SINGULARITIES SYMPOSIUM — ŁOJASIEWICZ 70
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 44
INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
WARSZAWA 1998

DIVISION ET EXTENSION DANS DES CLASSES DE CARLEMAN DE FONCTIONS HOLOMORPHES

VINCENT THILLIEZ
CNRS - URA 751, Bât. M2, Mathématiques
Université des Sciences et Technologies de Lille
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail: Vincent.Thilliez@univ-lille1.fr

Dédié au Professeur Stanisław Łojasiewicz

Abstract. Let Ω be a bounded pseudoconvex domain in $\mathbb{C}^n$ with C^1 boundary and let X be a complete intersection submanifold of Ω, defined by holomorphic functions $v_1, \ldots, v_p$ $(1 \le p \le n-1)$ smooth up to $\partial\Omega$. We give sufficient conditions ensuring that a function f holomorphic in X (resp. in Ω, vanishing on X), and smooth up to the boundary, extends to a function g holomorphic in Ω and belonging to a given strongly non-quasianalytic Carleman class $\{l!\, M_l\}$ in $\bar{\Omega}$ (resp. satisfies $f = v_1 f_1 + \ldots + v_p f_p$ with $f_1, \ldots, f_p$ holomorphic in Ω and $\{l!\, M_l\}$-regular in $\bar{\Omega}$). The essential assumption is that f and $v_1, \ldots, v_p$ belong to some (maybe smaller) Carleman class $\{l!\, M_l^-\}$, where the sequences M^- and M are precisely related by geometric conditions on X and Ω.

Introduction. Soit Ω un ouvert borné, pseudoconvexe à bord lisse, dans $\mathbb{C}^n$, et soit $A^\infty(\bar{\Omega})$ l'algèbre des fonctions holomorphes dans Ω et C^∞ jusqu'au bord de Ω (autrement dit, admettant un prolongement C^∞ dans $\mathbb{C}^n$). On considère $v_1, \ldots, v_p$ $(1 \le p \le n-1)$ des fonctions de $A^\infty(\bar{\Omega})$ ainsi prolongées à $\mathbb{C}^n$ et on pose $\tilde{X} = \{v_1 = \ldots = v_p = 0\}$, $X = \tilde{X} \cap \bar{\Omega}$.

Lorsque l'on a $\partial v_1 \wedge \ldots \wedge \partial v_p \neq 0$ sur $X \cap \partial\Omega$ et que les ensembles $\overline{\tilde{X} \setminus \bar{\Omega}}$ et $\bar{\Omega}$ sont régulièrement situés au sens de Łojasiewicz [M], on connaît les propriétés suivantes :

(a) Toute fonction f de $A^\infty(\bar{\Omega})$ qui s'annule sur X vérifie la propriété de division $f = v_1 f_1 + \ldots + v_p f_p$ avec $f_j \in A^\infty(\bar{\Omega})$ pour $j = 1, \ldots, p$.

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 32E25, 32E35; Secondary 46E99.
Received by the editors: November 2, 1996.
The paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

(b) Toute fonction f qui, en un sens convenable, est C^∞ sur X et holomorphe dans l'intérieur relatif de X dans $\tilde{X}$, s'obtient par restriction à X d'une fonction g de $A^\infty(\bar{\Omega})$.

Il s'agit là de résultats d'E. Amar [A1]. On se reportera également à P. de Bartolomeis & G. Tomassini [DBT], R. Gay & A. Sebbar [GS], ainsi qu'aux références citées dans ces travaux.

Soit à présent $M = (M_l)_{l\geq 0}$ une suite croissante de réels positifs, logarithmiquement convexe. Disons qu'une fonction h de classe C^∞ au voisinage d'une partie Y de $\mathbb{C}^n$ satisfait des estimations Carleman C_M sur Y s'il existe une constante C telle que les dérivées de h à tout ordre l soient bornées par $C^{l+1}l!\,M_l$ sur Y. Comme on le sait, la suite M mesure, en un certain sens, le défaut d'analyticité de h sur Y.

Dans ce travail, on exploite les résultats de [Th1] pour répondre aux questions suivantes. On se place dans le cadre des résultats (a) et (b) rappelés précédemment et on suppose que la suite M est “fortement régulière” (voir § 1, par exemple $M_l = l!^\alpha(\operatorname{Log} l)^{\beta l}$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$). Peut-on alors, à partir de la donnée de M, Ω et $\tilde{X}$, déterminer une suite M^- telle que dans les résultats (a) et (b), une hypothèse additionnelle de régularité C_{M^-}, portant sur f et sur les v_j dans $\bar{\Omega}$, implique que les fonctions f_j et g aient la régularité C_M sur $\bar{\Omega}$? Dans l'affirmative, quelles sont les propriétés de M^- ?

Ce problème se ramène à l'étude de l'idéal engendré par les v_j sur la classe des fonctions de $A^\infty(\bar{\Omega})$ qui vérifient des estimations C_M sur $\bar{\Omega}$. Après l'introduction d'outils techniques aux § 1 et § 2, les résultats obtenus sont décrits au § 3. Les démonstrations font l'objet des § 4 et § 5.

La méthode suivie fait appel à deux étapes : une première étape consiste à établir des versions locales des résultats précités. Pour cela, on s'inspire en particulier de constructions faites par E. Amar [A1] dans le cas de $A^\infty(\bar{\Omega})$. La seconde étape consiste à globaliser les résultats via des procédés cohomologiques ; ici la proposition 6.1 de [GS] joue un rôle crucial. Bien entendu, il est également nécessaire de disposer de solutions du $\bar{\partial}$ à régularité Carleman : ces solutions sont fournies par [CC2] lorsque l'ouvert Ω possède une “bonne” base de voisinages pseudoconvexes.

Tout au long de l'article, et en contraste avec le cas de $A^\infty(\bar{\Omega})$ où l'aspect quantitatif est occulté, il est essentiel de contrôler très précisément les “pertes de régularité” Carleman liées à la propriété de situation régulière des ensembles $\overline{\tilde{X}\backslash\bar{\Omega}}$ et $\bar{\Omega}$. Ceci nécessite l'introduction de procédés spécifiques : en particulier, le théorème de recollement de jets ultradifférentiables et la notion de situation régulière raffinée de [Th1] sont essentiels.

1. Résultats préliminaires

Définition 1.1. Soit $M = (M_l)_{l\geq 0}$ une suite de réels positifs. On dit que la suite M est *fortement régulière* lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes :

(1.1.1) Les suites M et $(M_{l+1}/M_l)_{l\geq 0}$ sont croissantes.

(1.1.2) Il existe une constante $A_1 \geq 1$ telle que l'on ait, pour tout l,

$$M_l \leq A_1^l M_j M_{l-j} \text{ pour } 0 \leq j \leq l.$$

(1.1.3) Il existe une constante $A_2 \geq 1$ telle que l'on ait, pour tout l,

$$\sum_{j \geq l} \frac{M_j}{(j+1)M_{j+1}} \leq A_2 \frac{M_l}{M_{l+1}}.$$

On note $\mathcal{S}_{\mathrm{fr}}$ l'ensemble des suites fortement régulières.

On définit une relation d'équivalence $\sim$ sur $\mathcal{S}_{\mathrm{fr}}$ en disant que l'on a $M \sim M'$ si et seulement si il existe une constante C, avec $C \geq 1$, telle que l'on ait $C^{-(l+1)} M_l \leq M'_l \leq C^{l+1} M_l$ pour tout entier l.

