TOPICS IN COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 31
INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
WARSZAWA 1995

LES MÉTRIQUES INVARIANTES ET LA CARACTÉRISATION DES ISOMORPHISMES ANALYTIQUES

JEAN-PIERRE VIGUÉ

Université de Poitiers, Mathématiques
URA CNRS D1322 Groupes de Lie et Géométrie
40, avenue du Recteur Pineau, 86022 Poitiers Cedex, France

1. Introduction. Soit $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque-unité ouvert dans $\mathbb{C}$. Le lemme de Schwarz donne la caractérisation suivante des automorphismes analytiques de Δ laissant l'origine fixe.

THÉORÈME 1.1. *Soit $f : \Delta \to \Delta$ une application holomorphe telle que $f(0) = 0$, et que l'une des conditions suivantes soit vérifiée* :

(i) *il existe z_0 non nul dans Δ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$,*
(ii) $|f'(0)| = 1$.

Alors il existe un nombre complexe λ de module 1 *tel que $f(z) = \lambda z$, et f est un automorphisme analytique de Δ.*

Le but de notre étude est la généralisation de cette caractérisation à des domaines bornés de $\mathbb{C}^n$. La première généralisation est dûe à H. Cartan [2].

THÉORÈME 1.2. *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, soit $a \in D$, et soit $f : D \to D$ une application holomorphe telle que $f(a) = a$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) *les valeurs propres de $f'(a)$ sont toutes de module* 1;
(ii) *le module du déterminant jacobien $|J(f'(a))|$ est égal à* 1;
(iii) *$f'(a)$ est une isométrie pour la métrique infinitésimale de Carathéodory $E_D(a, .)$;*
(iv) *$f'(a)$ est une isométrie pour la métrique infinitésimale de Kobayashi $F_D(a, .)$;*

1991 *Mathematics Subject Classification*: 32H15, 46G20.
The paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

(v) *f est un automorphisme analytique de D.*

Ces dernières années, beaucoup d'efforts ont été faits pour généraliser ce résultat quand on ne suppose pas que le point a est fixe. On s'est très vite aperçu que, dans ces conditions, le bon problème est de chercher à caractériser un isomorphisme f d'un domaine borné D_1 de $\mathbb{C}^n$ sur un domaine borné D_2 de $\mathbb{C}^n$ comme une application holomorphe $f : D_1 \to D_2$ qui est une isométrie pour une métrique infinitésimale bien choisie en un point. Ces résultats s'appuient en général sur l'égalité des distances de Carathéodory et de Kobayashi sur un domaine convexe borné (voir H. Royden and P. Wong [8] et L. Lempert [7]), et sur la notion de géodésique complexe introduite par E. Vesentini [10 et 11]. On est donc amené à supposer que l'un des domaines D_1 ou D_2 est convexe. Si on suppose D_1 convexe, il est naturel, comme nous allons le voir, de supposer que f est une isométrie pour la métrique infinitésimale de Carathéodory (voir J.-P. Vigué [12]) ; en revanche, dans le cas où on suppose D_2 convexe, il faut supposer que f est une isométrie pour la métrique infinitésimale de Kobayashi (voir J.-P. Vigué [13], I. Graham [5] et L. Belkhchicha [1]). Il est intéressant de remarquer que la démonstration de L. Belkhchicha utilise aussi la distance de Carathéodory et montre comme résultat préliminaire que f est une isométrie pour la distance de Carathéodory.

Nous montrerons ensuite comment certains de ces résultats peuvent se généraliser en dimension infinie, où nous n'avons pas, jusqu'à ce jour, de résultats aussi complets.

Pour commencer, nous allons rappeler un certain nombre de propriétés des distances invariantes et des géodésiques complexes au sens de Vesentini.

