TOPICS IN COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 31
INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
WARSZAWA 1995

ATTRACTION DES DISQUES ANALYTIQUES ET CONTINUITÉ HÖLDÉRIENNE D'APPLICATIONS HOLOMORPHES PROPRES

FRANÇOIS BERTELOOT

Université des Sciences et Technologies de Lille, URA CNRS 751, U.F.R. de Mathématiques
59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France
E-mail: berteloo@gat.univ-lille1.fr

1. Introduction. L'existence d'un prolongement continu au bord est une question fondamentale pour l'étude des applications holomorphes propres entre domaines de $\mathbb{C}^n$. En dimension $n = 1$, des résultats désormais classiques clarifient la situation. Ainsi, le théorème de Carathéodory stipule qu'un biholomorphisme entre deux domaines bornés et simplement connexes du plan complexe se prolonge en un homéomorphisme de leurs adhérences pourvu que les deux domaines satisfassent la condition de Schönflies en tout point de leur frontière. On sait également (théorème de Kellogs) qu'une application holomorphe propre d'un domaine borné à frontière lisse sur un autre se prolonge différentiablement au bord.

En dimension $n > 1$, la situation est bien plus riche car les propriétés géométriques de la frontière du domaine image interviennent avec plus de force. Le premier résultat est dû indépendemment à Henkin et Pinchuk [7], [9].

THÉORÈME (Henkin, Pinchuk). *Soit $f : D_1 \to D_2$ une application holomorphe propre entre domaines bornés de $\mathbb{C}^n$. Si D_1 admet une fonction définissante globale plurisousharmonique et si bD_2 est strictement pseudoconvexe, alors f se prolonge en une application $\tilde{f} : \bar{D}_1 \to \bar{D}_2$, Hölder continue d'exposant 1/2.*

K. Diederich et J. E. Fornaess ont généralisé ce résultat à certains domaines faiblement pseudoconvexes [4].

THÉORÈME (Diederich, Fornaess). *Soit $f : D_1 \to D_2$ une application holomorphe propre entre domaines bornés de $\mathbb{C}^n$. Si D_1 est pseudoconvexe à bord $\mathcal{C}^2$ et*

1991 *Mathematics Subject Classification*: Primary 32H40.
The paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

D_2 pseudoconvexe à bord réel analytique, alors f se prolonge en une application $\tilde{f} : \bar{D}_1 \to \bar{D}_2$, Hölder continue d'exposant $\alpha \in [0,1]$.

Enfin, M. Range a étendu le théorème de Henkin et Pinchuk aux domaines strictement pseudoconvexes par morceaux [10].

THÉORÈME (Range). *Soit $f : D_1 \to D_2$ un biholomorphisme entre deux domaines bornés à frontières strictement pseudoconvexes par morceaux. Alors f se prolonge en un homéomorphisme $\tilde{f} : \bar{D}_1 \to \bar{D}_2$, Hölder continu d'exposant $\alpha \in [0,1]$.*

On notera que ces deux derniers résultats ne précisent pas la valeur de l'exposant α. Les démonstrations de ces théorèmes reposent sur un principe commun : estimer la norme de l'application linéaire tangente à f en fonction de la distance au bord du domaine D_1. En effet, une majoration du type suivant :

1) $\|f'(z)\| \lesssim d(z, bD_1)^{-a} \quad (a \in [0,1[)$,

force la continuité hölderienne d'exposant $(1-a)$ par simple intégration. Dans la pratique, cette estimation résulte des deux suivantes :

2) $\|f'(z)\| \lesssim d(f(z), bD_2)^{b}$,
3) $d(f(z), bD_2) \lesssim d(z, bD_1)^{c}$.

La majoration 2) découle d'estimations, parfois délicates à établir, sur les métriques infinitésimales de Carathéodory ou Kobayashi. La majoration 3) est facilement obtenue en appliquant une version adéquate du lemme de Hopf à la fonction (p.s.h.) $S(z) =: \sup\{\rho(w); f(w) = z\}$ où ρ est une fonction p.s.h. bien choisie de D_1.

