $\{\mu_j\}$, $n_j\to\infty$, $1 \leqslant \mu_j \leqslant n_j$, такие, что при $j\to\infty$

будем иметь

$$B_{n_j}/\sigma_{\mu_j} \to \lambda < \infty.$$

Выделяя в сумме Z_{n_j} слагаемое $K_{n_j}X_{\mu_j}$ и переходя к пределу при $j\to\infty$, мы получим следующее соотношение между тремя характеристическими функциями:

$$\Psi(t)\cdot r(t) = \exp(-|t|^2/2);$$

здесь $r(t)$ — характеристическая функция некоторого непрерывного равномерного распределения; но такое соотношение невозможно. Так что условие (10) необходимо.

Доказательство теоремы 2. По формуле обращения имеем

$$(2\pi)^k P_n(m) = \int_\Omega \prod_{j=1}^n f_j(t)\exp(-i(t,m))\,dt, \qquad \Omega = \{t\colon -\pi \leqslant t_\nu \leqslant \pi;\ \nu = 1,2,\ldots,k\},$$

$$(2\pi)^k\varphi(y) = \int_{R^k} \exp(-i(t,y)-|t|^2/2)\,dt.$$

Обозначим $K_n'\Omega = \{K_n't\colon t\in\Omega\}$, $y = K_n m$; имеем

$$(2\pi)^k\big(\sqrt{|D_n|}P_n(m)-\varphi(y)\big) =$$

$$= \int_{S(1/2L_n)} \exp(-i(t,y))\prod_{j=1}^n f_j(K_n't)-\exp(-|t|^2/2)\,dt +$$

$$+ \int_{R^k\setminus S(1/2L_n)} \exp(-i(t,y)-|t|^2/2)\,dt + \int_{K_n'\Omega\setminus S(1/2L_n)} \exp(-i(t,y))\prod_{j=1}^n f_j(K_n't)\,dt =$$

$$= I_1+I_2+I_3.$$

Воспользовавшись леммой 1, нетрудно получить оценку $|I_1| \leqslant cL_n$. Очевидно, что такую же оценку имеет интеграл I_2.

Приступим к оцениванию интеграла I_3. Так как (не уменьшая общности считаем $N_1 \geqslant \ldots \geqslant N_n$)

$$\Omega_1 = \{t\colon |(K_n')^{-1}t| \leqslant (2L_n)^{-1}\} = \{t\colon t'D_n t \leqslant (2L_n)^{-2}\} =$$

$$= \{t\colon |t|^2 \leqslant k(2L_nB_n)^{-2}\} = S(\sqrt{k}(2L_nB_n)^{-1}),$$

$$L_n = \sum_{j=1}^n E\Big(\sum_{\nu=1}^k\Big(\frac{x_{j\nu}}{B_{n\nu}}\Big)^2\Big)^{3/2} = \frac{k\sqrt{k}}{B_n^3}\sum_{j=1}^n E|X_j|^3 \leqslant \frac{k^2N_1}{B_n},$$

то, произведя замену переменной, получим

$$|I_3| \leqslant |K_n'|^{-1}\int_{\Omega\setminus\Omega_1}\prod_{j=1}^n|f_j(t)|\,dt \leqslant |K_n'|^{-1}\int_{\Omega\setminus S(1/2k\sqrt{k}N_1)}\prod_{j=1}^n|f_j(t)|\,dt;$$

поскольку, в силу (7), $\sigma_1 \geqslant cN_1$, то последний интеграл не превосходит

$$I = |K_n'|^{-1}\int_{\Omega\setminus S(c/\sigma_1)}\prod_{j=1}^n|f_n(t)|\,dt.$$

Для того, чтобы оценить интеграл I, представим его в виде
$$I = A_1 + \ldots + A_n,$$
где
$$A_\nu = |K_n'|^{-1} \int\limits_{\Delta\nu} \prod_{j=1}^{n} |f_j(t)|\,dt; \quad \Delta_\nu = S(c/\sigma_{\nu+1}) \setminus S(c/\sigma_\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$\Delta_n = \Omega \setminus S(c/\sigma_n).$$