2. Distance de Carathéodory et géodésiques complexes. La distance de Carathéodory c_D sur un domaine borné D de $\mathbb{C}^n$ est défini par la formule :

$$c_D(x,y) = \sup_{f \in H(D,\Delta)} \rho(f(x), f(y)),$$

où ρ est la distance de Poincaré sur le disque-unité Δ. De même, la métrique infinitésimale associée E_D est définie (voir [3, 4 et 6]) par

$$E_D(x,v) = \sup_{f \in H(D,\Delta)} |f'(x).v| \quad (x \in D, v \in \mathbb{C}^n).$$

D'après E. Vesentini [10 et 11], on dit qu'une application holomorphe φ du disque-unité Δ dans D est une géodésique complexe de D si φ est une isométrie pour les distances de Carathéodory c_Δ et c_D. D'après E. Vesentini [11], nous avons la caractérisation suivante des géodésiques complexes de D.

THÉORÈME 2.1. *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. Soit $\varphi : \Delta \to D$ une application holomorphe, et supposons que l'une des deux conditions suivantes soit satisfaite :*

(i) $E_D(\varphi(0), \varphi'(0)) = 1$;

(ii) *il existe deux points distincts α et β de Δ tels que*

$$c_D(\varphi(\alpha), \varphi(\beta)) = c_\Delta(\alpha, \beta).$$

Alors φ est une géodésique complexe de D.

Démonstration. Supposons par exemple que (ii) est vrai. A l'aide du théorème de Montel, on montre qu'il existe une application holomorphe f de D dans Δ telle que

$$\rho(f(\varphi(\alpha)), f(\varphi(\beta))) = \rho(\alpha, \beta).$$

Quitte à composer f avec un automorphisme analytique de Δ, on peut supposer que

$$f\circ\varphi(\alpha) = \alpha, f\circ\varphi(\beta) = \beta.$$

D'après le lemme de Schwarz, $f\circ\varphi = \mathrm{id}_\Delta$, et comme les applications holomorphes sont contractantes pour la distance de Carathéodory, ceci suffit à démontrer le résultat. Le cas (i) se traite de manière analogue.

Soit maintenant D la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|\cdot\|$. Pour tout $x \neq 0$ de $\mathbb{C}^n$, le théorème 2.1 et le théorème de Hahn-Banach montrent que l'application de Δ dans D

$$\zeta \to \varphi(\zeta) = \zeta \frac{x}{\|x\|}$$

est une géodésique complexe de D.

Rappelons qu'un point x appartenant à la frontière de D est un point complexe-extrémal de $\overline{D}$ si la relation $x + \zeta y \in \overline{D}$ pour tout $\zeta \in \Delta$ entraîne $y = 0$. On déduit de E. Vesentini [10 et 11] le résultat suivant.

THÉORÈME 2.2. *Supposons que $x/\|x\|$ soit un point complexe-extremal de $\overline{D}$. Alors l'application φ définie par $\varphi(\zeta) = \zeta x/\|x\|$ est l'unique géodésique complexe de D telle que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = x/\|x\|$.*

Nous pouvons alors montrer le lemme suivant.

LEMME 2.3. *Soient D_1 et D_2 deux domaines bornés de $\mathbb{C}^n$, et soit $f : D_1 \to D_2$ une application holomorphe. Soit a un point de D, et soit v un vecteur non nul de $\mathbb{C}^n$ tel que*

$$E_{D_2}(f(a), f'(a).v) = E_{D_1}(a, v).$$

Si $\varphi : \Delta \to D$ est une géodésique complexe de D_1 telle que $\varphi(0) = a$ et que $\varphi'(0)$ soit colinéaire à v, alors $f\circ\varphi$ est une géodésique complexe de D_2.

Démonstration. Soit φ une géodésique complexe de D_1 telle que $\varphi(0) = a$ et que $\varphi'(0)$ soit colinéaire à v. D'après le lemme 2.1,

$$E_{D_1}(\varphi(0), \varphi'(0)) = 1.$$

D'après l'hypothèse du lemme, ceci entraîne que

$$E_{D_2}(f\circ\varphi(0), (f\circ\varphi)'(0)) = 1,$$

et $f\circ\varphi$ est une géodésique complexe de D_2.