On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions $\varphi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ croissantes au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_+$ et telles que $\varphi(0) = 0$. On définit aussi une relation d'équivalence $\simeq$ sur $\mathcal{F}$ en disant que l'on a $\varphi \simeq \psi$ si et seulement si il existe des constantes b, c, avec $0 < b < 1$, $0 < c < 1$, telles que l'on ait $b\,\varphi(ct) \leq \psi(t) \leq b^{-1}\varphi(c^{-1}t)$ pour $t \to 0$.

1.2. *Fonctions h_M.* Soit M une suite fortement régulière. Pour tout entier l, on pose

$$h_M(t) = \inf_{j \geq 0} t^j M_j \quad \text{pour} \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

La fonction h_M est continue, croissante et on a $h_M(0) = 0$ et $h_M(t) = M_0$ pour $t \geq 1$. De plus, si on pose $N_l = \operatorname*{Sup}_{t>0} t^{-l} h_M(t)$, on a alors $N \sim M$ en vertu de la condition de convexité logarithmique (1.1.1). La donnée de h_M détermine donc M dans $\mathcal{S}_{\mathrm{fr}}/\sim$. Comme autre conséquence, étant données deux suites M et M' de $\mathcal{S}_{\mathrm{fr}}$, l'existence de constantes b et c avec $0 < b < 1$, $0 < c < 1$, telles que l'on ait $b\,h_M(ct) \leq h_{M'}(t) \quad \text{pour} \quad t \longrightarrow 0$, équivaut à l'existence d'une constante $C \geq 1$ telle que l'on ait $M_l \leq C^{l+1} M'_l$ pour tout entier l. En particulier, on a $M \sim M'$ si et seulement si on a $h_M \simeq h_{M'}$ dans $\mathcal{F}$. Compte tenu de ces remarques, on confondra souvent, dans le reste de ce travail, les suites M de $\mathcal{S}_{\mathrm{fr}}$ et leurs classes d'équivalence *modulo* $\sim$.

Exemple. Soient α et β réels, avec $\alpha > 0$. La suite M donnée par $M_l = l!^\alpha (\operatorname{Log} l)^{\beta l}$ pour $l \geq 1$ est fortement régulière et on a $h_M(t) \simeq \exp(-t^{-1/\alpha}(\operatorname{Log}(1/t))^{-\beta/\alpha})$.

Définition 1.3. Soit θ un élément de $\mathcal{F}$. On dira que la fonction θ est *fortement admissible* si elle vérifie les conditions suivantes :

(1.3.1) Elle est continue, strictement croissante, au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_+$.

(1.3.2) La fonction $t \longrightarrow \theta(t)/t$ est croissante au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_+$.

(1.3.3) Il existe un réel $q > 1$ tel que la fonction $t \longrightarrow \theta(t)/t^q$ soit décroissante au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}_+$.

Exemple. Un exemple standard de fonction fortement admissible est donné par $\theta(t) = t^\mu(\operatorname{Log}(1 + \frac{1}{t}))^{-\nu}$, où μ et ν sont deux réels, avec $\mu \geq 1$ et $\nu \geq 0$.

La définition 1.4 ci-après illustre l'usage que l'on fera, dans ce travail, des fonctions fortement admissibles. On désigne par d la distance euclidienne.

Définition 1.4. Soient Y_1 et Y_2 deux sous-ensembles fermés de $\mathbb{R}^n$ et θ une fonction fortement admissible. Si on a $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, on dit que Y_1 et Y_2 sont *θ-situés* lorsque, quels que soient les sous-ensembles compacts respectifs E_1 et E_2 de Y_1 et Y_2, il existe une constante $\gamma > 0$ et un ouvert V contenant $E_1 \cup E_2$ tels que l'on ait

$$d(x, E_1) + d(x, E_2) \geq \gamma\,\theta(d(x, E_1 \cap E_2)) \tag{1.4.1}$$

pour tout x de V. Si on a $Y_1 \cap Y_2 = \emptyset$, on convient aussi de dire que Y_1 et Y_2 sont θ-situés avec $\theta(t) = t$ (autrement dit : *id*-situés).

R e m a r q u e 1.5. Dans la définition précédente, il est possible d'employer des fonctions admissibles plus générales, voir [Th1] et [Th2]. Ici, il sera techniquement plus simple de se limiter aux fonctions fortement admissibles définies en 1.3. Il s'agit d'une restriction minime, voir les points 1.6 et 1.7 de [Th2].

Il convient par ailleurs de remarquer que, compte tenu de (1.3.3), la θ-situation définie en 1.4 implique la situation régulière de Łojasiewicz [M]. Elle en est une forme précisée.

On rappelle maintenant une construction faite dans la proposition 2.2 de [Th1]. Elle jouera un rôle essentiel aux § 3 et § 4.

PROPOSITION 1.6. *Soit θ une fonction fortement admissible. Alors, quel que soit M dans $\mathcal{S}_{\mathrm{fr}}/\sim$, il existe un unique $M^{(\theta)}$ dans $\mathcal{S}_{\mathrm{fr}}/\sim$ tel que l'on ait*

$$h_M \simeq h_{M^{(\theta)}} \circ \theta. \tag{1.6.1}$$

En outre, $M^{(\theta)}$ est donné explicitement, modulo $\sim$, par

$$M_l^{(\theta)} = \prod_{0\le j\le l-1} m_j^{(\theta)} \quad \textit{avec} \quad m_j^{(\theta)} = \frac{1}{\theta(1/m_j)}, \quad m_j = M_{j+1}/M_j. \tag{1.6.2}$$

EXEMPLES.

(i) Pour $\theta(t) = t^\mu$ ($\mu \ge 1$), on a $M_l^{(\theta)} = (M_l)^\mu$. En particulier, pour $\theta = \mathrm{id}$ (identité), on a $M^{(\theta)} = M$.

(ii) Pour $M_l = l!^\alpha (\operatorname{Log} l)^{\beta l}$ et $\theta(t) = t^\mu(\operatorname{Log}(1+\frac{1}{t}))^{-\nu}$ avec $\alpha > 0$, $\beta \ge 0$, $\mu \ge 1$ et $\nu \ge 0$, on a $M_l^{(\theta)} = l!^{\alpha\mu}(\operatorname{Log} l)^{(\beta\mu+\nu)l}$ (On vérifie (1.6.1) à l'aide de l'exemple donné en 1.2, ou bien on utilise (1.6.2)).

On a très facilement la propriété suivante : soient θ une fonction fortement admissible et M une suite de $\mathcal{S}_{\mathrm{fr}}/\sim$; alors il existe des constantes $q \ge 1$ et $C \ge 1$ telles que l'on ait

$$C^{-(l+1)} M_l \le M_l^{(\theta)} \le C^{l+1} (M_l)^q$$

pour tout l (c'est une conséquence directe de (1.3.2), (1.3.3) et (1.6.2)). La propriété qui suit est beaucoup moins immédiate.

PROPOSITION 1.7 ([Th2], proposition 1.10). *Soit θ une fonction fortement admissible. Alors l'application $M \longrightarrow M^{(\theta)}$ est une bijection de $\mathcal{S}_{\mathrm{fr}}/\sim$ sur lui-même.*

1.8. *Notation.* Dans toute la suite, si θ est une fonction fortement admissible donnée et si M est un élément de $\mathcal{S}_{\mathrm{fr}}/\sim$, on notera M^- l'unique élément de $\mathcal{S}_{\mathrm{fr}}/\sim$ tel que l'on ait $(M^-)^{(\theta)} = M$.

