HOMOTOPY AND GEOMETRY
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 45
INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
WARSZAWA 1998

UNE GÉNÉRALISATION DES NOMBRES DE MILNOR POUR LES INTERSECTIONS COMPLÈTES À SINGULARITÉS NON ISOLÉES

DANIEL LEHMANN*

GETODIM, CNRS, UPRESA 5030, Université de Montpellier II
34095 Montpellier Cedex, France
E-mail: lehmann@math.univ-montp2.fr

Le nombre de Milnor a d'abord été défini en 1967 par J. Milnor ([M2]) pour les singularités isolées des hypersurfaces d'une variété analytique complexe W sans singularité. Il a ensuite été généralisé par H. Hamm en 1971 ([H]) (cf. aussi Lê Dung Tran [Le]) pour les intersections complètes, mais toujours avec singularités isolées (ce qui ne correspond pas à une situation générique en codimension ≥ 2). Il a aussi été généralisé en 1988 par A. Parusiński ([P]) pour les hypersurfaces avec singularités non nécessairement isolées.

Nous allons ici definir et étudier ce nombre de Milnor, en codimension arbitraire et pour des singularités non nécessairement isolées, essentiellement sur les variétés singulières V qu'on peut définir comme ensemble des zéros d'une section holomorphe s d'un fibré vectoriel holomorphe $E \to W$, génériquement transverse à la section zero. Entrent par exemple dans cette catégorie toutes les hypersurfaces de W, ainsi que tous les ensembles algébriques dans un espace projectif complexe qui sont des intersections complètes du point de vue ensembliste. La methode originale utilisée dans [M2] et [H] consistait à étudier la fibration de Milnor; or il se peut qu'une telle fibration n'existe pas pour des singularités non isolées. Quant à la méthode de [P] pour les hypersurfaces, elle ne s'applique pas en codimension >1.

Le principe de notre méthode est basé sur la généralisation d'une formule donnée dans [PP] dans le cas des hypersurfaces à singularités isolées. Pour un ensemble analytique V satisfaisant l'hypothèse ci-dessus, nous définissons un invariant topologique global qui représente une sorte d'obstruction à ce que le théorème de Gauss-Bonnet soit vrai sur V. Cette obstruction est en fait "localisée" près de l'ensemble singulier $\mathrm{Sing}(V)$ de V,

1991 *Mathematics Subject Classification*: 32C25, 32S20, 57R.

*Résumé d'un travail en coopération avec José Seade et Tatsuo Suwa ([LS'S]). Ce travail a été repris dans un contexte plus général dans un article avec la collaboration supplémentaire de Jean Paul Brasselet ([BLS'S]).

le nombre de Milnor $\mu_\alpha(V)$ attaché à une composante connexe S_α de $\mathrm{Sing}(V)$ étant alors la contribution de S_α à l'obstruction en question. Cette méthode peut aussi être efficace pour faire des calculs sur de nouveaux exemples, y compris dans des situations théoriquement déjà connues.

Plus précisément, on se donne un fibré vectoriel holomorphe $E \to W$ de rang k sur une variété complexe W de dimension $n+k$, et une section holomorphe s de E supposée generiquement transverse à la section zéro: l'ensemble V des zéros de s est alors un ensemble analytique complexe de dimension n, qui est localement une intersection complète ensembliste dans W. En outre, la restriction de E à la partie regulière V_0 de V peut être canoniquement identifiée au fibré normal de V_0 dans W: en particulier, notant N la restriction de E à V, nous obtenons un "fibré virtuel" tangent $\tau(V) = TW|_V - N$ dans la K-théorie $KU(V)$, dont on peut prendre la classe (totale) de Chern $c(V) = c(TW|_V)\cdot c(N)^{-1}$, ainsi que la classe $c_n(V)$ qui en est la composante homogène de dimension $2n$. [On remarquera que ces classes de Chern dépendent du choix de $E|_V$, et en fait toutes nos constructions ultérieures dépendront a priori de E[1]. Cependant, si l'on peut choisir les données holomorphes (E,s) de telle façon que la section s soit régulière (c.à.d. telle que l'idéal de V soit localement engendré par les composantes de s relativement à une trivialisation locale de E, ce qui par exemple est toujours possible pour les hypersurfaces), V est alors localement une intersection complète, et la classe d'isomorphie de $N = E|_V$ est bien définie, de même que l'identification de $E|_{V_0}$ avec le fibré normal à V_0 (cf. [LS], section 2): on appelle alors N "l'extension réduite" du fibré normal[2].