On déduit en particulier de ce résultat que, pour tout point x appartenant à l'image de φ, on a

$$c_{D_2}(f(a), f(x)) = c_{D_1}(a, x).$$

Signalons enfin que, d'après un résultat de L. Lempert [7] et de H. Royden et P. Wong [8], étant donné un domaine borné convexe D de $\mathbb{C}^n$, il existe toujours des géodésiques complexes dans D. Plus précisément, étant donnés deux points a et b de D, il existe une géodésique complexe φ telle que a et b appartiennent à $\varphi(\Delta)$; de même, étant donnés un point a de D et un vecteur v de $\mathbb{C}^n$, il existe une géodésique complexe $\varphi : \Delta \to D$ telle que $\varphi(0) = a$ et que $\varphi'(0)$ soit colinéaire à v.

3. Caractérisation des isomorphismes à l'aide de la métrique infinitésimale de Carathéodory.

Dans ce paragraphe, nous allons montrer une caractérisation des isomorphismes analytiques d'un domaine borné convexe sur un autre domaine borné à l'aide de la métrique infinitésimale de Carathéodory. Plus précisément, nous allons montrer le théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. *Soient D_1 et D_2 deux domaines bornés de $\mathbb{C}^n$, et supposons que D_1 soit convexe. Soit a un point de D_1, et soit $f : D_1 \to D_2$ une application holomorphe. Supposons que, pour tout $v \in \mathbb{C}^n$, on ait*

$$E_{D_2}(f(a), f'(a).v) = E_{D_1}(a, v).$$

Alors, f est un isomorphisme analytique de D_1 sur D_2.

Démonstration. Montrons d'abord que, pour tout $x \in D_1$,

$$c_{D_2}(f(a), f(x)) = c_{D_1}(a, x).$$

En effet, nous avons déjà dit qu'étant donnés deux points x et y de D_1, il existe une géodésique complexe $\varphi : \Delta \to D_1$ telle que x et y appartiennent à $\varphi(\Delta)$. Soit donc φ une géodésique complexe telle que $\varphi(0) = a$ et que $\varphi(\zeta) = x$, pour un certain $\zeta \in \Delta$. Comme $f'(a)$ est une isométrie pour la métrique infinitésimale de Carathéodory, on a, pour tout $v \in \mathbb{C}$:

$$E_{D_2}((f\circ\varphi)(0), (f\circ\varphi)'(0).v) = E_{D_1}(\varphi(0), \varphi'(0).v) = E_\Delta(0, v).$$

D'après le théorème 2.1, $f\circ\varphi$ est une géodésique complexe. On a donc :

$$c_{D_2}((f\circ\varphi)(0), (f\circ\varphi)(\zeta)) = c_\Delta(0, \zeta),$$

ce qui prouve l'égalité annoncée.

Comme D_1 est convexe, d'après L. Harris [6], les boules pour la distance de Carathéodory sont relativement compactes dans D_1. On en déduit que f est une application holomorphe propre de D_1 dans D_2. D'après le théorème de Remmert-Stein, $f(D_1)$ est un sous-ensemble analytique de D_2, et, d'après le théorème d'inversion locale, $f(D_1)$ contient un voisinage de $f(a)$. Ainsi, $f(D_1) = D_2$.

Nous pouvons alors achever la démonstration du théorème 3.1. L'application f, qui est propre, est un revêtement ramifié de D_1 sur D_2 ; il existe donc un sous-ensemble analytique A de D_2 tel que f soit un revêtement de $D_1 \backslash f^{-1}(A)$ sur $D_2 \backslash A$. Le nombre de feuillets de ce revêtement est fini et constant sur $D_2 \backslash A$. Comme f conserve la distance de Carathéodory au point a et que f est un isomorphisme analytique d'un voisinage de a sur son image, ce nombre est égal à 1, et f est un isomorphisme analytique de D_1 sur D_2.