Notre contribution consiste à observer que l'estimation 2) provient directement d'informations obtenues sur l'attraction des disques analytiques. Cela nous permet d'établir plusieurs résultats nouveaux de prolongement par continuité hölderienne tout en évitant les questions de métriques infinitésimales. Ces résultats concernent principalement les domaines à bords lisses par morceaux et le problème du prolongement local.

Nous présentons ici ces résultats sous une forme plus synthétique et sensiblement plus générale que dans [1] et [2]. Nous montrons, en particulier, que les résultats de "type local" restent valables lorsque les domaines ne sont pas bornés.

2. Attraction des disques analytiques. Considérons une suite de disques analytiques, c'est-à-dire une suite d'applications holomorphes définies sur le disque unité Δ de $\mathbb{C}$, à valeurs dans un domaine D de $\mathbb{C}^n$: $f_p : \Delta \to D$. Si le domaine D est borné, le théorème de Montel montre que toute sous-suite de (f_p) admet une valeur d'adhérence pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de Δ. Supposons maintenant que la suite des centres $(f_p(0))$ converge vers un point ζ du bord de D ($\zeta \in bD$) tel que bD soit pseudoconvexe de classe $\mathcal{C}^1$ près de ζ et ne contienne aucun disque analytique non trivial passant par ζ.

Dans ces conditions, le disque constant $\Delta \to \{\zeta\}$ est la seule valeur d'adhérence de (f_p) et donc (f_p) converge uniformément vers ζ sur tout compact de Δ. Des hypothèses plus précises sur la géométrie du bord bD permettent de quantifier ce phénomène d'attraction. A cet effet, nous introduisons la définition suivante.

DÉFINITION. bD satisfait la *propriété d'attraction d'ordre* α $(0 < \alpha < 1)$ en ζ si il existe un réel $\tau \in]0,1[$, une fonction $C : [0,\tau] \to [0,+\infty[$ et un voisinage U de ζ tels que l'estimation suivante soit vraie pour tout $\eta \in bD \cap U$ et tout disque analytique $g : \Delta \to D$:

$$|u| \leq r \leq \tau \Rightarrow |g(u) - \eta| \leq C(r)|g(0) - \eta|^{\alpha}.$$

Il est bien connu que bD satisfait la propriété d'attraction d'ordre $\alpha = \frac{1}{2}$ en tout point de stricte pseudoconvexité. Ce fait peut facilement être établi par un argument de dilation des coordonnées (cf. [8] pour un exposé de cette méthode). Plus généralement, la proposition suivante montre comment l'existence de "bonnes" fonctions pics plurisousharmoniques permet de préciser l'ordre d'attraction α.

PROPOSITION 1. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$ et ζ un point de bD. Supposons qu'il existe un voisinage U de ζ ainsi qu'une famille de fonctions φ_η, $\eta \in U \cap bD$, définies sur $U \cap \bar{D}$, p.s.h. sur $U \cap D$ et telles que* :

1) $\forall z, z' \in U \cap \bar{D} : |\varphi_\eta(z) - \varphi_\eta(z')| \leq A|z - z'|$;
2) $\forall z \in U \cap \bar{D} : \varphi_\eta(z) \leq 1 - B|z - \eta|^{2k}$ *et* $\varphi_\eta(\eta) = 1$

où A, B et k sont des constantes strictement positives. Alors bD satisfait la propriété d'attraction d'ordre $(\frac{1}{2k} - 0)$ en ζ.

On notera que le domaine D n'est pas supposé borné, ceci améliore donc le résultat énoncé dans [10]. Cette généralisation résulte du lemme suivant :

LEMME DE LOCALISATION. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$ et $\zeta_0 \in bD$. On suppose qu'il existe une fonction φ, continue sur $\bar{D} \cap \{|z - \zeta_0| \leq R\}$ et telle que* :

(i) *φ est p.s.h. sur $D \cap \{|z - \zeta_0| < R\}$.*
(ii) *$\varphi > 0$ sur $\bar{D} \cap \{|z - \zeta_0| \leq r\}$ $(r < R)$.*
(iii) *$\varphi < 0$ sur $\bar{D} \cap \{r' \leq |z - \zeta_0| \leq R'\}$ $(r < r' < R' < R)$.*

Alors il existe des voisinages U et V de ζ_0 et une constante $\tau \in]0,1[$ tels que pour tout disque analytique $f : \Delta \to D$ l'on ait :

$$f(0) \in U \Rightarrow f(\Delta_\tau) \subset V$$

$(\Delta_\tau = \{|u| \leq \tau\})$.