Donnons-nous un champ de vecteurs X, C^∞, tangent à V_0. Notons $\mathrm{Sing}(X)$ la réunion de $\mathrm{Sing}(V)$ et de l'ensemble singulier $\mathrm{Sing}_0(X)$ de X dans V_0. Soient $(S_\alpha)_\alpha$ les composantes connexes de $\mathrm{Sing}(X)$. Supposons de plus chaque S_α compact et inclus, de deux choses l'une, ou bien dans V_0, ou bien dans $\mathrm{Sing}(V)$. Pour tout α tel que S_α soit inclus dans V_0, notons $PH_\alpha(X)$ l'indice (généralisé) de Poincaré-Hopf de X au voisinage de S_α (c'est l'indice usuel quand S_α est un point).

Lorsque V est compacte et sans singularité, les formules suivantes sont bien connues :

(i) $\chi(V) = c_n(\tau) \frown [V]$: c'est une version du théorème de Gauss-Bonnet,

(ii) $\chi(V) = \sum_\alpha PH_\alpha(X)$: c'est le théorème de Poincaré-Hopf, qui signifie que la donnée de X fournit une "localisation" de l'invariant topologique $\chi(V)$ près de $\mathrm{Sing}(X)$.

Si V, toujours supposée compacte, a maintenant des singularités, l'expression $\chi(V) - c_n(\tau) \frown [V]$ n'est plus nulle en général: c'est elle qui sera—au signe près—l'invariant topologique de V dont nous parlions ci-dessus.

[1] En fait, toutes nos constructions et nos résultats restent valables sous l'hypothèse plus faible que le fibré normal à V_0 dans W s'étend en un fibré vectoriel $\tilde{N}$ qu'on peut supposer seulement C^∞ sur un voisinage de V dans W, et sans supposer—même si $\tilde{N} = E$ est holomorphe—que V est nécessairement l'ensemble des zéros d'une section de E.

[2] Cela ne veut pas dire, même pour les hypersurfaces à singularités isolées, que cette extension réduite N soit l'unique extension possible à V du fibré normal à V_0: voir ci-dessous l'exemple 2.

Cet invariant se localise près de $\mathrm{Sing}(V)$ de la façon suivante: si S_α désigne une composante connexe compacte de $\mathrm{Sing}(X)$, (V elle-même n'étant pas nécessairement compacte), la donnée de X fournit séparément une localisation de $\chi(V)$ près de S_α et une autre de $c_n(\tau) \frown [V]$: à partir de là, on distingue 2 indices de X en S_α, tous deux généralisant l'indice de Poincaré-Hopf et coïncidant avec lui si S_α est dans V_0, tous deux définis dès que X est défini au voisinage de S_α sauf peut-être en S_α, et tous deux ne dépendant que du comportement local de X au voisinage de S_α. Ces 2 indices sont appelés ci-dessous "l'indice virtuel" $\mathrm{Vir}_\alpha(X)$, et "l'indice de Schwartz" $\mathrm{Sch}_\alpha(X)$. Avant d'esquisser leur définition, remarquons d'abord que toute variété singulière admet des champs de vecteurs X comme ci-dessus, tel par exemple un champ "radial" R au sens de [Sc]: dire que R est radial signifie qu'il coïncide pour tout α avec un champ de vecteurs R_α tangent à V_0, sans singularité sur $\partial\mathcal{T}_\alpha = V_0 \cap \partial\tilde{\mathcal{T}}_\alpha$, et transverse à $\partial\mathcal{T}_\alpha$ ($\tilde{\mathcal{T}}_\alpha$ désignant une variété à bord dont l'intérieur est un voisinage régulier de S_α dans W et dont le bord est transverse à V_0).

