TOPICS IN COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 31
INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
WARSZAWA 1995

SYSTÈMES DOUBLEMENT ORTHOGONAUX DE FONCTIONS HOLOMORPHES ET APPLICATIONS

THANH VAN NGUYEN et AHMED ZERIAHI

Laboratoire d'Analyse Complexe et Fonctionnelle, Université Paul Sabatier
118, Route de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex, France

0. Introduction. Nous donnons ici une étude systématique des systèmes doublement orthogonaux "de Bergman" et leurs applications à certains aspects de l'analyse pluricomplexe : espaces de fonctions holomorphes, fonctions séparément analytiques.

C'est en quelque sorte un article de synthèse. On y trouve cependant des démonstrations détaillées qui n'ont paru nulle part ailleurs.

1. Fonctions plurisousharmoniques extrémales et mesures d'équilibre. Soit D un ouvert de $\mathbb{C}^n$ et $E \subset \mathbb{C}^n$. On définit la fonction plurisousharmonique extrémale associée au couple (E, D) ([SC,2]) par

$$(1.1)\qquad \omega(z, E, D) = \limsup_{z' \to z} [\sup\{u(z') : u \in P_{01}(E, D)\}], \qquad z \in D,$$

où $P_{0,1}(E, D)$ est la classe des fonctions u plurisousharmoniques sur D telles que $u \leq 1$ et $u/E \cap D \leq 0$. Elle vérifie l'équation de Monge–Ampère complexe ([B-T], [K]) :

$$(1.2)\qquad (dd^c \omega(\cdot, E, D))^n = 0 \quad \text{sur } D \setminus \overline{E}.$$

Pour $\alpha \in [0, 1[$ on pose

$$(1.3)\qquad D_\alpha = D(E, \alpha) := \{z \in D : \omega(Z, E, D) < \alpha\}$$

Si D est borné, alors

$$(1.4)\qquad \omega(z, E, D_\alpha) = \frac{1}{\alpha} \omega(z, E, D), \qquad \forall z \in D_\alpha$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 32A05, 32A37, 32D10.

Key words and phrases: extremal functions, doubly orthogonal systems, Schauder bases, separately analytic functions.

The paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

(1.4bis) E est “localement” non pluripolaire dans D_α, c'est-à-dire E rencontre chaque composante connexe de D_α en un ensemble non pluripolaire (voir p. ex. [N-Z 2, Lemme 3], voir également la proposition 1.2 ci-dessous).

On appelle *condensateur* dans $\mathbb{C}^n$ tout couple (K, D) formé d'un ouvert hyperconvexe D de $\mathbb{C}^n$ et d'un compact $K \subset D$ “localement” non pluripolaire dans D. On rappelle qu'on ouvert D de $\mathbb{C}^n$ est dit *hyperconvexe* lorsqu'il existe une fonction plurisousharmonique ϱ sur D, $\varrho<0$ et telle que $\{z \in D : \varrho(z) < c\} \Subset D$ pour tout $c<0$. Une telle ϱ est appellée une *fonction plurisousharmonique d'exhaustion bornée* de D.

Pour tout condensateur (K, D), le courant positif $(dd^c\omega(\cdot, K, D))^n$ s'identifie à une mesure positive portée par K. Nous la noterons $\mu_0(K, D)$ ou μ_0 tout simplement et nous l'appellerons *mesure d'équilibre* du condensateur (K, D).

Un condensateur (K, D) est dit *régulier*, ou *P-régulier*, lorsque $\omega(\cdot, K, D) = 0$ sur K. On sait qu'alors $\omega(\cdot, K, D) - 1$ est une fonction plurisousharmonique d'exhaustion bornée continue de D et (1.4) est vérifiée [Za,1].

Proposition 1.1. *Soit (K, D) un condensateur dans $\mathbb{C}^n$, μ_0 sa mesure d'équilibre. Alors si $E \subset K$ est μ_0-mesurable et $\mu_0(E) = \mu_0(K)$, on a $\omega(\cdot, E, D) = \omega(\cdot, K, D)$.*

Ce résultat est prouvé dans [N-Z,1] dans le cas où D est borné. Pour le cas général, voir [Ze,2].