Les fonctions pics plurisousharmoniques construites par Fornaess et Sibony [6] permettent d'utiliser la proposition 1. On voit alors que l'ordre d'attraction α prend une valeur arbitrairement proche de $\frac{1}{2k}$ par défaut $(\alpha = \frac{1}{2k} - 0)$ lorsque bD est pseudoconvexe (convexe si $n > 2$) et de type fini égal à $2k$ en ζ. L'étude détaillée du cas $n = 2$ menée dans [3] montre qu'en fait α prend la valeur optimale $1/2k$. Nous avons donc, en résumé, la proposition suivante :

Proposition 2. *Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$ et ζ un point de bD. Alors bD satisfait la propriété d'attraction d'ordre α en ζ dans les cas suivants :*

1) *bD est strictement pseudoconvexe en $\zeta : \alpha = \frac{1}{2}$.*
2) *$D \subset \mathbb{C}^2$ et bD est pseudoconvexe de type fini $2k$ en $\zeta : \alpha = \frac{1}{2k}$.*
3) *$D \subset \mathbb{C}^n$, $n > 2$ et bD est convexe de type fini $2k$ en $\zeta : \alpha = \frac{1}{2k} - 0$.*

Nous terminons cette partie en établissant le lemme de localisation.

La démonstration est une légère variation sur le thème de celle du théorème 3 de [11] :

Soit K une constante positive assez grande pour que $K\varphi \leq -2R^2$ sur $\bar{D} \cap \{r' \leq |z-\zeta_0| \leq R'\}$. Définissons alors $\tilde{\varphi}$ par :

$$\tilde{\varphi} = \begin{cases} \max(K\varphi + |z|^2 - R^2, -2R^2) & \text{pour } z \in D \text{ et } |z-\zeta_0| < R', \\ -2R^2 & \text{pour } z \in D \text{ et } |z-\zeta_0| \geq R'. \end{cases}$$

$\tilde{\varphi}$ est une fonction p.s.h. bornée sur D et, quitte à lui soustraire une constante assez grande, on pourra la supposer négative. De plus, $\tilde{\varphi} - |z|^2$ est p.s.h. sur $D \cap \{|z-\zeta_0| < r\}$.

Soit χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$, croissante et positive telle que $\chi(x) = x$ pour $0 \leq x \leq r/4$ et $\chi(x) = (1-0)r/2$ pour $x \geq r/2$. Pour tout z_0 dans $D \cap \{|z-\zeta_0| < r/4\}$, on définit une fonction u_{z_0} par :

$$u_{z_0} = e^{M\tilde{\varphi}}\chi(|z-z_0|^2).$$

Les fonctions u_{z_0} prennent leurs valeurs dans $[0, (1-0)r/2]$ et il existe une constante positive M, indépendante du choix de z_0, telle que $\log u_{z_0}$ soit p.s.h. sur D.

Soit $f : \Delta \to D$ un disque analytique tel que $|f(0) - \zeta_0| < r/4$. Posons $z_0 = f(0)$ et considérons la fonction v définie sur $\Delta - \{0\}$ par :

$$v(t) = |t|^{-2} u_{z_0}[f(t)].$$

Cette fonction est sous-harmonique sur Δ–$\{0\}$ car $\log v$ l'est. On vérifie facilement que $\lim_{t\to 0} v(t) = e^{M\tilde{\varphi}(z_0)}|f'(0)|^2$, v est donc prolongeable en une fonction sous-harmonique de Δ et le principe du maximum montre que :

$$|f'(0)|^2 \leq e^{-M\tilde{\varphi}(z_0)} \cdot \frac{r}{2}.$$

Ceci fournit une minoration de la distance de Kobayashi infinitésimale :

$$\forall z_0 \in D \cap \left\{|z-\zeta_0| < \frac{r}{4}\right\},\ \forall \vec{X} \in \mathbb{C}^n : k_D(z_0, \vec{X}) \geq \sqrt{\frac{2}{r}} e^{\frac{M}{2}\tilde{\varphi}(z_0)} \|\vec{X}\|.$$

Si la conclusion du lemme n'était pas vraie, on trouverait une suite de disques analytiques $f_p : \Delta \to D$ et une suite t_p de points du disque Δ tels que :

(i) $\lim t_p = 0$.
(ii) $\lim f_p(0) = \zeta_0$.
(iii) $|f_p(t_p) - \zeta_0| \geq r/4$ pour tout p.