2. Classes de Carleman

2.1. *Notations.* Pour $z = (z_1, \dots, z_n)$ dans $\mathbb{C}^n$, on pose $z_j = x_j + ix_{n+j}$ ($1 \le j \le n$). Pour tout multi-indice $L = (l_1, \dots, l_{2n})$ de $\mathbb{N}^{2n}$, on note l la longueur $l_1 + \ldots + l_{2n}$ de L et D^L le monôme de dérivation $\partial^l/\partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_{2n}^{l_{2n}}$ associé à L.

2.2. *Classes de Carleman.* Soit M une suite fortement régulière. Une fonction f de $C^\infty(\mathbb{C}^n)$ sera dite appartenir à la classe de Carleman $C_M(\mathbb{C}^n)$ s'il existe une constante positive C (dépendant de f) telle que l'on ait, pour tout multi-indice L de $\mathbb{N}^{2n}$ et tout z de $\mathbb{C}^n$,

$$|D^L f(z)| \leq C^{l+1} l!\, M_l. \tag{2.2.1}$$

La classe $C_M(\mathbb{C}^n)$ est une algèbre, stable par opérateurs différentiels. Elle est fortement non-quasianalytique [B], en particulier dotée de partitions de l'unité.

Soit à présent Ω un ouvert borné à bord de classe C^1 dans $\mathbb{C}^n$. On définit la classe de Carleman $C_M(\bar{\Omega})$ comme l'algèbre des fonctions f de $C^\infty(\bar{\Omega})$ telles que l'on ait (2.2.1) pour tout multi-indice L et tout z de $\bar{\Omega}$, et on définit $A_M(\bar{\Omega})$ comme l'algèbre des fonctions de $C_M(\bar{\Omega})$ qui sont holomorphes dans Ω. D'après [B], [CC1] (voir aussi le corollaire 3.12 de [BBMT]), pour toute fonction f de $C_M(\bar{\Omega})$, il existe une fonction $\tilde{f}$ de $C_M(\mathbb{C}^n)$ telle que l'on ait $\tilde{f}|_{\bar{\Omega}} = f$; ainsi $A_M(\bar{\Omega})$ peut être encore vu comme l'ensemble des fonctions f de $C_M(\mathbb{C}^n)$ telles que l'on ait $\bar{\partial} f = 0$ sur $\bar{\Omega}$. Plus généralement, si K est un compact de $\mathbb{C}^n$, on notera $A_M(K)$ l'ensemble des fonctions f de $C_M(\mathbb{C}^n)$ telles que $\bar{\partial} f$ s'annule à l'ordre infini sur K (compte tenu des théorèmes d'extension de [B], [CC1], cette notion coïncide avec celle de jet $\bar{\partial}$-plat de classe C_M sur K).

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de germes de fonctions sur $\bar{\Omega}$. On désigne par $\mathcal{F}^{(p,q)}$ le faisceau des germes de (p,q)-formes différentielles à coefficients dans $\mathcal{F}$, par $\Gamma(\bar{\Omega}, \mathcal{F})$ l'espace des sections de $\mathcal{F}$ et par $\mathcal{F}_\zeta$ la fibre de $\mathcal{F}$ en un point ζ de $\bar{\Omega}$. On note C_M (resp. A_M) le faisceau sur $\bar{\Omega}$ des germes de fonctions de $C_M(\bar{\Omega})$ (resp. $A_M(\bar{\Omega})$) et $\mathcal{O}$ le faisceau usuel sur $\mathbb{C}^n$ des germes holomorphes. On identifie $\Gamma(\bar{\Omega}, C_M)$ et $C_M(\bar{\Omega})$ (resp. $\Gamma(\bar{\Omega}, A_M)$ et $A_M(\bar{\Omega})$).

On remarquera que toutes les notions précédentes ne dépendent que de la classe de M *modulo* $\sim$.

Définition 2.3 [CC2]. Un compact K de $\mathbb{C}^n$ est dit *1-H-convexe* s'il existe une constante c, avec $0 < c < 1$, telle que pour tout réel $\delta > 0$, assez petit, on puisse trouver un ouvert Ω_δ pseudoconvexe satisfaisant

$$\{z : d(z,K) < c\delta\} \subset \Omega_\delta \subset \{z : d(z,K) < \delta\}.$$

Exemples.

(i) Si Ω est un ouvert borné à bord C^2 strictement pseudoconvexe, ou plus généralement C^1 à fonction définissante plurisousharmonique, alors $\bar{\Omega}$ est 1-H-convexe.

(ii) L'adhérence de tout ouvert Ω borné pseudoconvexe à bord C^1 est localement 1-H-convexe, en ce sens que chaque point de $\bar{\Omega}$ possède une base de voisinages relatifs à $\bar{\Omega}$ d'adhérences 1-H-convexes.

Dans [CC2], l'équation $\bar{\partial}$ est résolue dans les classes de jets Gevrey d'un compact 1-H-convexe. La démonstration s'adapte sans problème à toute classe de Carleman associée à une suite fortement régulière. Compte tenu de l'exemple (ii) qui précède, on obtient le résultat local suivant :

Proposition 2.4 [CC2]. *Soient M une suite fortement régulière et Ω un ouvert borné pseudoconvexe à bord C^1 dans $\mathbb{C}^n$. Avec les notations de* 2.1, *on a l'exactitude du complexe*

$$0 \longrightarrow A_M \longrightarrow C_M \xrightarrow{\ \bar{\partial}\ } C_M^{(0,1)} \xrightarrow{\ \bar{\partial}\ } \dots \xrightarrow{\ \bar{\partial}\ } C_M^{(0,n)} \longrightarrow 0.$$

Il en résulte classiquement ([G], D5 et D8) que l'on a $H^q(\bar{\Omega}, A_M) = H^q_{\bar{\partial}}(\Gamma(\bar{\Omega}, C_M^{(0,*)}))$ pour $q \geq 1$. En appliquant de nouveau [CC2], on en déduit le résultat global :

Proposition 2.5 [CC2]. *Soient M une suite fortement régulière et Ω un ouvert borné pseudoconvexe à bord C^1 dans $\mathbb{C}^n$, dont l'adhérence est 1-H-convexe. On a alors*

$$H^q(\bar{\Omega}, A_M) = 0 \quad \textit{pour} \quad q \geq 1.$$

3. Énoncé des résultats

3.1. *Hypothèses.* On considère un ouvert Ω pseudoconvexe borné dans $\mathbb{C}^n$, à bord de classe C^1. On suppose en outre, *dans tout ce qui suit*, que l'on a

$$H^q(\bar{\Omega}, A_M) = 0 \quad \text{pour} \quad q \geq 1.$$

D'après 2.5, ceci est par exemple vrai dès que $\bar{\Omega}$ est 1-H-convexe.

On donne θ une fonction fortement admissible et M une suite fortement régulière.

Soient p un entier avec $1 \leq p \leq n-1$ et $v_1, \ldots, v_p$ des fonctions de $A_M(\bar{\Omega})$, prolongées en éléments de $C_M(\mathbb{C}^n)$ (voir 2.2). On pose

$$\tilde{X} = \{z \in \mathbb{C}^n : v_1(z) = \ldots = v_p(z) = 0\} \quad \text{et} \quad X = \tilde{X} \cap \bar{\Omega}.$$

On suppose que $\tilde{X}$ rencontre $\partial\Omega$; en particulier on a $X \neq \emptyset$.

On note enfin $(v_1, \ldots, v_p)C_M(\bar{\Omega})$ (resp. $(v_1, \ldots, v_p)A_M(\bar{\Omega})$) l'idéal engendré par les v_j sur $C_M(\bar{\Omega})$ (resp. $A_M(\bar{\Omega})$).