Proposition 1.2. *Soit (K, D) un condensateur, μ_0 sa mesure d'équilibre.*

1) *Si u est plurisousharmonique sur D et $u = -\infty$ μ_0-presque partout sur K, alors $u \equiv -\infty$.*

2) *Si (K, D) est régulier, alors 1) est vraie avec D_α à la place de D, $\forall \alpha \in]0, 1[$.*

Démonstration. On se contente de prouver 2), l'autre preuve étant semblable. Soit $\beta \in]0, \alpha[$; alors $D_\beta \Subset D_\alpha$ et u est donc majorée sur $\overline{D}_\beta$ par un certain $M \in \mathbb{R}$. Pour tout $A > 0$ on a $u + A \leq M + A$ sur D_β et $u + A \leq 0$ μ_0-presque partout sur K. Il existe donc $E \subset K$, μ_0-mesurable tel que $\mu_0(E) = \mu_0(K)$ et $u + A \leq 0$ sur E. Par suite,

$$u \leq M\omega(\cdot, E, D_\beta) + A(\omega(\cdot, E, D_\beta) - 1).$$

D'après la proposition 1.1 et (1.4),

$$\omega(\cdot, E, D_\beta) = \frac{1}{\beta}\omega(\cdot, E, D) = \frac{1}{\beta}\omega(\cdot, E, D) = \frac{1}{\beta}\omega(\cdot, E, D) < 1.$$

En faisant tendre A vers ∞, on obtient $u \equiv -\infty$ sur D_β.

2. Systèmes doublement orthogonaux de Bergman. Nous aurons besoin d'un théorème d'approximation dont la démonstration utilise les estimations L^2 do Hörmander [Hö].

Lorsque D est un ouvert de $\mathbb{C}^n$, on désigne par $\mathcal{O}(D)$ l'espace des fonctions holomorphes sur D muni de la topologie de la convergence compacte sur D. Lorsque K est un compact de $\mathbb{C}^n$, on désigne par $\mathcal{O}(K)$ l'espace des germes de fonctions holomorphes au voisinage de K muni de sa topologie $\mathcal{LF}$.

Soit λ la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{C}^n$, et μ_1 la mesure définie par $d\mu_1 = (1+|z|^2)^{-2}d\lambda$. Désignons par $\mathcal{O}^2(D, d\mu_1)$ l'espace de Hilbert des fonctions holomorphes sur D de carré μ_1-intégrable sur D.

THÉORÈME 2.1. *Soit D un ouvert hyperconvexe de $\mathbb{C}^n$. Alors l'espace $\mathcal{O}^2(D, d\mu_1)$ est dense dans l'espace $\mathcal{O}(D)$.*

Démonstration. Soit E un compact de D et $\varrho : D \to \,]0,1[$ une fonction plurisousharmonique exhaustive sur D. Soit $a, b \in \,]0,1[$ tels que $\sup_E \varrho < a < b < 1$, de sorte que $\varphi := \varrho - a$ est plurisousharmonique sur D, $\varphi < 0$ sur $D_a := \{z \in D : \varrho(z) < a\}$ et $\varphi \geq b - a > 0$ sur $D \setminus D_b$.

Soit χ une fonction C^∞ à support compact dans D telle que $\chi \equiv 1$ sur D_b. Soit $f \in \mathcal{O}(D)$; alors $\chi f \in C^\infty(D) \cap L^2(D, d\mu_1)$ et $\chi f = f$ sur D_b. Nous allons corriger cette fonction pour la rendre holomorphe. On cherche une fonction u de la même classe que χf telle que la fonction

$$g = \chi f - u \tag{2.1}$$

soit holomorphe sur D et u soit “assez petite” sur E. Cela se fait classiquement par le théorème d'existence de Hörmander pour un choix convenable des fonctions poids. Pour chaque entier $k \geq 1$, soit $\varphi_k = k\varphi$. Il est clair que $|f\overline{\partial}\chi|^2 e^{-k\varphi}$ est λ-intégrable sur D. D'après le théorème de Hörmander il existe u_k localement intégrable sur D telle que

$$\overline{\partial} u_k = f\overline{\partial}_\chi \quad \text{sur } D, \tag{2.2}$$

$$\int_D |u_k|^2 e^{-\widetilde{\varphi}_k}\, d\lambda \leq \int_D |f\overline{\partial}_\chi|^2 e^{-\varphi_k}\, d\lambda \tag{2.3}$$

où $\widetilde{\varphi}_k = \varphi_k + 2\log(1+|z|^2)$.

