GENERALIZATIONS OF COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 37
INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
WARSZAWA 1996

REMARQUES SUR LES IDÉAUX DE POLYNÔMES ET DE FORMES DIFFÉRENTIELLES EXTÉRIEURES I

BRUNO BIGOLIN

Università Cattolica del Sacro Cuore
via Trieste 17, I-25121 Brescia, Italia

1. Dans l'anneau gradué $A = k[x_0, \ldots, x_n]$, $A = \bigoplus_{\alpha=0}^{\infty} A_\alpha$, soit

$$I = \bigoplus_{\alpha=0}^{\infty} I_\alpha \qquad (I_\alpha = I \cap A_\alpha)$$

un idéal homogène; posons $v_I(l) = \dim_k(I_l/I_{l-1}A \cap A_\alpha)$. Indiquons avec $\mathcal{I}(l_1, \ldots, l_q; n)$, (où $l_1 = \ldots = l_{m_1} < l_{m_1+1} = \ldots = l_{m_2} < \ldots < l_{m_p+1} = \ldots = l_q$ est une suite donnée de nombres entiers positifs) la famille des idéaux homogènes I de A pour lesquels

$$v_I(l) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \le l \le l_1, \\ m_1 & \text{si } l = l_1 = \ldots = l_{m_1}, \\ 0 & \text{si } l_{m_1} < l < l_{m_1+1}, \\ m_2 - m_1 & \text{si } l = l_{m_1+1} = \ldots = l_{m_2}, \\ 0 & \text{si } l_{m_2} < l < l_{m_2+1}, \\ m_3 - m_2 & \text{si } l = l_{m_2+1} = \ldots = l_{m_3}, \\ \ldots\ldots & \\ 0 & \text{si } l_{m_p} < l < l_{m_p+1}, \\ q - m_p & \text{si } l = l_{m_p+1} = \ldots = l_q, \\ 0 & \text{si } l > l_q. \end{cases}$$

Certains polynômes homogènes,

$$(*) \qquad \left(f_1^{(l_1)}, \ldots, f_q^{(l_q)}\right)$$

forment une base de longueur minima pour un idéal I de $\mathcal{I}(l_1, \ldots, l_q; n)$ si et seulement si, $\forall \alpha = 0, 1, 2, \ldots$, $f_{m_\alpha+1}^{(l_{m_\alpha+1})}, \ldots, f_{m_{\alpha+1}}^{(l_{m_{\alpha+1}})}$ sont telles que les images correspon-

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 13A15; Secondary 58A15.

Research supported by MURST 60%.
The paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

dantes $\dot{f}^{(l_{m_\alpha+1})}_{m_\alpha+1},\ldots,\dot{f}^{(l_{m_{\alpha+1}})}_{m_{\alpha+1}}$ forment une base dans l'espace vectoriel $I_{l_{m_\alpha+1}}/I_{l_{m_\alpha+1}-1}A\cap A_{l_{m_\alpha+1}}$; donc si et seulement si, $\forall\alpha=0,1,2,\ldots$, les propriétés suivantes sont vérifiées

(I_α) ni $f^{(l_{m_\alpha+1})}_{m_\alpha+1},\ldots,f^{(l_{m_{\alpha+1}})}_{m_{\alpha+1}}$ ni aucune leur combinaison linéaire $\lambda f_{m_\alpha+1}+\ldots+\mu f_{m_{\alpha+1}}$ $(\lambda,\ldots,\mu\in k)$ ne peuvent s'exprimer comme des combinaisons linéaires, à coefficients formes homogènes de degré convenable, des

$$f^{(l_{m_\beta+1})}_{m_\beta+1},\ldots,f^{(l_{m_{\beta+1}})}_{m_{\beta+1}}\ ,\ \text{avec}\ \beta>\alpha.$$

(II_α) $f^{(l_{m_\alpha+1})}_{m_\alpha+1},\ldots,f^{(l_{m_{\alpha+1}})}_{m_{\alpha+1}}$ sont linéairement indépendantes parmi les formes de degré $l_{m_\alpha+1}=\ldots=l_{m_{\alpha+1}}$.