4. Caractérisation des isomorphismes à l'aide de la métrique infinitésimale de Kobayashi. Si on suppose que c'est D_2 qui est convexe, il faut supposer alors que $f'(a)$ est une isométrie pour la métrique infinitésimale de Kobayashi. C'est ce que fait I. Graham [5] qui montre l'important résultat suivant.

Théorème 4.1. *Soit M une variété complexe taut de dimension n et soit Ω un domaine borné strictement convexe dans $\mathbb{C}^n$. Soit a un point de Ω, et soit $f : M \to \Omega$ une application holomorphe qui est une isométrie pour les métriques infinitésimales de Kobayashi $F_M(a, .)$ et $F_\Omega(f(a), .)$. Alors f est un isomorphisme analytique de M sur Ω.*

Nous ne montrerons pas ce résultat dont la démonstration repose sur un résultat d'unicité des géodésiques complexes dans Ω. Si on ne suppose pas que les géodésiques complexes sont uniques, il n'a été possible pour l'instant de généraliser complètement le résultat de I. Graham. Il me faut cependant signaler un intéressant résultat démontré par L. Belkhchicha [1] dans le cas où Ω est la boule-unité ouverte de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|.\|$.

Théorème 4.2. *Soit M une variété complexe de dimension n, sur laquelle la pseudodistance intégrée de Carathéodory c^i_M est une distance et telle que M soit c^i_M-complet. Soit p un point de M et soit B la boule-unité de $\mathbb{C}^n$ pour une norme $\|.\|$. Soit $f : M \to B$ une application holomorphe telle que $f(p) = 0$ et que $f'(p)$ soit une isométrie pour les métriques infinitésimales de Kobayashi $F_M(a, .)$ et $F_B(f(a), .)$. Alors f est un isomorphisme analytique de M sur B.*

Comme nous allons le voir, un des intérêts supplémentaires de ce théorème est qu'on peut, dans une certaine mesure, le généraliser à la dimension infinie. C'est sans doute un des rares résultats connus en dimension infinie, et nous allons le démontrer dans le paragraphe suivant.

5. Généralisation à la dimension infinie. Nous considérerons le dual topologique E d'un espace de Banach complexe E_0. Soit D un domaine borné de E. Nous serons amené à considérer les hypothèses suivantes :

(H_1) D est complet pour la distance intégrée de Carathéodory c^i_D.

(H_2) Soit $\varphi_n : \Delta \to D$ une suite d'applications holomorphes du disque-unité Δ dans D convergeant uniformément sur tout compact de Δ pour la topologie faible $\sigma(E, E_0)$ vers une application holomorphe $\varphi : \Delta \to E$. Alors, ou bien $\varphi(\Delta)$ est contenu dans la frontière de D, ou bien $\varphi(\Delta)$ est contenu dans D.

L'hypothèse (H_1) est a priori plus faible que l'hypothèse d'être complet pour la distance de Carathéodory, et d'après L. Harris [6], l'hypothèse (H_1) est toujours satisfaite lorsque D est un domaine borné convexe de E. On déduit de [6] que (H_2) est vérifiée dans les deux cas suivants :

(i) D est un domaine borné convexe de E, et il existe $a \in D$, et une famille σ_i de formes linéaires provenant de E_0 telles que :

$$D = \{z \in E \mid \ \mathrm{Re}\ \sigma_i(z-a) < 1\};$$

(ii) D est un domaine borné convexe d'un espace de Banach réflexif E.

Soit maintenant B la boule-unité ouverte de E. Nous considérons sur B l'hypothèse suivante :

(H_3) pour toute fonction $f : \overline{B} \to \mathbb{C}$ bornée, continue sur $\overline{B}$, holomorphe sur B, on a :

$$\|f\|_{\mathrm{Ext}(\overline{B})} = \|f\|_{\overline{B}}$$

(où, par définition, $\|f\|_A = \sup_{x \in A} |f(x)|$, et $\mathrm{Ext}(\overline{B})$ désigne l'ensemble des points complexe-extrémaux de $\overline{B}$).