Comme $\overline{\partial}_\chi = 0$ sur D_b et $\varrho \geq b - a =: \varepsilon > 0$ sur $D \setminus D_b$, le second membre de (2.3) est $O(e^{-k\varepsilon})$ lorsque $k \to \infty$. Puisque $\varphi < a$ sur $Da \Subset D$, il résulte de (2.3) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_D |u_k|^2\, d\lambda \leq Ce, \qquad \forall k \geq 1. \tag{2.4}$$

D'après (1.2) et le fait que $\chi \equiv 1$ sur D_b, on en déduit que u_k est holomorphe sur $D_b \supset D_a$. Il résulte alors de l'inégalité de la moyenne et de (2.4) que la suite (u_k) tend vers 0 uniformément sur tout compact de D_a. Par conséquent, la suite $g_k := \chi f - u_k$ est une suite de fonctions holomorphes sur D qui converge uniformément sur tout compact de D_a, donc sur E, vers f. Comme $\varphi < 1 - a$ sur D, l'inégalité (2.3) montre que $u_k \in L^2(D, d\mu_1)$. Par conséquent, $g_k \in \mathcal{O}^2(D, d\mu_1)$

et $g_k \to f$ uniformément sur E. Comme E est un compact quelconque de D, le théorème en résulte. ■

Remarque. Ce théorème nous sera utile au paragraphe 4, on en déduit que $\mathcal{O}^2(D, d\mu_1)$ est de dimension infinie. C'est ce fait qui sera utilisé dans la construction suivante. Rappelons que μ_1 est la mesure borélienne sur D définie par $d\mu_1 = (1+|z|^2)^{-2} d\lambda$.

Soit (K, D) un condensateur de $\mathbb{C}^n$. Nous allons construire un système doublement orthogonal par la méthode classique de Bergman qui est un cas particulier de la construction des fonctions propres d'un opérateur compact autoadjoint et positif d'un espace de Hilbert.

Soit $H_1 = \mathcal{O}^2(D, d\mu_1)$ et H_0 le sous-espace vectoriel fermé de $L^2(K, d\mu_0)$ engendré par la restriction à K des fonctions de H_1. On a alors une injection continue à image dense

$$i : H_1 \to H_0. \tag{2.5}$$

Posons $A = i^* \circ i$. Alors A est un opérateur linéaire compact autoadjoint et positif vérifiant

$$(Af \mid g)_1 = (f \mid g)_0 \quad \forall f, g \in H_1. \tag{2.6}$$

On a identifié f à $i(f)$ qui est la restriction de f à K, $(\cdot \mid \cdot)_k$ désignant le produit scalaire sur H_k, $k = 0, 1 \ldots$

D'après (2.6), A est injectif. On sait qu'alors A possède une suite $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ de valeurs propres > 0 et H_1 possède une base orthonormée $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ de fonctions propres ([R-N]). Rappelons la construction classique de cette base. Par un argument de compacité on montre que

$$\lambda_1 := \sup_{\|f\|_0 = 1} |(Af \mid f)_1| = \sup_{\|f\|_0=1} \|f\|_0^2 \tag{2.7}$$

est atteint en un point $\psi_1 \in H_1$ tel que $A(\psi_1) = \lambda_1 \psi_1$. En raisonnant par récurrence sur $p \geq 1$, supposons $\psi_1, \ldots, \psi_p$ construits et soit H_{p+1} le sous-espace fermé de H_1, orthogonal au système $\{\psi_1, \ldots, \psi_p\}$. Alors on a $A(H_{p+1}) \subset H_{p+1}$ et on peut donc itérer la construction précédente pour obtenir un élément ψ_{p+1} tel que

$$\lambda_{p+1} := \sup\{(Af \mid f)_1 : f \in H_{p+1},\ |f|_1 = 1\} = \|\psi_{p+1}\|_0, \tag{2.8}$$

$$A(\psi_{p+1}) = \lambda_{p+1}\psi_{p+1}, \qquad \psi_{p+1} \in H_{p+1},\ \|\psi_{p+1}\|_1 = 1. \tag{2.9}$$

Il est alors clair que (ψ_p) est un système orthonormé de H_1 orthogonal dans H_0.