Notons d_Δ et d_D les distances de Kobayashi intégrées dans Δ et D. On aurait alors, compte tenu de l'estimation obtenue pour k_D :

$$d_\Delta(0,t_p) \geq d_D(f_p(0), f_p(t_p)) \gtrsim \frac{r}{4},$$

ce qui est absurde puisque $\lim d_\Delta(0,t_p) = 0$.

3. Continuité Höldérienne d'applications holomorphes propres. La proposition suivante est une version adaptée aux bords réguliers par morceaux de la proposition énoncée dans [2], elle synthétise les différentes possibilités.

PROPOSITION 3. *Soit $f : D_1 \to D_2$ une application holomorphe propre d'un domaine de $\mathbb{C}^n$ sur un autre. Soient $z_0 \in bD_1$ et $w_0 \in bD_2$ tels que :*

(i) *bD_1 et bD_2 sont — au moins — de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux aux voisinages de z_0 et w_0.*

(ii) *il existe une fonction ρ p.s.h. négative et continue dans D_1 telle que $\rho(z) \gtrsim -d(z, bD_1)^a$ $(0 < a \leq 1)$ au voisinage de z_0.*

(iii) *bD_2 satisfait la propriété d'attraction d'ordre α en w_0.*

(iv) *Il existe une suite z_p dans D_1 telle que $\lim z_p = z_0$ et $\lim f(z_p) = w_0$.*

Alors f se prolonge en une application Hölder continue d'exposant $\alpha\gamma a$ au voisinage de z_0. La constante γ étant telle que bD_2 satisfasse la condition du cône d'ordre γ au voisinage de w_0.

La condition du cône, que nous énonçons ci-dessous, est une propriété géométrique simple satisfaite par les domaines à frontières régulières par morceaux. Dans la pratique, elle offre un substitut à l'oscultation des bords réguliers par des disques.

DÉFINITION. On dit d'un domaine D de $\mathbb{C}^n$ qu'il *satisfait la condition du cône* d'ordre γ s'il existe une application continue $N : bD \to \{\vec{u} \in \mathbb{C}^n : \|\vec{u}\| = 1\}$ et une constante $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$ telles que :

(i) le cône de sommet ρ, hauteur λ et angle $\alpha\pi$ $(0 < \alpha < \gamma)$ et dirigé par $\vec{N}(\rho)$ est contenu dans D.

(ii) $\forall p, p' \in bD$, $\forall x, x' \in [0, \lambda]$: $p + x\vec{N}(p) = p' + x'\vec{N}(p') \Rightarrow p = p'$ et $x = x'$.

La preuve de la proposition 3 est identique à celle développée dans [2] à ceci près que l'on utilise le lemme 3.1 de [1] à la place du lemme de Hopf usuel.

A titre d'illustration, nous détaillons l'application de cette proposition au cas des domaines à bords strictement pseudoconvexes par morceaux. Cela nous conduit à la généralisation suivante du théorème de Range (ce résultat n'est pas explicite dans [1]).