Si les polynômes (*) vérifient en outre la propriété

(III) pour tout degré $l_{m_\alpha+1}$ $(\alpha=0,1,2,\ldots)$, l'ensemble des polynômes de degré plus petit engendre, dans le $\mathbf{P}_{\binom{n+l_{m_\alpha+1}}{n}-1}$ des polynômes de degré $l_{m_\alpha+1}$, un sousespace de dimension maximale,

alors ils forment une base de longueur minimale d'un idéal appartenant à une sous-famille de $\mathcal{I}(l_1,\ldots,l_q;n)$, que nous indiquerons par $\mathcal{H}(l_1,\ldots,l_q;n)$; dans $\mathcal{H}(l_1,\ldots,l_q;n)$ se retrouvent tous les idéaux de classe principale.

2. Soit $N_\alpha=\binom{n+l_\alpha}{n}$ et indiquons avec A le produit d'espaces affines

$$A=A^{N_{m_1}\cdot m_1}(k)\times A^{N_{m_2}\cdot(m_2-m_1)}(k)\times\ldots\times A^{N_q\cdot(q-m_p)}(k).$$

Proposition 1. *L'ensemble des* $(f)=\begin{pmatrix}f_1^{(l_1)}\\ \vdots\\ f_q^{(l_q)}\end{pmatrix}$ *de* A *tels que*, $\forall\alpha$, *les propriétés* (I_α) *et* (II_α) *soient vérifiées*, *est un ouvert de Zariski* $\Omega\subset A$. *L'ensemble des* (f) *tels que*, *en outre*, *soit vérifiée la propriété* (III), *est un ouvert de Zariski* $\Omega'\subset\Omega\subset A$.

Deux systèmes de polynômes $(f)=\begin{pmatrix}f_1^{(l_1)}\\ \vdots\\ f_q^{(l_q)}\end{pmatrix}$ et $(g)=\begin{pmatrix}g_1^{(l_1)}\\ \vdots\\ g_q^{(l_q)}\end{pmatrix}$, (f) et $(g)\in\Omega$, individuent le même élément de $\mathcal{I}(l_1,\ldots,l_q;n)$ si et seulement si $(g)=\Phi\cdot(f)$, où $\Phi=\|\zeta^{(h)}_{ij}\|_{1<i,j<q}$ est une matrice de type $q\times q$, dont les éléments $\zeta^{(h)}_{ij}$ sont (i) formes homogènes en $(x_0,\ldots,x_n)$, de degré h (éventuellement $h=0$) donné par le tableau ci-dessous, pour les valeurs i et j

$$h=\begin{cases}0, & \text{si } 1\le i,j\le m_1,\\ l_{m_\beta}-l_{m_1},\quad(2\le\beta\le p), & \text{si }\begin{cases}m_{\beta-1}+1\le i\le m_\beta,\\ 1\le j\le m_1,\end{cases}\\ l_{m_\beta}-l_{m_\alpha},\quad(2\le\alpha\le\beta\le p), & \text{si }\begin{cases}m_{\beta-1}+1\le i\le m_\beta,\\ m_{\alpha-1}+1\le j\le m_\alpha,\end{cases}\\ \begin{cases}l_q-l_{m_1}, & \text{si }\begin{cases}m_p+1\le i\le q,\\ 1\le j\le m_1,\end{cases}\\ l_q-l_{m_2}, & \text{si }\begin{cases}m_p+1\le i\le q,\\ m_1+1\le j\le m_2,\end{cases}\\ \cdots\cdots & \\ 0, & \text{si } m_p+1\le i,j\le q,\end{cases} & \end{cases}$$

indiquées dans le tableau, et vérifiant en outre les conditions

$$\det \|\zeta_{ij}^{(0)}\|_{1\le i,j\le m_1} \neq 0, \quad \det \|\zeta_{ij}^{(0)}\|_{m_1+1\le i,j\le m_2} \neq 0, \dots$$
$$\det \|\zeta_{ij}^{(0)}\|_{m_p+1\le i,j\le q} \neq 0;$$

(ii) $\zeta_{ij}^{(h)} = 0$, pour toutes les i, j différentes de celles du tableau.