Puisque A est injectif, 0 n'est pas valeur propre de A et la décomposition spectrale de A montre que $\{\psi_p\}$ est une base orthonormée de H_1. Posons

$$\varphi_p = \lambda_p^{-1} \psi_p, \tag{2.10}$$

$$\gamma_p = \lambda_p^{-1}. \tag{2.11}$$

Alors (φ_p) est une base orthogonale de H_1, orthonormée dans H_0.

Cette construction a été faite par Bergman dans le cas d'une variable complexe ([Be]). Suivant sa terminologie, nous appellerons (φ_p) le *système doublement orthogonal de Bergman* associé au condensateur (K, D) (en abrégé : S.D.O.B.).

Il résulte de la construction précédente que (γ_p) est une suite croissante tendant vers ∞, qui ne dépend que du condensateur (K, D). Il est possible de l'interpréter en terme de n-diamètre de Kolmogorov et d'après Mityagin [Mi], la nucléarité de l'espace $O(D)$ implique la propriété suivante :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{-\varepsilon} < \infty, \qquad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.12}$$

Grâce à cette propriété, on démontre le résultat suivant (voir [N-Z,2], [N-S]) :

PROPOSITION 2.2. *Le S.D.O.B. associé au condensateur (K, D) vérifie l'estimation suivante* :

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{\log|\varphi_j(z)|}{\log \gamma_j} \le \omega(z; K, D), \qquad \forall z \in D. \tag{2.13}$$

Grâce au lemme de Hartogs classique, il en résulte facilement :

COROLLAIRE 2.3. *Pour tout $\alpha \in \,]0, 1[$, et tout compact $E \subset D_\alpha$, il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$|\varphi_j|_E := \sup_{z\in E} |\varphi_j(z)| \le C\gamma_j^{\alpha}, \qquad \forall j \in N^*. \tag{2.14}$$

3. Convexité logarithmique des normes duales sur l'espace $\mathcal{O}'(D)$. Au paragraphe 2, nous avons obtenu une estimation du système (φ_j). Ici nous voulons donner une estimation du système biorthogonal (φ'_j) associé à (φ_j). Posons

$$\|f\|_\alpha := \Big(\int_{D_\alpha} |f|^2\, d\mu_1\Big)^{1/2}, \qquad 0 < \alpha \le 1,\ f \in \mathcal{O}(D). \tag{3.1}$$

D'après l'inégalité de la moyenne, les normes (3.1) engendrent la topologie de $\mathcal{O}(D)$. Pour $\alpha = 0$ rappelons que $\|f\|_0^2 = \int_K |f|^2 d\mu_0$.

On définit les normes duales de (3.1) sur $\mathcal{O}'(D)$:

$$\|T\|_\alpha^* := \sup\{|\langle T, f\rangle| : f \in \mathcal{O}(D),\ \|f\|_\alpha \le 1\}, \qquad T \in \mathcal{O}'(D). \tag{3.2}$$

On suppose dans la suite que (K, D) est régulier.

THÉORÈME 3.1. *Soient $0 \le \alpha_0 \le \alpha_1 \le 1$, $\theta \in \,]0, 1[$, $\varepsilon \in \,]0, \theta[$. Alors il existe une constante $C_1 > 0$ (dépendant de $\alpha_0, \alpha_1, \theta, \varepsilon$) telle que*

$$\|T\|^*_{(1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1} \le C_1 \|T\|^{*\,1-\theta+\varepsilon}_{\alpha_0} \|T\|^{*\,\theta-\varepsilon}_{\alpha_1}, \qquad \forall T \in \mathcal{O}'(D). \tag{3.3}$$

La démonstration de ce théorème nécessite quelques préliminaires. On considère dans $\mathcal{O}(D)$ les boules associées aux normes (3.1) :

$$\mathcal{U}_\alpha := \Big\{ f \in \mathcal{O}(D) : \int_{D_\alpha} |f|^2 \, d\mu \le 1 \Big\}, \qquad 0 < \alpha \le 1,$$

$$\mathcal{U}_0 := \Big\{ f \in \mathcal{O}(D) : \int_{D_k} |f|^2 \, d\mu_0 \le 1 \Big\}.$$