Так как $\sigma_j \leqslant \sigma_2$ при $j \geqslant 2$, то на Δ_1 справедлива оценка (лемма 2)
$$|f_j(t)| < \exp\left(-\tfrac{1}{4}(\sigma_{j1}^2 t_1^2 + \ldots + \sigma_{jk}^2 t_k^2)\right)$$
так, что имеем
$$A_1 \leqslant |K_n'|^{-1} \int\limits_{\Delta_1} \exp\left(-\tfrac{1}{4} \sum_{j=2}^{n} (t_1^2 \sigma_{j1}^2 + \ldots + t_k^2 \sigma_{jk}^2)\right) dt =$$
$$= \frac{B_n^k}{(\sqrt{k})^k} \int\limits_{\Delta_1} \exp\left(-\frac{B_n^2 - \sigma_1^2}{4k} |t|^2\right) dt \leqslant c_1 \int\limits_{cB_n/\sigma_1 \leqslant |u| < cB_n/\sigma_2} \exp(-c_2 |u|^2)\,du < c_3 \frac{\sigma_1}{B_n}.$$
Теперь оценим A_ν при $\nu \geqslant 2$. На множестве Δ_ν справедливы неравенства (в силу лемм 2 и 3):
$$|f_j(t)| \leqslant \begin{cases} \exp(-c\sigma_j^2 \sigma_2^{-2}) & \text{при} \quad j \leqslant \nu, \\ \exp\left(-\dfrac{1}{4k} \sigma_j^2 |t|^2\right) & \text{при} \quad j > \nu. \end{cases}$$
Поэтому
$$A_\nu = \left(\frac{B_n}{(\sqrt{k})}\right)^k \int\limits_{\Delta_\nu} |f_1(t) \cdot f_2(t)| \cdot \prod_{j=3}^{\nu} |f_j(t)| \cdot \prod_{j=\nu+1}^{n} |f_j(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{B_n}{\sqrt{k}}\right)^k \exp\left(-c \sum_{j=3}^{\nu} \sigma_j^2 \sigma_2^{-2}\right) \int\limits_{\Delta_\nu} |f_1(t) \cdot f_2(t)| \exp\left(-\frac{|t|^2}{4k} \sum_{j=\nu+1}^{n} \sigma_j^2\right) dt \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{B_n}{\sqrt{k}}\right)^k \exp\left(-c \sum_{j=3}^{\nu} \frac{\sigma_j^2}{\sigma_2^2} - \frac{1}{4k} \sum_{j=\nu+1}^{n} \frac{\sigma_j^2}{\sigma_\nu^2}\right) \cdot \int\limits_{\Delta_\nu} |f_1(t) \cdot f_2(t)|\,dt.$$
Так как $\sigma_\nu^2 \leqslant \sigma_2^2$ $(\nu \geqslant 2)$, то получим
$$A_\nu \leqslant \left(\frac{B_n}{\sqrt{k}}\right)^k \exp\left(-c_1 \frac{B_n^2 - \sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_2^2}\right) \cdot \int\limits_{\Delta_\nu} |f_1(t) \cdot f_2(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{B_n}{\sqrt{k}}\right)^k \exp\left(-\frac{cB_n^2}{\sigma_2^2}\right) \cdot \int\limits_{\Delta_\nu} |f_1(t) \cdot f_2(t)|\,dt,$$
$$\sum_{\nu=2}^{n} A_\nu \leqslant \left(\frac{B_n}{\sqrt{k}}\right)^k \exp\left(-\frac{cB_n^2}{\sigma_2^2}\right) \cdot \int\limits_{\Omega \setminus S(c/\sigma_2)} |f_1(t) \cdot f_2(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{B_n}{\sqrt{k}}\right)^k \exp\left(-\frac{cB_n^2}{\sigma_2^2}\right) \cdot \left\{\int\limits_{\Omega} |f_1(t)|^2 dt \cdot \int\limits_{\Omega} |f_2(t)|^2 dt\right\}^{1/2}.$$

Но, как нетрудно убедиться,
$$\int\limits_{\Omega} |f_\nu(t)|^2 dt = \frac{(2\pi)^k}{P_\nu}; \quad \nu = 1, 2.$$
Далее, в силу очевидного неравенства $P_\nu \geqslant cN_\nu^k$, будем иметь
$$\sum_{\nu=2}^{n} A_\nu \leqslant \left(\frac{2\pi B_n}{\sqrt{k}}\right)^k \exp\left(-\frac{cB_n^2}{\sigma_2^2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{P_1 \cdot P_2}} \leqslant c_5 \exp\left(-\frac{cB_n^2}{\sigma_2^2}\right) \left(\frac{B_n^{2k}}{\sigma_1^k \cdot \sigma_2^k}\right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant c_6 \left(\frac{\sigma_2}{B_n}\right)^{k+1} \left(\frac{B_n}{\sigma_1}\right)^{k/2} \left(\frac{B_n}{\sigma_2}\right)^{k/2} \leqslant c_6 \frac{\sigma_2}{B_n} \leqslant c_6 \frac{\sigma_1}{B_n}.$$
Таким образом, для I_3 получаем:
$$|I_3| \leqslant I = \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \leqslant c \frac{\sigma_1}{B_n}.$$