On considère la liste d'hypothèses suivante. Ces hypothèses serviront à tour de rôle dans les différents résultats établis.

($\mathcal{H}_1$) Les v_j appartiennent à $A_M(\bar{\Omega})$.

($\mathcal{H}_2$) Les v_j appartiennent à $A_{M^-}(\bar{\Omega})$.

($\mathcal{H}_3$) On a $\partial v_1 \wedge \ldots \wedge \partial v_p \neq 0$ sur $X \cap \partial\Omega$.

($\mathcal{H}_4$) Les ensembles $\overline{\tilde{X} \backslash \bar{\Omega}}$ et $\bar{\Omega}$ sont θ-situés.

($\mathcal{H}_5$) L'intérieur de X relatif à $\tilde{X}$ est dense dans X.

On a alors les énoncés ci-dessous. Les preuves feront l'objet des § 4 et § 5 de ce travail.

Théorème 3.2. *Sous les hypothèses ($\mathcal{H}_1$) et ($\mathcal{H}_3$), on a*

$$A_M(\bar{\Omega}) \cap (v_1, \ldots, v_p)C_M(\bar{\Omega}) = (v_1, \ldots, v_p)A_M(\bar{\Omega}).$$

Théorème 3.3 (division). *Sous les hypothèses ($\mathcal{H}_2$), ($\mathcal{H}_3$), ($\mathcal{H}_4$), ($\mathcal{H}_5$), soit f une fonction de $A_{M^-}(\bar{\Omega})$ telle que l'on ait $f|_X = 0$. Alors f appartient à $(v_1, \ldots, v_p)A_M(\bar{\Omega})$.*

Théorème 3.4 (extension). *Sous les hypothèses ($\mathcal{H}_2$), ($\mathcal{H}_3$), ($\mathcal{H}_4$), soit f une fonction de $A_{M^-}(X)$. Alors il existe une fonction g de $A_M(\bar{\Omega})$ telle que l'on ait $g|_X = f$.*

3.5. *Remarques sur les hypothèses ($\mathcal{H}_j$)*

(i) Les conditions ($\mathcal{H}_1$) ou ($\mathcal{H}_2$) sont vérifiées automatiquement lorsque les v_j sont des fonctions holomorphes au voisinage de $\bar{\Omega}$.

(ii) À l'aide des propriétés des fonctions admissibles, on peut s'assurer, en s'inspirant du § 0 de [A2], que ($\mathcal{H}_4$) ne dépend pas du choix du prolongement à $\mathbb{C}^n$ des v_j.

(iii) Lorsque l'ordre de contact entre $\tilde{X}$ et $\partial\Omega$ en chaque point ζ de $\tilde{X} \cap \partial\Omega$ est au plus égal à m ($m \in \mathbb{N}^*$), c'est à dire lorsque l'on a $\liminf_{z \longrightarrow \zeta,\ z \in \tilde{X}} |z-\zeta|^{-m} d(z,\partial\Omega) > 0$, il est facile de vérifier que $(\mathcal{H}_4)$ est satisfaite avec $\theta(t) = t^m$. La réciproque est fausse excepté dans le cas $m = 1$, $\theta = \mathrm{id}$, où $(\mathcal{H}_4)$ a lieu si et seulement si X est transverse à $\partial\Omega$.

(iv) Dans le cas où X est transverse à $\partial\Omega$, la condition $(\mathcal{H}_5)$ est automatiquement vérifiée.

3.6. *Remarques sur les conclusions des théorèmes* 3.2, 3.3, 3.4.

(i) Lorsque X est transverse à $\partial\Omega$, les théorèmes 3.3 et 3.4 sont sans perte de régularité puisque l'on a alors $\theta = \mathrm{id}$, $M = M^-$.

(ii) Lorsque les v_j sont holomorphes au voisinage de $\bar{\Omega}$, la conclusion de 3.2 est à comparer à celle du théorème établi par A. Nagel pour $A^\infty(\bar{\Omega})$ ([N], théorème 3.2). Le théorème de Nagel ne requiert cependant pas l'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$.

4. Résultats locaux

4.1. *Notation.* On note $\mathcal{I} := (v_1, \ldots, v_p)A_M$ et $\mathcal{J} := (v_1, \ldots, v_p)C_M$ les faisceaux engendrés respectivement sur A_M et C_M par les v_j. Comme conséquence de l'existence de partitions de l'unité de classe C_M, on a évidemment

$$\Gamma(\bar{\Omega}, \mathcal{J}) = (v_1, \ldots, v_p)C_M(\bar{\Omega}). \tag{4.1.1}$$

4.2. *Coordonnées locales.* L'hypothèse $(\mathcal{H}_3)$ implique que $\tilde{X}$ est une variété lisse au voisinage de $\partial\Omega$ et pour tout point ζ de $X \cap \partial\Omega$, il existe un voisinage U de ζ et un $(n-p)$-uple u de fonctions sur U telles que $(u, v) := (u_1, \ldots, u_{n-p}, v_1, \ldots, v_p)$ forme un système de coordonnées d'origine ζ, appartenant à la classe C_{M^-} lorsque $(\mathcal{H}_2)$ est vérifiée, C_M dans le cas général $(\mathcal{H}_1)$, et holomorphes dans $\Omega \cap U$ (voir [D] pour la version C_M du théorème des fonctions implicites utilisée ici).

Soit r une fonction définissante pour Ω. On pourra, quitte à renuméroter les v_j, supposer que l'on a $\partial r \wedge \partial v_2 \wedge \ldots \wedge \partial v_p \neq 0$ dans U, c'est à dire que $v_2, \ldots, v_p$ sont des coordonnées tangentielles (lorsque la coordonnée v_1 est aussi tangentielle, $\tilde{X}$ est transverse à $\partial\Omega$ au voisinage de ζ).

Pour $j = 0, \ldots, p$, on notera $X_j = \{(u, v) \in \mathbb{C}^n : v_{j+1} = \ldots = v_p = 0\}$ (on a $X_0 = \tilde{X}$ et $X_p = \mathbb{C}^n$). Pour toute partie Y de $\mathbb{C}^n$, on pourra identifier $X_j \cap Y$ avec sa projection sur $\mathbb{C}^{n-p+j}$.

Dans toute la suite, on utilisera sans le mentionner la stabilité de la régularité Carleman par composition (donc par passage aux coordonnées (u, v)), voir [D].

Proposition 4.3 (extension locale). *On se place dans les hypothèses $(\mathcal{H}_2)$, $(\mathcal{H}_3)$, $(\mathcal{H}_4)$. Soient ζ un point de $X \cap \partial\Omega$ et f un germe en ζ de fonction de $A_{M^-}(X)$, c'est-à-dire un germe de $C_{M^-,\zeta}$ qui est $\bar{\partial}$-plat sur X. Alors il existe un germe g dans $A_{M,\zeta}$ tel que l'on ait $g|_{\tilde{X}} = f$.*

Dans cet énoncé et les suivants, les conditions de restriction ou de $\bar{\partial}$-platitude sont bien sûr sous-entendues au voisinage de ζ. Ici, le fait que g coïncide avec f non seulement sur X, mais même sur $\tilde{X}$ (les germes étant prolongés au voisinage de ζ), jouera un rôle important en 5.5.