Le théorème 3.1 sera une conséquence du résultat suivant :

Proposition 3.2. *Soient* $0 \le \alpha_0 < \alpha_1 \le 1$, $0 < \theta < 1$. *Alors pour tout* $\beta \in \,]0,1[$ *tel que* $\beta > (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$, *il existe une constante* $C_2 > 0$ *telle que*

$$\mathcal{U}_\alpha \subset C_2 r^{-\theta} \mathcal{U}_{\alpha_0} + C_2 r^{1-\theta} U_{\alpha_1}, \qquad \forall r > 0. \tag{3.4}$$

Montrons tout d'abord que la proposition 3.2 implique le théorème 3.1.

Démonstration du théorème 3.1. Soit $T \in \mathcal{O}'(D)$, $\alpha_0, \alpha_1 \in [0,1]$ tels que $0 \le \alpha_0 < \alpha_1 \le 1$, $\theta \in \,]0,1[$, $\beta \in [0,1]$ tel que $\beta > (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$. Soit $f \in \mathcal{U}_\beta$ et $r > 0$. D'après la proposition 3.2, il existe $g \in C_2 r^{-\theta}\mathcal{U}_{\alpha_0}$ et $h \in C_2 r^{1-\theta}\mathcal{U}_{\alpha_1}$ tels que $f = g + h$ sur D. Il en résulte alors que

$$|T(f)| \le |T(g)| + |T(h)| \le C_2 (r^{-\theta} \|T\|^*_{\alpha_0} + r^{1-\theta} \|T\|^*_{\alpha_1}),$$

ce qui implique l'inégalité suivante :

$$\|T\|^*_\beta \le C_2 (r^{-\theta} \|T\|^*_{\alpha_0} + r^{1-\theta} \|T\|^*_{\alpha_1}), \qquad \forall r > 0.$$

La borne inférieure du second membre lorsque $r > 0$ varie est égale à

$$C_2 (1-\theta)^{\theta-1} \theta^{-\theta} |T|^{*\,1-\theta}_{\alpha_0} |T|^{*\theta}_{\alpha_0}.$$

On en déduit immédiatement les estimations (3.3) en remplaçant θ par $\theta - \varepsilon$ et $\beta = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 > (1-\theta+\varepsilon)\alpha_0 + \theta\alpha_1 > (1-\theta+\varepsilon)\alpha_0 + (\theta-\varepsilon)\alpha_1$. ∎

Démonstration de la proposition 3.2. Nous aurons besoin du lemme suivant tout à fait classique qui se démontre modulo une partition de l'unité et estimations L^2 de Hörmander (voir [A]).

Lemme 3.3. *Soit* Ω *un ouvert pseudoconvexe de* $\mathbb{C}^n$, $\{\Omega^+, \Omega^-\}$ *un recouvrement de* Ω *tel que* $\Omega^+ \cap \Omega^- \Subset \Omega$. *Alors il existe une constante* $M > 0$ *telle que pour toute fonction* v *p.s.h. sur* Ω *et pour tout* $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ *il existe* $f^+ \in \mathcal{O}(\Omega^+)$, $f^- \in \mathcal{O}(\Omega^-)$ *vérifiant :*

(i) $f = f^+ - f^-$ *sur* $\Omega^+ \cap \Omega^-$,

(ii) $\displaystyle\int_{\Omega^\pm} |f^\pm|^2 e^{-\tilde{v}} \, d\lambda \le M \int_{\Omega^+ \cap \Omega^-} |f|^2 e^{-v} \, d\lambda$

où $\widetilde{v}(z) = v(z) + 2\log(1+|z|^2)$.

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \alpha, \beta \in [0,1]$ tels que $0 < \alpha_0 < \alpha \le \beta < \alpha_1 \le 1$. On notera pour simplifier $\omega = \omega(0, K, D)$.

Posons $\Omega = D$, $\Omega^+ = D_\beta$, $\Omega^- = D \setminus \overline{D}_\alpha$. Soit $\varrho \geq 0$. Posons

$$v = v_p := \varrho \frac{(\omega - \alpha_0)^+}{\alpha_1 - \alpha_0}$$

où $(\omega - \alpha_0)^+ = \sup\{\omega - \alpha_0, 0\}$. Appliquons alors le lemme 3.3.