THÉORÈME 1. *Soit $f : D_1 \to D_2$ une application holomorphe propre d'un domaine borné à frontière strictement pseudoconvexe par morceaux sur un autre. Alors f se prolonge en une application $\tilde{f} : \bar{D}_1 \to \bar{D}_2$ Hölder continue d'exposant $\gamma/2$ (bD_2 satisfaisant la condition du cône d'ordre γ).*

Un domaine $D \Subset \mathbb{C}^n$ est à *bord strictement pseudoconvexe par morceaux* si il existe :

1) un recouvrement fini d'un voisinage U de bD par des ouverts U_j, $j = 1, \dots, k$,
2) des fonctions $\rho_j : U_j \to \mathbb{R}$ strictement p.s.h. de classe $\mathcal{C}^2$ tels que :
   a) $D \cap U = \{z \in U \text{ tel que } \forall j : z \notin U_j \text{ ou } \rho_j(z) < 0\}$.
   b) $d\rho_{i_1} \wedge \dots \wedge d\rho_{i_l} \neq 0$ sur $\bigcap_{\nu=1,l} U_{i_\nu}$ pour tout $1 \leq i_1 < \dots < i_l \leq k$.

Nous avons vu dans la partie 1 qu'un domaine (borné ou non) vérifie la propriété d'attraction d'ordre $\frac{1}{2}$ en tout point de stricte pseudoconvexité de sa frontière. Il résulte alors facilement de la définition ci-dessus qu'un domaine à bord strictement pseudoconvexe par morceaux satisfait cette propriété en tout point de sa frontière. Il nous reste donc à vérifier que la condition (ii) de la proposition 3 est remplie.

Notons $S_j := \{z \in U_j \text{ tel que } \rho_j(z) = 0\}$. Par compacité de bD_1, il existe $r > 0$ tel que : $\forall z \in bD, \forall j \leq k, z \in S_j \Rightarrow B(z,r) \Subset U_j$.

Fixons $z_0 \in bD$ et notons $j_1 < \dots < j_l$ les indices tels que $z_0 \in S_{j_\nu}$. Soit $\chi(x)$ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, positive, nulle $x \leq r/4$ et égale à 1 pour $x \geq r/2$. Choisissons $\varepsilon \geq 0$ assez petit pour que $\rho_j - \varepsilon\chi(|z - z_0|^2)$ soit p.s.h. sur U_j pour tout $j \in \{j_1, \dots, j_l\}$. Définissons alors des fonctions $\tilde{\rho}_j$ par :

$$\tilde{\rho}_j = \begin{cases} \max(\rho_j - \varepsilon\chi(|z - z_0|^2), -\varepsilon/2) & \text{pour } |z - z_0|^2 < r/2, \\ -\varepsilon/2 & \text{pour } |z - z_0|^2 \geq r/2. \end{cases}$$

Les fonctions $\tilde{\rho}_j$ sont p.s.h. et négatives sur D_1 et donc $\tilde{\rho} := \max \tilde{\rho}_j$ l'est également.

Il existe un voisinage V de z_0 tel que : $\forall z \in V \cap D$, $\exists j \in \{j_1, \dots, j_l\}$ tel que $d(z, bD) = |z - z_j|$ et $z_j \in S_j$. On a alors, si $z \in V$ et V est assez petit :

$$\tilde{\rho}(z) \geq \tilde{\rho}_j(z) \gtrsim -d(z, S_j) \geq -|z - z_j| = -d(z, bD).$$

De la même façon, les fonctions pics p.s.h. de Fornaess et Sibony permettent d'établir une version de ce théorème adaptée à certains domaines faiblement pseudoconvexes. Nous renvoyons au théorème 2 de [1] pour les applications propres et nous nous limitons ici au cas des biholomorphismes :

Théorème 2. *Soient D_1 et D_2 des domaines bornés pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$ (convexes si $n > 2$) à frontières de type fini $2q$ (resp. $2p$) par morceaux. Soit $f : D_1 \to D_2$ un biholomorphisme. Alors f se prolonge en un homéomorphisme $\tilde{f} : \bar{D}_1 \to \bar{D}_2$. $\tilde{f}$ et $\tilde{f}^{-1}$ sont Hölder continus d'exposants respectifs $(1-0)\gamma_2/2k$ et $(1-0)\gamma_1/2q$ où D_1 et D_2 satisfont les conditions du cône d'ordres respectifs γ_1 et γ_2.*

Terminons en remarquant la nature purement locale des propositions 2 et 3. Cela conduit à une version améliorée d'un théorème de Forstneric et Rosay sur le prolongement continu local [2]. L'intérêt de notre résultat tient à ce qu'il s'applique à des domaines non bornés et à certains points de faible pseudoconvexité. De plus, la démonstration que nous proposons simplifie celle de Forstneric et Rosay — surtout dans le cas strictement pseudoconvexe — en évitant les problèmes de localisation précise de la métrique de Kobayashi (cf. [5]).