Les matrices de ce type forment un groupe G; l'application $(\Phi, (f)) \longrightarrow (g) = \Phi \cdot (f)$ définit une opération de G dans le produit

$$A = A^{N_{m_1}\cdot m_1}(k) \times A^{N_{m_2}\cdot(m_2-m_1)}(k) \times \dots \times A^{N_q\cdot(q-m_p)}(k) \;\;;$$

l'ensemble quotient Ω/G est en correspondance biunivoque avec $\mathcal{I}(l_1,\dots,l_q;n)$.

De même: deux systèmes de polynômes (f) et $(g) \in \Omega'$ individuent le même élément de $\mathcal{H}(l_1,\dots,l_q;n)$ si et seulement si $(g) = \Phi\cdot(f)$, etc.; donc: le quotient Ω'/G est en correspondance biunivoque avec $\mathcal{H}(l_1,\dots,l_q;n)$. Si nous savions structurer $\mathcal{I}(l_1,\dots,l_q;n)$, la Proposition 1 et les remarques que nous venons de faire, nous diraient que $\mathcal{H}(l_1,\dots,l_q;n)$ est partout dense en $\mathcal{I}(l_1,\dots,l_q;n)$.

Effectivement:

Proposition 2. *$\mathcal{I}(l_1,\dots,l_q;n)$ a une structure de variété algébrique.*

Proposition 3. *La projection canonique p: $\Omega \longrightarrow \mathcal{I}(l_1,\dots,l_q;n)$ est une application ouverte.*

Proposition 4. *$\mathcal{H}(l_1,\dots,l_q;n)$ a une structure de variété algébrique, en correspondance biunivoque avec un ouvert de Zariski de $\mathcal{I}(l_1,\dots,l_q;n)$.*

Les Propositions 1, 2, 3, 4 se trouvent, avec les démonstrations détaillées, dans les articles [1], [2], [3]; dans [3] on étudie, de façons différentes, la structure fibrée de $\mathcal{H}(l_1,\dots,l_q;n)$.

L'idée de la construction est la suivante: si nous avons affaire, pour fixer les idées, à un idéal

$$I = (\phi_1^\lambda,\dots,\phi_\mu^\lambda,\vartheta_1^l,\dots,\vartheta_m^l)$$

individué par une base de μ formes (indépendantes) de degré λ et de m formes (indépendantes) de degré l, avec $\lambda < l$; envisageons le sousespace, disons E, engendré dans le $\mathbf{P}^{\mathbf{N}'}$ des formes de degré λ, ($N' = \binom{n+\lambda}{n} - 1$) par les ϕ_i^λ; puis, dans le $\mathbf{P}^{\mathbf{N}''}$ ($N'' = \binom{n+l}{n} - 1$) des formes de degré l, envisageons le sousespace constitué des ϑ qui s'annullent sur toutes les ϕ de E; disons F ce sousespace; envisageons de suite les sousespaces de $\mathbf{P}^{\mathbf{N}''}$, disons-les F', qui passent pour cet F là et qui ont *une* dimension en plus que F; les F' forment, à leur tour, une variété linéaire, disons-la $H(E)$; de $H(E)$ prenons la Grassmannienne des sousespaces de dimension $m-1$, $\mathcal{G}(H(E), m-1)$; alors I est en correspondance biunivoque

$$I \longleftrightarrow (E, L)$$

où L est l'élément de $\mathcal{G}(H(E), m-1)$ individué par les ϑ_j^l. Alors $\mathcal{I}(\underbrace{\lambda,\dots,\lambda}_{\mu};\underbrace{l,\dots,l}_{m};n)$ est en correspondance biunivoque avec

$$\bigcup \{E\} \times \mathcal{G}(H(E), m-1) : E \in \mathcal{G}(N', \mu-1)$$

3. Dans l'article [4], Perelli Cippo et Vassallo donnent une construction différente des variétés I et H: ils identifient, grosso modo, tout idéal