P r e u v e. On suit la ligne directrice du théorème 2.1 de [A1] en contrôlant précisément les pertes de régularité. On utilise les coordonnées locales (u, v) dans un voisinage U de ζ. D'après 2.2, on peut étendre le germe f en une fonction de $C_{M^-}(\mathbb{C}^n)$, que l'on notera encore f. Pour $u \in \mathbb{C}^{n-p}$, on pose $g_0(u) = f(u, 0, \ldots, 0)$ et on considère l'extension triviale de g_0 à $\mathbb{C}^{n-p+1}$, donnée par

$$f_1(u, v_1) = g_0(u),$$

de sorte que l'on a $f_1 \in C_{M^-}(\mathbb{C}^{n-p+1})$,

$$f_1 \,|_{\tilde{X} \cap U} = f \tag{4.3.1}$$

et enfin, par hypothèse sur f,

$$\bar{\partial} f_1 \quad \text{est plat sur} \quad X \cap U. \tag{4.3.2}$$

À partir de $(\mathcal{H}_4)$ et des définitions, il est facile de vérifier que $\overline{\tilde{X} \backslash (X_1 \cap \bar{\Omega})}$ et $X_1 \cap \bar{\Omega}$ sont θ-situés au voisinage de 0 dans $\mathbb{C}^{n-p+1}$. Compte tenu de (4.3.2), de 1.6–1.8 et du théorème 2.4 de [Th1], il existe une $(0, 1)$-forme ω_1 de classe C_M dans $\mathbb{C}^{n-p+1}$ telle que l'on ait, quitte à rétrécir U,

$$\omega_1 = \bar{\partial} f_1 \quad \text{dans} \quad X_1 \cap \bar{\Omega} \cap U, \tag{4.3.3}$$

$$\omega_1 \quad \text{est plate sur} \quad \tilde{X} \cap U. \tag{4.3.4}$$

De (4.3.4), on déduit que l'on a, pour tout multi-indice J, tout entier k et tout (u, v_1) de $X_1 \cap U$,

$$|D^J \omega_1(u, v_1)| \le C^{j+k+1} (j + k)! M_{j+k} |v_1|^k / k!, \tag{4.3.5}$$

où C est une constante convenable. On considère alors la $(0, 1)$-forme $\eta_1 := v_1^{-1} \omega_1$, qui est de classe C^∞ sur $(X_1 \backslash \tilde{X}) \cap U$. Pour tout multi-indice L, on développe $D^L \eta_1$ à l'aide de la formule de Leibniz et on estime chaque terme $(D^I v_1^{-1})(D^J \omega_1)$ apparaissant dans le développement avec $I + J = L$, en utilisant (4.3.5) avec $k = i + 2$. Compte tenu de l'estimation triviale $|D^I v_1^{-1}| \le i! \, |v_1|^{-(i+1)}$ et de la propriété (1.1.2) des suites fortement régulières, on obtient sans difficulté

$$|D^L \eta_1(u, v_1)| \le C^{l+1} l! M_l \, |v_1| \tag{4.3.6}$$

pour tout (u, v_1) de $(X_1 \backslash \tilde{X}) \cap U$, quitte à augmenter C.

Il s'ensuit que η_1 se prolonge en une $(0, 1)$-forme de classe C_M sur X_1, plate sur $\tilde{X} \cap U$. Par (4.3.3), on a aussi $\bar{\partial} \eta_1 = 0$ sur $X_1 \cap \bar{\Omega} \cap U$.

On remarque maintenant que $X_1 \cap \Omega \cap U$ s'identifie à un ouvert de $\mathbb{C}^{n-p+1}$ à bord de classe C^1, pseudoconvexe, au voisinage de 0 : c'est une conséquence immédiate du fait que les coordonnées v_j sont tangentielles pour $j \ge 2$. On peut appliquer à cet ouvert la proposition 2.4. Quitte à restreindre U, il existe donc une fonction h_1 de classe C_M satisfaisant $\bar{\partial} h_1 = \eta_1$ dans $X_1 \cap \bar{\Omega} \cap U$. D'après 2.2, h_1 peut évidemment être supposée de classe C_M à support compact dans $\mathbb{C}^{n-p+1}$.

On pose alors $g_1 = f_1 - v_1 h_1$. Clairement, g_1 est de classe C_M dans $\mathbb{C}^{n-p+1}$, on a $\bar{\partial} g_1 = 0$ sur $X_1 \cap \bar{\Omega} \cap U$ et $g_1 \,|_{\tilde{X} \cap U} = f_1 \,|_{\tilde{X} \cap U} = f$ compte tenu de (4.3.1).

En particulier, pour $p = 1$, le germe de g_1 en ζ réalise l'extension souhaitée.

Pour $p \geq 2$, on considère f_2 définie par extension triviale de g_1 à $\mathbb{C}^{n-p+2}$, c'est-à-dire par

$$f_2(u, v_1, v_2) = g_1(u, v_1).$$

La fonction f_2 est de classe C_M sur $\mathbb{C}^{n-p+2}$ et on a manifestement

$$f_2\,|_{\tilde{X} \cap U} = f. \tag{4.3.7}$$

On a enfin

$$f_2 \quad \text{est } \bar{\partial}\text{-plate sur} \quad X_1 \cap \bar{\Omega} \cap U. \tag{4.3.8}$$

Par ailleurs, la coordonnée v_2 est tangentielle, donc X_1 et $X_2 \cap \partial\Omega$ sont transverses, et les ensembles $\overline{X_1 \backslash (X_2 \cap \bar{\Omega})}$ et $X_2 \cap \bar{\Omega}$ sont *id*-situés, au voisinage de 0. En utilisant encore [Th1], théorème 2.4, et (4.3.8), il existe une $(0,1)$-forme ω_2 de classe C_M (comme f_2) dans $\mathbb{C}^{n-p+2}$ telle que l'on ait

$$\omega_2 = \bar{\partial} f_2 \quad \text{dans} \quad X_2 \cap \bar{\Omega} \cap U,$$
$$\omega_2 \quad \text{est plate sur} \quad X_1 \cap U,$$

quitte à réduire U.

De là, on montre comme précédemment que $\eta_2 := v_2^{-1}\omega_2$ est de classe C_M dans X_2, plate sur X_1 ; on résoud $\bar{\partial} h_2 = \eta_2$ dans $X_2 \cap \Omega \cap U$ et on pose $g_2 = f_2 - v_2 h_2$. Dans le cas $p = 2$, compte tenu de (4.3.7), le germe de g_2 en ζ réalise l'extension annoncée.

Pour $p \geq 3$, on itère la construction précédente en remarquant que, puisque les coordonnées $v_3, \ldots, v_p$ sont tangentielles, les ensembles X_j et $X_{j+1} \cap \partial\Omega$ seront, à chaque fois, transverses au voisinage de 0 : on conservera donc la régularité C_M à chaque étape, contrairement à ce qui se passait dans la construction de g_1 (passage de C_{M^-} à C_M). ■

Proposition 4.4 (division locale). *On se place dans les hypothèses* $(\mathcal{H}_2)$, $(\mathcal{H}_3)$, $(\mathcal{H}_4)$ *et* $(\mathcal{H}_5)$. *Soit ζ un point de $X \cap \partial\Omega$ et soit f un germe de $A_{M^-,\zeta}$ tel que l'on ait $f\,|_X = 0$. Alors f appartient à $\mathcal{I}_\zeta$.*