L'hypothèse (H_3) est vérifiée pour tout domaine convexe borné de $\mathbb{C}^{\mathrm{n}}$ (voir [1]). On déduit facilement du principe du maximum que, si B est telle que tous les points de la frontière de B soient des points complexes-extrémaux de $\overline{B}$, alors B vérifie (H_3). On peut aussi montrer que la condition (H_3) est satisfaite dans le cas de la boule-unité ouverte B de l'espace de Banach complexe $l^\infty(\mathbb{N})$ des suites de nombres complexes bornées muni de la norme habituelle. Pour l'instant, je ne sais pas si la condition (H_3) est satisfaite pour la boule-unité ouverte d'un espace de Banach réflexif E.

Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 5.1. *Soit D un domaine borné du dual E d'un espace de Banach E_0 vérifiant les hypothèses* (H_1) *et* (H_2). *Soit B la boule-unité ouverte de E, et supposons que B vérifie* (H_3). *Soit a un point de D, et soit $f : D \to B$ une application holomorphe telle que $f(a) = 0$ et que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour les métriques infinitésimales de Kobayashi $F_D(a,.)$ et $F_B(0,.)$. Alors f est un isomorphisme analytique de D sur B.*

Nous déduisons en particulier de ce résultat le corollaire suivant [14] qui généralise à la dimension infinie un théorème de C. Stanton [9].

COROLLAIRE 5.2. *Soit D un domaine borné de l'espace de Banach complexe $l^\infty(\mathbb{N})$ qui satisfait aux hypothèses* (H_1) *et* (H_2). *Supposons qu'il existe un point a de D tels que les normes de Kobayashi $F_D(a,.)$ et de Carathéodory $E_D(a,.)$ coïncident. Supposons de plus que l'indicatrice*

$$\{x \in l^\infty(\mathbb{N}) \mid E_D(a,x) < 1\}$$

soit linéairement isomorphe à la boule-unité B de $l^\infty(\mathbb{N})$. Alors D est analytiquement isomorphe à B.

Avant de démontrer ces résultats, nous aurons besoin de quelques définitions et des résultats préliminaires suivants.

DÉFINITION 5.3. Soit $\varphi : \Delta \to D$ une application holomorphe. On dit que φ est une géodésique complexe pour la métrique infinitésimale de Kobayashi à l'origine si $F_D(\varphi(0), \varphi'(0)) = 1$.

Nous avons alors le théorème d'existence suivant.

THÉORÈME 5.4. *Soit D un domaine borné vérifiant l'hypothèse* (H_2). *Soit a un point de D, et soit $v \in E$ tel que $F_D(a, v) = 1$. Alors il existe une géodésique complexe pour la métrique de Kobayashi à l'origine $\varphi : \Delta \to D$ telle que $\varphi(0) = a$ et que $\varphi'(0) = v$.*

Démonstration. D'après la définition de la métrique infinitésimale de Kobayashi, il existe une suite φ_n d'applications holomorphes de Δ dans D telles que $\varphi_n(0) = a, \varphi_n'(0) = (1 - 1/n)v$. On montre de manière tout à fait standard en utilisant le théorème de Montel que, selon un ultrafiltre $\mathcal{U}$, φ_n converge pour la topologie faible $\sigma(E, E_0)$ uniformément sur tout compact de Δ vers une application holomorphe φ. Il est clair que $\varphi(0) = a$ et que $\varphi'(0) = v$. D'après l'hypothèse (H_2), $\varphi(\Delta) \subset D$, et le théorème est démontré.

Il est facile de voir qu'être une géodésique complexe pour la métrique de Kobayashi à l'origine est une condition plus faible qu'être une géodésique pour la distance de Carathéodory.

Par des méthodes inspirées de C. Stanton [9] et de L. Belkhchicha [1], nous allons montrer le lemme suivant.