$$I = (f_1^{(l_1)}, \ldots, f_q^{(l_q)}) \tag{$**$}$$

avec le sousespace, disons E_I, engendré par les polynômes de degré plus petit ou égal au maximum, dans le $\mathbf{P}^N$ $(N = \binom{n+l_q}{n} - 1)$ des polynômes de degré maximum $(= l_q)$ (parmi ceux qui se présentent dans une base (quelconque) de I). Si les f de $(**)$ vérifient la Propriété III, on obtient une correspondance biunivoque entre $\mathcal{H}(l_1, \ldots, l_q; n)$ et un sousensemble de la Grassmannienne $\mathcal{G}(N, d)$, constitué des sousespaces de $\mathbf{P}^N$ qui ont une dimension d maxima (parmi les dimensions des sousespaces engendrés, dans les polynômes de degré l_q, par m_1 polynômes de degré l_{m_1}, par $m_2 - m_1$ polynômes de degré l_{m_2} etc.) qui vérifient une convenable condition de *fermeture* exprimant que E dérive effectivement d'un idéal, c'est à dire que $E = E_I$, et qui vérifient certaines (très naturelles) conditions de Schubert.

Mais si les f de $(**)$ vérifient une *Propriété* (III$_\delta$).

Propriété (III$_\delta$) Pour chaque degré $l_{m_\alpha+1} (\alpha = 0, 1, 2, \ldots)$, l'ensemble des polynômes de plus petit degré engendre, dans le $\mathbf{P}_{\binom{n+l_{m_\alpha+1}}{n}-1}$ des polynômes de degré $l_{m_\alpha+1}$, un sousespace de dimension δ_α, alors la biunivocité s'établit entre les éléments de $\mathcal{G}(N, \delta)$ (pour δ= le plus grand des δ_α) qui vérifient les mêmes conditions de fermeture et de Schubert et les idéaux d'une famille, qu'il sera naturel d'indiquer par $\mathcal{H}^\delta$, individués par des bases constituées de polynômes f qui vérifient, précisément, la Propriété (III_δ).

Evidemment $\mathcal{I} = \cup_\delta \mathcal{H}^\delta$ et $\mathcal{H} = \mathcal{H}^d$ en est la partie dense.

4. Revenons aux variétés $\mathcal{I}(l_1, \ldots, l_q; n)$ et $\mathcal{H}(l_1, \ldots, l_q; n)$: les deux sont rationnelles; le group projectif $PGL_k(n)$ agit sur I et sur H; le corps des invariants projectifs, qui est le même aussi bien pour les idéaux que pour les intersections complètes, est donc un souscorps d'un corps de fonctions rationnelles; pour le Lemme fondamental de [1], il est unirationnel. Le Lemme de [1] dit que: tout souscorps E d'un corps de fonctions rationnelles $k(x_1, \ldots, x_n)$ en les indéterminées $x_1, \ldots, x_n$, est unirationnel (c'est à dire: isomorphe à un souscorps de $k(x_1, \ldots, x_d)$, où $x_1, \ldots, x_d$ sont indéterminées et $d = tras_k E$). Le problème se pose de caractériser ceux qui sont *rationnels*.

Références

[1] B. Bigolin, *Osservazioni sugli invarianti proiettivi delle intersezioni complete.* Rend. Sem. Mat. Brescia VIII (1984).

[2] B. Bigolin, *Remarques sur les idéaux de polynômes.* Seminar on Deformations (Łódź – Warsaw 1982), Springer-Verlag, Lecture Notes in Mathematics 1165.

[3] C. Perelli Cippo et B. Bigolin, *Osservazioni sulla varietà rappresentativa degli ideali di polinomi.* Rend. Ist. Lombardo 122 (1989).

[4] C. Perelli Cippo et S. Vassallo, *Ideali non omogenei di polinomi: i fibrati B e C*, Rend. Ist. Lombardo 125 (1992).