Preuve. Il s'agit de trouver des germes $g_1, \ldots, g_p$ dans $A_{M,\zeta}$ tels que l'on ait

$$f = v_1 g_1 + \ldots + v_p g_p.$$

Dans les coordonnées locales (u, v), le germe f étant supposé prolongé en une fonction de classe C_{M^-} sur $\mathbb{C}^n$ comme indiqué en 2.2, on a $f(u, 0) = 0$ pour $(u, 0) \in X \cap U$. D'après $(\mathcal{H}_5)$, il en résulte que toutes les dérivées de $u \longrightarrow f(u, 0)$ sont également nulles pour $(u, 0) \in X \cap U$. Aussi, si on pose $\varphi_1(u, v) = f(u, v_1, 0, \ldots, 0)$ et $\tilde{\varphi}_1(u, v_1) = \varphi_1(u, v_1) - f(u, 0)$, les jets de classe C_{M^-} induits par φ_1 sur $E_1 := X_1 \cap \bar{\Omega} \cap U$ (resp. $\tilde{\varphi}_1$ sur $E_2 := (\overline{\tilde{X} \backslash (X_1 \cap \bar{\Omega})}) \cap U$) coïncident sur $E_1 \cap E_2$ (on a $E_1 \cap E_2 \subset X$). En appliquant, compte tenu de $(\mathcal{H}_4)$ et de 1.6–1.8, le théorème 2.4 de [Th1], on obtient une fonction F_1 de $C_M(\mathbb{C}^{n-p+1})$ qui coïncide avec φ_1 sur E_1 (resp. $\tilde{\varphi}_1$ sur E_2), quitte à rétrécir U. On en déduit en particulier

$$F_1\,\big|_{X_1 \cap \bar{\Omega} \cap U} = f \tag{4.4.1}$$

ainsi que

$$F_1\,|_{\tilde{X} \cap U} = 0, \tag{4.4.2}$$

c'est à dire $F_1(u,0)=0$ pour u voisin de 0 dans $\mathbb{C}^{n-p}$. Par suite, quitte à réduire U, on a, pour tout (u,v_1) de $X_1\cap U$,

$$F_1(u,v_1)=v_1G_1(u,v_1)+\bar{v}_1H_1(u,v_1) \tag{4.4.3}$$

avec

$$G_1(u,v_1)=\int_0^1\frac{\partial F_1}{\partial v_1}(u,tv_1)dt \quad \text{et} \quad H_1(u,v_1)=\int_0^1\frac{\partial F_1}{\partial \bar{v}_1}(u,tv_1)dt. \tag{4.4.4}$$

Pour $(u,v_1)\in X_1\cap U$, si on pose $f_1(u,v_1)=v_1^{-1}F_1(u,v_1)$, on a

$$f_1(u,v_1)=G_1(u,v_1)+I_1(u,v_1) \tag{4.4.5}$$

avec $I_1(u,v_1)=v_1^{-1}K_1(u,v_1)$ et $K_1(u,v_1)=\bar{v}_1H_1(u,v_1)$. On a vu dans la preuve de 4.3 que $X_1\cap\Omega$ s'identifie à un ouvert de $\mathbb{C}^{n-p+1}$, pseudoconvexe à bord C^1 au voisinage de 0. On va montrer que f_1 définit une fonction de classe A_M dans cet ouvert. Pour cela, on étudie séparément les termes I_1, puis G_1, de (4.4.5).

Pour tout multi-indice L et tout (u,v_1) de $X_1\cap U$, on a d'abord, par (4.4.4), la majoration $|D^LH_1(u,v_1)|\le \operatorname*{Sup}_{0\le t\le 1}|(D^L\frac{\partial F_1}{\partial\bar{v}_1})(u,tv_1)|$. Or, d'après (4.4.1) et l'holomorphie de f, la fonction $\partial F_1/\partial\bar{v}_1$ est plate sur $X_1\cap\bar{\Omega}\cap U$. On en déduit aisément

$$|D^LH_1(u,v_1)|\le \operatorname*{Sup}_{0\le t\le 1}\left(C^{l+k+1}(l+k)!M_{l+k}\operatorname{dist}((u,tv_1),X_1\cap\bar{\Omega}\cap U)^k/k!\right), \tag{4.4.6}$$

pour tout multi-indice L, tout entier k et tout (u,v_1) de $X_1\cap\bar{\Omega}\cap U$, C désignant une constante convenable. Or, pour $(u,v_1)\in X_1\cap\bar{\Omega}\cap U$ et $t\in[0,1]$, on a $\operatorname{dist}((u,tv_1),\bar{\Omega}\cap U)\le |(u,tv_1)-(u,v_1)|\le|v_1|$. Par (4.4.6) et par définition de K_1, il vient donc

$$|D^LK_1(u,v_1)|\le C^{l+k+1}(l+k)!M_{l+k}\,|v_1|^k/k!,$$

quitte à augmenter C. De là, on tire comme dans la preuve de 4.3 (régularité de $v_1^{-1}\omega_1$ à partir de (4.3.5)) que I_1 se prolonge en une fonction de classe C_M sur $X_1\cap\bar{\Omega}\cap U$, plate sur $X\cap U$.

On vérifie ensuite sans difficulté, à partir de (4.4.1) et de l'holomorphie de f, que G_1 est de classe C_M sur $X_1\cap\bar{\Omega}\cap U$, $\bar{\partial}$-plate sur $X\cap U$.

Ainsi, f_1 est de classe C_M sur $X_1\cap\bar{\Omega}\cap U$, $\bar{\partial}$-plate sur $X\cap U$. En outre, elle est clairement holomorphe sur $(X_1\backslash\tilde{X})\cap\Omega\cap U$, où elle coïncide avec $v_1^{-1}f$. On en déduit bien le résultat annoncé précédemment.

À présent, comme X_1 est transverse à $\partial\Omega$, il existe, d'après 4.3 et quitte à réduire encore U, une fonction g_1 de classe A_M dans $\Omega\cap U$ et satisfaisant $g_1\left|_{X_1\cap\bar{\Omega}\cap U}\right.=f_1$. Ceci prouve la proposition pour $p=1$, puisqu'on a alors $f=v_1g_1$.

Dans le cas $p\ge 2$, on considère la fonction $f-v_1g_1$: c'est un germe de $A_{M,\zeta}$, nul sur X_1 par construction. Suivant l'idée de [A1], théorème 3.1, on répète alors la démarche précédente en construisant F_2 telle que l'on ait

$$F_2\left|_{X_2\cap\bar{\Omega}\cap U}\right.=f-v_1g_1,\qquad F_2\left|_{X_1\cap U}\right.=0,$$

de façon à construire g_2 comme extension de $v_2^{-1}F_2$, et ainsi de suite. On itère ce processus en notant que les constructions successives se font maintenant sans perte de régularité puisque les X_j sont transverses à $\partial\Omega$. ∎

Les lemmes qui suivent serviront au paragraphe 5.

LEMME 4.5. *On se place dans les hypothèses* $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_3)$. *Alors la suite*

$$0 \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow \mathcal{J} \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{K} \longrightarrow 0,$$

où $\mathcal{K}$ *désigne le faisceau image de* $\mathcal{J}$ *par* $\bar\partial$, *est exacte.*

P r e u v e. Le lemme revient à montrer que si ζ est un point de $\bar\Omega$ et f un germe de la forme

$$f = v_1 f_1 + \ldots + v_p f_p \tag{4.5.1}$$

avec $f_j \in C_{M,\zeta}$ pour $j = 1, \ldots, p$, satisfaisant $\bar\partial f = 0$, alors on peut trouver des germes g_j dans $A_{M,\zeta}$ $(1 \le j \le p)$ tels que l'on ait $f = v_1 g_1 + \ldots + v_p g_p$.