Наконец, объединяя оценки интегралов I_1, I_2, I_3 и замечая, что
$$L_n \leqslant \frac{k^2 N_1}{B_n} \leqslant c_1 \lambda_n^{-1}, \qquad \frac{\sigma_1}{B_n} \leqslant c_2 \lambda_n^{-1},$$
завершим доказательство теоремы.

Замечания

1. В силу известных соотношений между сходимостью по вариации, л.п.т. и ц.п.т., из теоремы 1 следует, что условие (10) является необходимым и достаточным для того чтобы
$$\sum_{m \in R^k} \left| P_n(m) - \frac{1}{\sqrt{|D_n|}} \varphi(m, K_n) \right| \to 0, \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

2. Симметричность относительно начала координат значений случайных векторов не обязательна.

3. Аналогичные теоремы справедливы для последовательности случайных векторов равномерно распределенных в областях G_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ следующего типа:

Существуют точка a и постоянная c такие, что
$$\sup_{x \in \Gamma_\nu} |x - a| / \inf_{x \in \Gamma_\nu} |x - a| < c;$$
Γ_ν — граница G_ν.

Литература

[1] Т. А. Азларов, Сб. „Предельные теоремы теории вероятностей", Ташкент 1963, стр. 5–14.
[2] В. М. Золотарёв, Теор. вер. и её применения 11 (1966), стр. 108–119.

[3] Г. Крамер, *Случайные величины и распределения вероятностей*, Москва 1947.
[4] Ю. В. Прохоров, Сб. „Предельные теоремы теории вероятностей'', Ташкент 1963, стр. 76–80.
[5] П. Сурвила, Лит. матем. сб. 3 (1963), стр. 225–236.
[6] Т. Л. Шервашидзе, Теор. вер. и её применения, 16 (1971), стр. 765–767.
[7] Т. Л. Шервашидзе, Л. И. Саулис, Сообщ. Груз. Академии наук 60 (1970), стр. 533–536.

Presented to the Semester
Probability Theory
February 11–June 11, 1976

PROBABILITY THEORY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 5
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1979

HOMOGENIZATION AND ERGODIC THEORY

A. BENSOUSSAN
Université Paris IX, Dauphine, France
J. L. LIONS
Collège de France, Paris, France
G. PAPANICOLAOU
Courant Institute of Mathematics Sciences, New York University, New York, USA

1. Introduction

Homogenization deals with the following general phenomenon. Let us consider a model describing some physical system, with a periodic spatial structure. More precisely, the model (in general, a partial differential equation or an integro-differential equation) involves coefficients depending on the space variable in a periodic way, but with a very small period ε (to simplify the same in all directions). Such a situation occurs in many concrete applications, especially in the field of composite materials, or nuclear reactors. More generally, one can think of rapidly varying coefficients not only in the space variable, but also in the time variable, in which case the terminology "averaging" is more standard than "homogenization".

The problem concerns the behaviour of the model as $\varepsilon \to 0$. A reasonable intuition is that the ε-model can be approximated with a model describing the same type of physical phenomenon, but with homogenized coefficients. In other words, the homogenized coefficients will be some mean of the original coefficients. Such a statement turns out to be true in many cases. However, the computation of the right mean does not correspond in general to what can be guessed a priori, and intuition can be very misleading.

Although homogenization problems are not problems arising in probability theory, and can be dealt with using only analytical techniques, it turns out that since many models of interest have a probabilistic interpretation, there is a probabilistic approach to homogenization. It uses namely results of ergodic theory. In this article, we will restrict ourselves to the probabilistic approach. We refer to our forthcoming book [4] for details concerning analytical approaches (see also [2], [3]).

Homogenization has been studied by several authors in various fields (Analysis. Numerical Analysis. Probability theory). Let us mention, in particular, Babuska [1], de Giorgi–Spagnolo [6], Freidlin [7], Spagnolo [10], Stroock–Varadhan [11], Tartar [13].