LEMME 5.5. *Soit D un domaine borné d'un espace de Banach complexe E, et supposons que D vérifie les hypothèses* (H_1) *et* (H_2). *Soit B la boule-unité ouverte de E, et supposons que B vérifie l'hypothèse* (H_3). *Soit $f : D \to B$ une application holomorphe, et supposons qu'il existe un point a de D tel que $f(a) = 0$ et que $f'(a)$ soit une isométrie surjective pour la métrique infinitésimale de Kobayshi. Alors f vérifie les deux propriétés suivantes :*

(i) $\forall x \in D, \forall y \in D, c_B(f(x), f(y)) = c_D(x, y)$;

(ii) $\forall x \in D, \forall v \in E, E_B(f(x), f'(x).v) = E_D(x, v)$.

Ainsi, f est une isométrie pour la distance de Carathéodory de D sur $f(D)$.

Démonstration. Etant donnés x et y dans D (resp. $x \in D$ et $v \in E$), on montre facilement en utilisant le théorème de Montel qu'il existe une application holomorphe $F : D \to \Delta$ qui réalise exactement la distance de Carathéodory de x et y (resp. la métrique infinitésimale $E_D(x, v)$), c'est-à-dire telle que

$$c_\Delta(F(x), F(y)) = c_D(x, y) \quad (\text{resp. } E_\Delta(F(x), F'(x).v) = E_D(x, v)).$$

D'après le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage U de a et un voisinage V de $0=f(a)$ tel que f soit un isomorphisme analytique de U sur V. Alors $(f_{|U})^{-1}$ est une application holomorphe de V sur U, et soit G l'application holomorphe de V dans Δ définie par

$$G(z) = F\circ(f_{|U})^{-1}(z)$$

Nous allons montrer que G se prolonge en une application holomorphe de B dans Δ.

Remarquons d'abord que G est définie dans un voisinage de l'origine dans E et admet donc un développement en série de polynômes homogènes

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z),$$

où $P_n(z)$ est un polynôme homogène de degré n, et ce développement converge dans un voisinage de l'origine suffisamment petit.

Soit maintenant u un point complexe-extremal de $\overline{B}$, et soit t un vecteur de E tel que $f'(a).t = u$. On sait que $F_B(0,u) = 1$, et comme $f'(a)$ est une isométrie pour la métrique infinitésimale de Kobayashi, $F_D(a,t) = 1$. Il existe donc une géodésique complexe pour la métrique infinitésimale de Kobayashi à l'origine $\varphi : \Delta \to D$ telle que $\varphi(0) = a$, $\varphi'(0) = t$.

Il est clair que $f\circ\varphi$ est une géodésique complexe pour la métrique infinitésimale de Kobayashi, mais, comme B est convexe, on sait d'après L. Lempert [7], H. Royden et P. Wong [8] que les distances de Carathéodory et de Kobayashi coïncident sur B. Ainsi donc, $f\circ\varphi$ est une géodésique complexe pour la distance de Carathéodory (ce qui entraîne qu'il en est de même pour φ), et d'après le théorème d'unicité de E. Vesentini, on a :

$$f(\varphi(\zeta)) = \zeta u.$$

Ces résultats montrent également que f est un isomorphisme de $\varphi(\Delta)$ sur $f(\varphi(\Delta))$. Calculons $G(f(\varphi(\zeta)))$. On trouve

$$G(f(\varphi(\zeta))) = F(\varphi(\zeta)),$$

et la fonction $G\circ f\circ\varphi$ est une application holomorphe de Δ dans Δ. Son développement en série est obtenu par substitution dans le développement de G, et on trouve

$$G(f(\varphi(\zeta))) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\zeta u) = \sum_{n=0}^{\infty} \zeta^n P_n(u).$$