Lorsque ζ est un point de $\bar\Omega \backslash X$, il existe un indice i tel que v_i ne s'annule pas au voisinage de ζ. Le germe de v_i en ζ est alors inversible dans $A_{M,\zeta}$ (voir par exemple [D]) et on a $f = v_i g_i$ où $g_i := f_i + v_i^{-1} \sum_{j \neq i} v_j f_j$ a les propriétés requises.

Lorsque ζ est un point de $X \cap \Omega$, on remarque d'abord que l'on a $A_{M,\zeta} = \mathcal{O}_\zeta$ et $C_{M,\zeta} \subset C^\infty_\zeta$: la propriété résulte alors de la $\mathcal{O}$-platitude de C^∞, voir [M].

Lorsque ζ est un point de $X \cap \partial\Omega$, on peut supposer que f_1 est de classe C_M sur $\mathbb{C}^n$ et on pose, dans les coordonnées locales (u, v),

$$\tilde f_1(u, v) = f_1(u, v_1, 0, \ldots, 0). \tag{4.5.2}$$

Par (4.5.1), on a donc $v_1 \tilde f_1(u, v_1, 0, \ldots, 0) = f(u, v_1, 0, \ldots, 0)$ pour $(u, v_1) \in X_1 \cap \Omega \cap U$. On sait que $X_1 \cap \Omega \cap U$ s'identifie à un ouvert de $\mathbb{C}^{n-p+1}$ et il résulte alors de cette égalité que $\tilde f_1$ est $\bar\partial$-plate sur $X_1 \cap \Omega \cap U$.

En appliquant la proposition 4.3 à Ω, X_1, $\tilde f_1$, *donc dans le cas transverse* (sans perte de régularité), on obtient un germe g_1 de $A_{M,\zeta}$ tel que l'on ait $g_1 |_{X_1 \cap \Omega \cap U} = \tilde f_1$, quitte à rétrécir U.

On considère alors, pour $(u, v) \in \Omega \cap U$, la fonction $h(u, v) := f(u, v) - v_1 g_1(u, v)$. Elle définit un germe de $A_{M,\zeta}$ et s'annule sur X_1 par construction de g_1. L'application à Ω, X_1 et h de la proposition 4.4, *encore une fois dans le cas transverse*, assure que l'on a $h(u, v) = \sum_{j=2}^p v_j g_j(u, v)$ où les g_j sont des germes de $A_{M,\zeta}$. Ceci prouve le lemme. ∎

LEMME 4.6. *On se place dans les hypothèses* $(\mathcal{H}_1)$, $(\mathcal{H}_3)$. *Soient* ζ *un point de* X *et* f *un germe de* $A_{M,\zeta}$ *tel que l'on ait* $f |_{\tilde X} = 0$. *Alors* f *appartient à* $\mathcal{I}_\zeta$.

P r e u v e. Lorsque ζ est un point de $X \cap \Omega$ vérifiant $\partial v_1 \wedge \ldots \wedge \partial v_p(\zeta) \neq 0$, le résultat est standard puisque l'on a un système de coordonnées holomorphes $(u_1, \ldots, u_{n-p}, v_1, \ldots, v_p)$ au voisinage de ζ. Les points ζ de $X \cap \Omega$ tels que l'on ait $\partial v_1 \wedge \ldots \wedge \partial v_p(\zeta) = 0$ sont en nombre fini en vertu de $(\mathcal{H}_3)$ et de propriétés élémentaires des ensembles analytiques. On règle le cas de ces points *via* la proposition 5.8 de [GS], par exemple. Enfin, lorsque ζ est un point de $X \cap \partial\Omega$, on pose $F_1(u, v_1) = f(u, v_1, 0, \ldots, 0)$. De là, on peut reprendre directement la preuve de 4.4 à partir de (4.4.1)–(4.4.2), puisque f est maintenant supposée d'emblée nulle sur $\tilde X$ et non seulement sur X comme dans 4.4. ∎

5. Globalisation. On considère les faisceaux $\mathcal{I}$ et $\mathcal{J}$ définis en 4.1 et on note $\mathcal{R}$ le faisceau des relations des v_j sur A_M.

LEMME 5.1. *Sous les hypothèses* $(\mathcal{H}_1)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$, *on a* $H^q(\bar\Omega, \mathcal{I}) = 0$ *et* $H^q(\bar\Omega, \mathcal{R}) = 0$ *pour* $q \geq 1$.

P r e u v e. Comme dans [A1] ou [GS], il s'agit de vérifier une propriété de cohérence globale. Soient $e_1, \ldots, e_p$ les sections canoniques de $A_M^p := \Lambda^1 A_M^p$. On considère le complexe de Koszul

$$(5.1.1) \qquad 0 \longrightarrow \Lambda^p A_M^p \xrightarrow{\sigma_p} \Lambda^{p-1} A_M^p \longrightarrow \ldots \longrightarrow \Lambda^1 A_M^p \xrightarrow{\sigma_1} \mathcal{I} \longrightarrow 0,$$

où les $\sigma_k : \Lambda^k A_M^p \longrightarrow \Lambda^{k-1} A_M^p$ sont définis récursivement par $\sigma_1(e_j) = v_j$ pour $1 \leq j \leq p$ et $\sigma_k(e^I \wedge e_j) = v_j e^I - \sigma_{k-1}(e^I) \wedge e_j$ pour $2 \leq k \leq p$, $I = (i_1, \ldots, i_{k-1})$ avec $1 \leq i_1 < \ldots \ldots < i_{k-1} < j \leq p$ et $e^I = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{k-1}}$. On justifie d'abord que le complexe (5.1.1) est exact en tout point ζ de $V \cap \bar\Omega$, où V est un voisinage convenable de $\partial\Omega$. Pour cela, il suffit de choisir V tel que l'on ait $\partial v_1 \wedge \ldots \wedge \partial v_p \neq 0$ sur $X \cap V$: en effet, pour $\zeta \in X \cap V \cap \Omega$, le résultat est standard comme conséquence du fait que $A_{M,\zeta}$ coïncide avec $\mathcal{O}_\zeta$ et que $(u_1, \ldots, u_{n-p}, v_1, \ldots, v_p)$ est un système de coordonnées holomorphes au voisinage de ζ. Dans le cas d'un point ζ de $X \cap \partial\Omega$, on reprend la preuve d'E. Amar [A1] dans le cadre A_M au lieu de A^∞, et en s'assurant que la propriété d'extension locale 4.3, utilisée au lieu du théorème 2.1 de [A1], n'intervient que dans le cas transverse, donc sans perte de régularité. Enfin, lorsque ζ est dans $\bar\Omega \cap V \backslash X$, on conclut également comme [A1], en utilisant que l'une des v_i ne s'annule pas au voisinage de ζ et est donc une unité dans $A_{M,\zeta}$.

Comme conséquence, (5.1.1) est une résolution libre de $\mathcal{I}$, globale sur $V \cap \bar\Omega$.

Par ailleurs, il est classique que $\mathcal{I}|_\Omega$ est $\mathcal{O}$-cohérent et

$$(5.1.2) \qquad H^q(\Omega, \mathcal{I}) = 0 \quad \text{pour} \quad q \geq 1.$$

On conclut alors que l'on a $H^q(\bar\Omega, \mathcal{I}) = 0$ en appliquant la proposition 6.1 de [GS] avec $X = \bar\Omega$, $O = \Omega$, $A = A_M$, $\mathcal{F} = \mathcal{I}$, compte tenu de (5.1.2) et de l'hypothèse $H^q(\bar\Omega, A_M) = 0$ pour $q \geq 1$.