L'indice "virtuel", introduit dans [LSS], y est défini par des méthodes de géométrie différentielle. Si une singularité de V est un germe d'intersection complète en un point isolé, l'indice virtuel coïncide avec le GSV-indice, qui est lié à la fibre de Milnor et au nombre de Milnor. Dans le cas de singularités non isolées, le GSV-indice n'est pas bien défini a priori, d'où l'intérêt d'utiliser l'indice virtuel. Nous allons définir ici ce dernier de façon purement topologique, en supposant pour simplifier W compacte : il existe alors un fibré $E' \to W$ tel que $E \oplus E'$ soit un fibré trivial $\theta_h(W)$ de rang fini h, dont on notera $(v_1, \cdots, v_h)$ la trivialisation naturelle. Sur V_0, $TW \oplus E'$ est isomorphe à $TV_0 \oplus \theta_h(V_0)$ et admet par conséquent, au-dessus de $\partial\mathcal{T}_\alpha$, le $h+1$ repère $(X, v_1, \cdots, v_h)$, ($\tilde{\mathcal{T}}_\alpha$ ayant été choisi de façon que X ne s'annule pas sur $\partial\mathcal{T}_\alpha$, ce qui est toujours possible). L'indice $\mathrm{Vir}_\alpha(X)$ est alors l'obstruction à prolonger le $h+1$ repère $(X, v_1, \cdots, v_h)$ à $\mathcal{T}_\alpha = V \cap \tilde{\mathcal{T}}_\alpha$ tout entier; puisque cette obstruction appartient à $H^n(\mathcal{T}_\alpha, \partial\mathcal{T}_\alpha; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$, c'est un entier; on peut montrer qu'il ne dépend pas des différents choix effectués.

Si X' est un autre champ de vecteurs tangent à V_0, et sans singularité sur chaque $\partial\tilde{\mathcal{T}}_\alpha$, on pose:

$$d_\alpha(X, X') = \mathrm{Vir}_\alpha(X') - \mathrm{Vir}_\alpha(X);$$

cet entier représente une obstruction à l'existence d'une homotopie entre X et X' sur $\partial\mathcal{T}_\alpha$.

L'indice de Schwartz Sch est introduit dans [SS2] quand S_α est un point singulier isolé. Nous le généralisons ici au cas de singularités non isolées en posant

$$\mathrm{Sch}_\alpha(X) = \chi(S_\alpha) + d_\alpha(R, X).$$

En particulier, $\mathrm{Sch}_\alpha(R) = \chi(S_\alpha)$. (Il existe une autre généralisation dans [KT] de l'indice de Schwartz pour les champs de vecteurs stratifiés éventuellement non radiaux, éventuellement discontinus).

L'indice de Schwartz dépend seulement de X et de V, tandis que l'indice virtuel tient compte aussi de la façon dont V est plongée dans W et du choix de E.

Nous allons résumer nos résultats dans le théorème suivant :

Théorème. *Soit V un sous-ensemble analytique complexe de dimension n d'une variété complexe lisse W, défini comme ci-dessus, et soit X un champ de vecteurs comme ci-dessus. Définissons le nombre complexe*

$$\mu_\alpha(V) = (-1)^n \big[\mathrm{Vir}_\alpha(X) - \mathrm{Sch}_\alpha(X)\big].$$

Alors :

(i) *$\mu_\alpha(V)$ ne dépend pas du choix du champ de vecteurs X au voisinage de S_α, bien qu'il dépende, en général, du choix de l'extension $\tilde{N}$ du fibré normal à V_0.*

(ii) $\mathrm{Vir}_\alpha(X) = \mathrm{Sch}_\alpha(X) = PH_\alpha(X)$ *si S_α est dans V_0.*

(iii) *Si V est compacte, on obtient les 2 généralisations suivantes du théorème de Poincaré-Hopf:*

$$\sum_\alpha \mathrm{Vir}_\alpha(X) = c_n(V) \frown [V], \qquad \sum_\alpha \mathrm{Sch}_\alpha(X) = \chi(V).$$

(iv) *Si V est compacte, on a alors $\chi(V) = c_n(\tau) \frown [V] + (-1)^{n+1} \sum_\alpha \mu_\alpha(V)$.*

(v) *Si S_α est un point isolé p, si V est localement une intersection complète près de p, et si N est l'extension réduite du fibré normal à V_0,* Vir_α *coïncide alors avec le GSV-index of* [Se, GSV, SS1], *et $\mu_\alpha(V)$ coïncide avec le nombre de Milnor usuel* ([M2, H, Le, L]).

(vi) *Si V désigne une hypersurface, le fibré normal à V_0 possède alors une extension naturelle à un voisinage de V dans l'espace ambiant, et dans ce cas $\mu_\alpha(V)$ coïncide avec le nombre de Milnor généralisé de Parusiński* ([P]) *(le nombre de Milnor usuel si S_α est un point).*

La formule (iv) est un corollaire immédiat de (iii). Elle généralise celle pour les hypersurfaces donné dans [Pa], et celle pour les "intersections complètes locales fortes avec singularités isolées" de [SS2] (cf. aussi [D, PP]). Comme indiqué dans [SS2], cette formule se réduit à la classique formule d'adjonction quand V est une courbe complexe et W une surface compacte complexe.