On déduit des inégalités de Cauchy que $\|P_n(u)\| \leq 1$. En faisant ce raisonnement pour tout point $u \in \mathrm{Ext}(\overline{B})$, on déduit que $\|P_n\|_{\mathrm{Ext}(\overline{B})} \leq 1$, et d'après l'hypothèse (H_3), ceci entraîne que

$$\|P_n\|_{\overline{B}} \leq 1.$$

Pour tout $z \in B$, on a donc $\|P_n(z)\| \leq \|z\|^n$. On déduit immédiatement que G se prolonge en une application holomorphe de B dans $\mathbb{C}$. Soit maintenant $r < 1$, et soit B_r la boule de centre 0 et de rayon r. En utilisant $G\circ f\circ\varphi$, on montre de même que $\|G\|_{\mathrm{Ext}(\overline{B}_r)} < 1$. On en déduit que $\|G\|_{\overline{B}_r} \leq 1$, ce qui montre que G se prolonge en une application holomorphe de B dans Δ.

Au voisinage de a dans D, on a $G\circ f = F$. D'après le théorème de prolongement analytique, on a, pour tout $z \in D$,

$$G\circ f(z) = F(z).$$

En particulier,

$$G(f(x)) = F(x), \quad G(f(y)) = F(y)$$
$$(\text{resp. } G(f(x)) = F(x),\ G'(f(x)).(f'(x).v) = F'(x).v),$$

ce qui montre l'égalité annoncée

$$c_B(f(x), f(y)) = c_D(x, y) \quad (\text{resp. } E_B(f(x), f'(x).v) = E_D(x, v)).$$

Ceci permet de montrer que, pour tout $x \in D$, $f'(x)$ est un isomorphisme linéaire de E. D'après le théorème d'inversion locale, f est un isomorphisme analytique de D sur son image. En utilisant le fait que D est complet pour c^i_D, il est facile de montrer que f est un isomorphisme analytique de D sur B, et le théorème est démontré.

Il est intéressant et amusant de remarquer que la démonstration du théorème 5.1 fait intervenir à la fois les métriques de Carathéodory et de Kobayashi.

Bibliographie

[1] L. Belkhchicha, *Caractérisation des isomorphismes analytiques de certains domaines bornés*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 313 (1991), 281–284.

[2] H. Cartan, *Sur les fonctions de plusieurs variables complexes : l'itération des transformations intérieures d'un domaine borné*, Math. Z. 35 (1932), 760–773.

[3] S. Dineen, *The Schwarz Lemma*, Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1989.

[4] T. Franzoni and E. Vesentini, *Holomorphic Maps and Invariant Distances*, Math. Stud. 40, North-Holland, Amsterdam, 1980.

[5] I. Graham, *Holomorphic mappings into strictly convex domains which are Kobayashi isometries at a point*, Proc. Amer. Math. Soc. 105 (1989), 917–921.

[6] L. Harris, *Schwarz-Pick systems of pseudometrics for domains in normed linear spaces*, in: Advances in Holomorphy, Math. Stud. 34, North-Holland, Amsterdam, 1979, 345–406.

[7] L. Lempert, *Holomorphic retracts and intrinsic metrics in convex domains*, Anal. Math. 8 (1982), 257–261.

[8] H. Royden and P. Wong, *Carathéodory and Kobayashi metrics on convex domains*, preprint, 1983.

[9] C. Stanton, *A characterization of the polydisc*, Math. Ann. 264 (1983), 271–275.

[10] E. Vesentini, *Complex geodesics*, Compositio Math. 44 (1981), 375–394.

[11] —, *Complex geodesics and holomorphic mappings*, Symposia Math. 26 (1982), 211–230.

[12] J.-P. Vigué, *Caractérisation des automorphismes analytiques d'un domaine convexe borné*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 299 (1984), 101–104.

[13] J.-P. Vigué, *Sur la caractérisation des automorphismes analytiques d'un domaine borné*, Portugal. Math. 43 (1986), 439–453.

[14] —, *Sur la caractérisation des isomorphismes analytiques entre domaines bornés d'un espace de Banach complexe*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 21 (1994), 145–155.