Les arguments précédents permettent également d'établir $H^q(\bar\Omega, \mathcal{R}) = 0$, puisque $\mathcal{R}$ est par définition le noyau de σ_1. ∎

LEMME 5.2. *Sous les hypothèses* $(\mathcal{H}_1)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$, *on a* $\Gamma(\bar\Omega, \mathcal{I}) = (v_1, \ldots, v_p) A_M(\bar\Omega)$.

P r e u v e. En reprenant les notations de la preuve de 5.1, la suite

$$0 \longrightarrow \mathcal{R} \longrightarrow A_M^p \xrightarrow{\sigma_1} \mathcal{I} \longrightarrow 0$$

est exacte. Compte tenu de l'annulation de $H^1(\bar\Omega, \mathcal{R})$ en 5.1, on en déduit l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma(\bar\Omega, \mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\bar\Omega, A_M^p) \xrightarrow{\sigma_1^*} \Gamma(\bar\Omega, \mathcal{I}) \longrightarrow 0$$

avec $\sigma_1^*(f_1, \ldots, f_p) = \sum_{j=1}^p v_j f_j$ ([G], D2). Le résultat s'ensuit. ∎

LEMME 5.3. *Sous les hypothèses* $(\mathcal{H}_1)$ *et* $(\mathcal{H}_3)$, *soit* f *un élément de* $\Gamma(\bar\Omega, \mathcal{J})$ *tel que l'on ait* $\bar\partial f = 0$. *Alors* f *appartient à* $\Gamma(\bar\Omega, \mathcal{I})$.

P r e u v e. L'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma(\bar{\Omega}, \mathcal{I}) \longrightarrow \Gamma(\bar{\Omega}, \mathcal{J}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Gamma(\bar{\Omega}, \mathcal{K})$$

résulte aussitôt ([G], A10) du lemme 4.5. ■

5.4. *Preuve du théorème* 3.2. Immédiate par 5.2, 5.3 et (4.1.1). ■

5.5. *Preuve du théorème* 3.3. Pour tout point ζ de $\bar{\Omega}$, il existe un voisinage U_ζ de ζ dans $\mathbb{C}^n$ et des germes g_j^ζ de $A_{M,\zeta}$ tels que l'on ait $f = \sum_{j=1}^{p} v_j g_j^\zeta$ dans U_ζ (Pour $\zeta \in X \cap \partial\Omega$, c'est la proposition 4.4, pour $\zeta \in X \cap \Omega$ le résultat s'obtient en invoquant les mêmes arguments que dans la preuve de 4.6, enfin pour $\zeta \in \bar{\Omega} \backslash X$, c'est encore une conséquence de l'inversibilité de l'un des v_j dans $A_{M,\zeta}$). À l'aide d'une partition de l'unité de classe C_M subordonnée à un recouvrement de $\bar{\Omega}$ par un nombre fini de U_ζ, on en déduit que f est dans l'idéal $(v_1, \ldots, v_p) C_M(\bar{\Omega})$ et on conclut avec 3.2. ■

5.6. *Preuve du théorème* 3.4. Par 4.3 on construit un recouvrement fini de $\bar{\Omega}$ par des ouverts U_i de $\mathbb{C}^n$ et des fonctions g_i de classe A_M sur $\bar{\Omega} \cap U_i$ satisfaisant $g_i|_{\tilde{X}} = f$. Soit ζ un point de $U_i \cap U_j$; alors $g_i - g_j$ appartient à $A_{M,\zeta}$ et s'annule sur $\tilde{X}$. D'après 4.6, on a $g_i - g_j \in \mathcal{I}_\zeta$. Ainsi les extensions locales g_i de f définissent un élément $\tilde{g}$ de $\Gamma(\bar{\Omega}, A_M/\mathcal{I})$. Par ailleurs, l'exactitude de la suite

$$0 \longrightarrow \Gamma(\bar{\Omega}, \mathcal{I}) \longrightarrow \Gamma(\bar{\Omega}, A_M) \longrightarrow \Gamma(\bar{\Omega}, A_M/\mathcal{I}) \longrightarrow 0$$

est une conséquence standard ([G], D2) de l'annulation de $H^1(\bar{\Omega}, \mathcal{I})$ en 5.1. Aussi $\tilde{g}$ se relève en un élément g de $A_M(\bar{\Omega})$ dont le germe en tout point ζ de $\bar{\Omega}$ coïncide avec celui de f *modulo* $\mathcal{I}_\zeta$, d'où l'on tire $g|_X = f$. ■

R e m a r q u e 5.7. Tous les résultats décrits dans ce travail concernent le cas où la codimension p de $\tilde{X}$ est au plus $n-1$. Pour $p = n$, $\tilde{X}$ est réduit à un point et les conclusions de 3.2, 3.3, 3.4 restent vraies sous les seules hypothèses $(\mathcal{H}_1)$ et $(\mathcal{H}_3)$, avec $M^- = M$. En effet l'extension est alors triviale, la division locale se réduit au lemme 4.6 ; enfin les lemmes 5.1 à 5.3 s'adaptent aisément, ce qui permet de globaliser.

Références

[A1] E. Amar, *Cohomologie complexe et applications*, J. London Math. Soc. (2) 29 (1984), 127–140.

[A2] E. Amar, *Non-division dans $A^\infty(\bar{\Omega})$*, Math. Z. 188 (1985), 493–511.

[DBT] P. de Bartolomeis & G. Tomassini, *Finitely generated ideals in $A^\infty(\bar{D})$*, Adv. in Math. 46 (1982), 162–170.

[BBMT] J. Bonet, R. W. Braun, R. Meise & B. A. Taylor, *Whitney's extension theorem for nonquasianalytic functions*, Studia Math. 99 (1991), 156–184.

[B] J. Bruna, *An extension theorem of Whitney type for non quasi-analytic classes of functions*, J. London Math. Soc. (2) 22 (1980), 495–505.

[CC1] J. Chaumat & A.-M. Chollet, *Théorème de Whitney dans des classes ultradifférentiables*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 315 (1992), 901–906.

[CC2] J. Chaumat & A.-M. Chollet, *Noyaux pour résoudre l'équation $\bar{\partial}$ dans des classes ultradifférentiables sur des compacts irréguliers de* $\mathbb{C}^n$, in: Several Complex Variables (Stockholm 1987/1988), Math. Notes 38, Princeton Univ. Press, Princeton, 1993, 205–226.

[D] E. M. Dynkin, *Pseudoanalytic extension of smooth functions. The uniform scale*, Amer. Math. Soc. Transl. 115 (1980), 33–58.

[GS] R. Gay & A. Sebbar, *Division et extension dans l'algèbre* $A^\infty(\bar{\Omega})$ *d'un ouvert pseudoconvexe à bord lisse de* $\mathbb{C}^n$, Math. Z. 189 (1985), 421–447.

[G] R. C. Gunning, *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, vol. III: *Homological Theory*, Wadsworth & Brooks/Cole, Monterey, 1990.

[M] B. Malgrange, *Ideals of Differentiable Functions*, Oxford University Press, Bombay, 1966.

[N] A. Nagel, *On algebras of holomorphic functions with* C^∞ *boundary values*, Duke Math. J. 41 (1974), 527–535.

[Th1] V. Thilliez, *Prolongement dans des classes ultradifférentiables et propriétés de régularité des compacts de* $\mathbb{R}^n$, Ann. Polon. Math. 63 (1996), 71–88.

[Th2] V. Thilliez, *Sur les fonctions composées ultradifférentiables*, J. Math. Pures Appl. (9) 76 (1997), 499–524.