Exemple 1. Prenons pour W l'espace projectif $\mathbf{CP}^4$ avec coordonnées homogènes $[X, Y, Z, T, U]$, et soit V la surface complexe définie comme l'intersection, dans $\mathbf{CP}^4$, des 2 cônes $X^2 - YT = 0$ et $Z^2 - XY = 0$. Il est aisé de vérifier que l'ensemble singulier S de V est la droite complexe $X = Y = Z = 0$. Pour tout nombre complexe a, le champ de vecteurs

$$R_a = (2+a)x\frac{\partial}{\partial x} + (4+a)y\frac{\partial}{\partial y} + (3+a)z\frac{\partial}{\partial z} + at\frac{\partial}{\partial t}$$

(relativement aux coordonnées $(x, y, z, t) = (\frac{X}{U}, \frac{Y}{U}, \frac{Z}{U}, \frac{T}{U})$ dans l'espace affine $U \neq 0$) est tangent à V, et s'étend naturellement à l'hyperplan de l'infini $U = 0$.

Pour $a = -4$, R_a s'annule le long de la droite $X = Z = T = 0$, qui est incluse dans V et pas dans S bien que coupant S. Il ne satisfait donc pas aux conditions voulues.

Pour toutes les autres valeurs de a, le seul point singulier de R_a sur $V - S$ est le point isolé $p = [0, 1, 0, 0, 0]$ (régulier dans V). Ainsi, $\mathrm{Sing}(R_a)$ possède 2 composantes qui sont S et $\{p\}$.

Tous les R_a ($a \neq -4$) sont radiaux sortant de p, tandis que les R_a tels que $a \neq -2, -3, -4$ sont radiaux sortant de S. On en déduit $\chi(V) = \chi(S) + \chi(p) = 2 + 1 = 3$, $\mathrm{Sch}(R_a, S) = 2$ et $\mathrm{Sch}(R_a, p) = 1$.

D'autre part le fibré tangent virtuel à V est égal à la restriction à V de $5L - L^2 - L^2$, (L désignant le fibré "en hyperplans", c'est à dire le fibré dual du fibré tautologique en droites sur $\mathbf{CP}^4$). Il en résulte: $c_2(V) \frown [V] = 4 \left[\frac{(1+t)^5}{(1+2t)^2}\right]_2 = 8$. Puisque le point p est régulier, $\mathrm{Vir}(R_a, p) = \mathrm{Sch}(R_a, p) = 1$ pour $a \neq -4$. On en déduit: $\mathrm{Vir}(R_a, S) = 8 - 1 = 7$, and $\mu_S(V) = 7 - 2 = 5$

Exemple 2. Prenons pour V la courbe d'équation $X^3 - Y^2 Z = 0$ dans l'espace $W = \mathbf{CP}^2$ (coordonnées homogènes $[X, Y, Z]$). Puisque le degré de V est 3, le fibré $E = L^{\oplus 3}$ est une extension à W du fibré normal à la partie régulière V_0 de V (extension "réduite"). Mais la courbe V est aussi une composante irréductible de la courbe V' définie par $Y(X^3 - Y^2 Z) = 0$, et $E' = L^{\oplus 4}$ prolonge de même le fibré normal à la partie régulière V_0' de V'. L'origine $[0, 0, 1]$ étant le seul point singulier et de V et de V', E' est aussi une extension du fibré normal à V_0. On a donc 2 extensions (non isomorphes, même après restriction à V) du fibré normal à V_0, et donc 2 indices virtuels distincts et 2 nombres de Milnor. On trouve $\chi(V)$ comme nombre de Milnor réduit correspondant à l'extension réduite E, et $\chi(V) + 3$ pour l'extension E'. En fait $\chi(V) = 2$, puisque l'application $[u, v] \to [u^2 v, u^3, v^3]$ de $\mathbf{CP}^1$ dans $\mathbf{CP}^2$ est un homéomorphisme de $\mathbf{CP}^1$ sur V. Ainsi, le nombre de Milnor réduit est 2; il coïncide avec le nombre de Milnor usuel, qui est égal à la dimension de $\mathcal{O}\{x, y\}/J_f$ où J_f désigne l'idéal jacobien de la fonction $f(x, y) = x^3 - y^2$ dans l'anneau $\mathcal{O}\{x, y\}$ des séries entières convergentes en (x, y).