THÉORÈME 3. *Soit* $f : D_1 \to D_2$ *une application holomorphe propre d'un domaine* $D_1 \subset \mathbb{C}^n$ *sur un domaine* $D_2 \subset \mathbb{C}^n$. *Soient* $z_0 \in bD_1$ *et* $w_0 \in bD_2$ *tels que* :

(i) *il existe une fonction* ρ *p.s.h. négative et continue dans* D_1 *telle que* $\rho(z) \gtrsim -d(z, bD_1)$ *au voisinage de* z_0. bD_1 *est – au moins – de classe* $\mathcal{C}^1$ *en* z_0.

(ii) *il existe une suite* z_p *telle que* $\lim z_p = z_0$ *et* $\lim f(z_p) = w_0$.

Alors f *se prolonge sur un voisinage de* z_0 *dans* $\bar{D}_1$ *en une application Hölder continue d'exposant* α *dans les cas suivants* :

1) bD_2 *est strictement pseudoconvexe en* w_0 : $\alpha = \frac{1}{2}$.

2) $D_2 \subset \mathbb{C}^2$ *et* bD_2 *est pseudoconvexe et de type fini* $2k$ *en* w_0 : $\alpha = \frac{1}{2k}$.

3) $D_2 \subset \mathbb{C}^n$, $n > 2$, bD_2 *est convexe et de type fini* $2k$ *en* w_0 : $\alpha = \frac{1}{2k} - 0$.

Remarque. L'hypothèse (i) n'est pas purement locale ! Il est cependant très facile de vérifier qu'elle est satisfaite lorsque bD_1 est strictement pseudoconvexe au voisinage de z_0. En fait, cette hypothèse ne sert qu'à établir une inégalité de comparaison des distances aux bords. Il est parfois possible d'établir cette inégalité sans y recourir ; tel est, par exemple, le cas lorsque bD_1 est pseudoconvexe de type fini au voisinage de z_0 et $D_1 \subset \mathbb{C}^2$.

Références

[1] F. Berteloot, *Hölder continuity of proper holomorphic mappings*, Studia Math. 100 (1991), 229–235.

[2] —, *A remark on local continuous extension of holomorphic mappings*, in: Contemp. Math. 137 (1992), 79–83.

[3] F. Berteloot et G. Cœuré, *Domaines de* $\mathbf{C}^2$*, pseudoconvexes et de type fini, ayant un groupe non compact d'automorphismes*, Ann. Inst. Fourier 41 (1) (1991), 77–86.

[4] K. Diederich and J. E. Fornaess, *Proper holomorphic maps onto pseudoconvex domains with real analytic boundaries*, Ann. of Math. 110 (1979), 575–592.

[5] F. Forstneric and J. P. Rosay, *Localization of the Kobayashi metric and the boundary continuity of proper holomorphic mappings*, Math. Ann. 279 (1987), 239–252.

[6] J. E. Fornaess and N. Sibony, *Construction of p.s.h. functions on weakly pseudoconvex domains*, Duke Math. J. 58 (1989), 633–655.

[7] G. M. Henkin, *An analytic polyhedron is not biholomorphically equivalent to a strictly pseudoconvex domain*, Soviet Math. Dokl. 14 (1973), 858–862.

[8] S. Pinchuk, *Holomorphic aps in* $\mathbb{C}^n$ *and the Problem of Holomorphic Equivalence*, Encyclopaedia of Math. Sci. 19, Springer, 1989.

[9] —, *On proper holomorphic mappings of strictly pseudoconvex domains*, Siberian Math. J. 15 (1974), 909–917.

[10] R. M. Range, *On the topological extension to the boundary of biholomorphic maps in* $\mathbb{C}^n$, Trans. Amer. Math. Soc. 216 (1976), 203–216.
[11] N. Sibony, *A class of hyperbolic manifolds*, in: Ann. of Math. Stud. 100, 1981, 357–372.