On remarquera que les 2 extensions L^3 et L^4 du fibré normal à V_0, étant localement triviales, sont isomorphes au voisinage du point singulier isolé. Or l'indice virtuel comme le nombre de Milnor ne dépend que du comportement local de ces fibrés près de l'ensemble singulier. Il n'y a cependant aucune contradiction à trouver des indices virtuels et des nombres de Milnor distincts; en effet, si nous identifions localement chacun des 2 fibrés avec le fibré trivial, les projections $\pi : TW|_V \to N$ ne sont pas les mêmes dans les 2 cas.

Remarquer aussi qu'il faut choisir $E = L^3$ si l'on veut que V soit l'ensemble des zéros d'une section holomorphe de E.

Références

[BB] P. Baum and R. Bott, *Singularities of holomorphic foliations*, J. Differential Geom. 7 (1972), 279–342.

[B] R. Bott, *Lectures on characteristic classes and foliations*, Lectures on Algebraic and Differential Topology, Lecture Notes in Mathematics 279, Springer-Verlag, 1972, 1–94.

[BLS'S] J. P. Brasselet, D. Lehmann, J. Seade and T. Suwa, *Milnor classes of local complete intersections*, Preprint series in Mathematics 413, 1998, Hokkaido University, Sapporo 060, Japan, 1–40.

[BS] J.-P. Brasselet et M.-H. Schwartz, *Sur les classes de Chern d'un ensemble analytique complexe*, Caractéristique d'Euler-Poincaré, Astérisque 82–83, Soc. Math. de France, 1981, 93–147.

[D] A. Dimca, *On the homology and cohomology of complete intersections with isolated singularities*, Compositio Math. 58 (1986), 321–339.

[F] W. Fulton, *Intersection Theory*, Springer-Verlag, 1984.

[GSV] X. Gómez-Mont, J. Seade and A. Verjovsky, *The index of a holomorphic flow with an isolated singularity*, Math. Ann. 291 (1991), 737–751.

[G] G.-M. Greuel, *Der Gauß-Manin Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten*, Math. Ann. 214 (1975), 235–266.

[H] H. Hamm, *Lokale topologische Eigenschaften komplexer Raüme*, Math. Ann. 191 (1971), 235–252.

[KT] H. King and D. Trotmann, *Poincaré-Hopf theorems on stratified sets*, preprint.

[LS] D. Lehmann and T. Suwa, *Residues of holomorphic vector fields relative to singular invariant subvarieties*, J. of Differential Geom. 42 (1995), 165–192.

[LSS] D. Lehmann, M. Soares and T. Suwa, *On the index of a holomorphic vector field tangent to a singular variety*, Bol. Soc. Bras. Mat. 26 (1995), 183–199.

[LS'S] D. Lehmann, J. Seade and T. Suwa, *A generalization of the Milnor number for subvarieties with non isolated singularities*, preprint (1997).

[L] E. Looijenga, *Isolated Singular Points on Complete Intersections*, London Mathematical Society Lecture Note Series 77, Cambridge Univ. Press, 1984.

[M1] J. Milnor, *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Univ. Press of Virginia, Charlottesville, 1965.

[M2] J. Milnor, *Singular Points of Complex Hypersurfaces*, Annales of Mathematics Studies 61, Princeton University Press, Princeton, 1968.

[O] S. Ochanine, *Signature modulo 16, invariants de Kervaire généralisés et nombres caractéristiques dans la K-théorie réelle*, Mem. Soc. Mat. France, nouvelle série 5, 1981.

[P] A. Parusiński, *A generalization of the Milnor number*, Math. Ann. 281 (1988), 247–254.

[PP] A. Parusiński and P. Pragacz, *A formula for the Euler characteristic of singular hypersurfaces*, J. Algebraic Geom. 4 (1995), 337–351.

[Sc] M.-H. Schwartz, *Champs radiaux sur une stratification analytique complexe*, Travaux en cours, Hermann, 1991.

[Se] J. Seade, *The index of a vector field on a complex surface with singularities*, Contemp. Maths. 58 part III, AMS, edit. A. Verjovsky, 1987, 225–232.

[SS1] J. Seade and T. Suwa, *A residue formula for the index of a holomorphic flow*, Math. Ann. 304 (1996), 621–634.

[SS2] J. Seade and T. Suwa, *An adjunction formula for local complete intersections*, preprint.

[St] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton University Press, Princeton, 1951.