Soit $f \in U_\beta$. On a, en posant $B_1 = \sup_{z \in D_\beta}(1 + |z|^2)$,

$$\int_{\Omega^+ \cap \Omega^-} |f|^2 e^{-v}\, d\lambda \leq B_1 \sup_{\Omega^+ \cap \Omega^-} e^{-v} \leq B_1 \exp\left(- \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \varrho \right). \tag{3.5}$$

D'après le lemme 3.3, il existe $f^\pm \in \mathcal{O}(\Omega^\pm)$ telle que

$$f = f^+ - f^- \quad \text{sur } \Omega^+ \cap \Omega^- = D_\beta \setminus \overline{D}_\alpha. \tag{3.6}$$

Compte tenu de l'estimation (3.5), les inégalités (ii) du lemme s'écrivent, en posant $B_2 = B_1 M$,

$$\int_{D_\beta} |f^+|^2 e^{-\tilde{v}}\, d\lambda \leq B_2 \exp\left(- \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \varrho \right), \tag{3.7}$$

$$\int_{D \setminus \overline{D}_\alpha} |f^-|^2 e^{-\tilde{v}}\, d\lambda \leq B_2 \exp\left(- \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \varrho \right) \tag{3.8}$$

Posons maintenant

$$g := \begin{cases} f^+ & \text{sur } D^+ = D_\beta, \\ f + f^- & \text{sur } D^- = D \setminus \overline{D}_\alpha. \end{cases} \tag{3.9}$$

D'après la relation (3.6), g est bien défini et donc $g \in \mathcal{O}(D)$, $h := f - g \in \mathcal{O}(D)$ et l'on a

$$f = g + h \quad \text{sur } D. \tag{3.10}$$

Nous allons prouver les estimations suivantes :

$$\int_{D_{\alpha_0}} |g|^2\, d\mu_1 \leq C_2 \exp\left(- \frac{\alpha - \alpha_0}{\alpha_1 - \alpha_0} \varrho \right), \tag{3.11}$$

$$\int_{D_{\alpha_1}} |h|^2\, d\mu_1 \leq C_2 \exp\left(\frac{\alpha_1 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha_0} \varrho \right), \tag{3.12}$$

où C_2 est une constante qui ne dépend ni de f, ni de ϱ.

Commençons par prouver (3.12). Par définition $h = f - g$. Compte tenu de (3.9), on a alors

$$\int_{D_{\alpha_1}} |h|^2\, d\mu_1 = \int_{D_{\alpha_1} \setminus \overline{D}_\alpha} |f^-|^2\, d\mu_1 + \int_{\overline{D}_\alpha} |f - f^+|^2\, d\mu_1. \tag{3.13}$$

D'après (3.8) et le fait que $v \leq \varrho$ sur D_{α_1}, on obtient

$$\int_{D_{\alpha_1}\setminus\overline{D}_\alpha} |f^-|^2\, d\mu_1 \leq \sup_{D_{\alpha_1}} e^v \int_{D_{\alpha_1}\setminus\overline{D}_\alpha} |f^-|^2 e^{-\tilde{v}}\, d\lambda \leq B_2 \exp\Big(\frac{\alpha_1-\alpha}{\alpha_1-\alpha_0}\varrho\Big). \tag{3.14}$$

D'autre part, on a

$$\Big(\int_{\overline{D}_{\alpha_1}} |f-f^+|^2\, d\mu_1\Big)^{1/2} \leq \Big(\int_{\overline{D}_{\alpha_1}} |f|^2\, d\mu_1\Big)^{1/2} + \Big(\int_{\overline{D}_{\alpha_1}} |f^+|^2\, d\mu_1\Big)^{1/2}. \tag{3.15}$$

D'après (3.7) et le fait que $v \leq \varrho$ sur $\overline{D}_\alpha \subset D_{\alpha_1}$, on a

$$\int_{\overline{D}_{\alpha_1}} |f|^2\, d\mu_1 \leq \sup_{\overline{D}_\alpha} e^v \int_{\overline{D}_{\alpha_1}} |f^+|^2 e^{-\tilde{v}}\, d\lambda \leq B_2 \exp\Big(\frac{\alpha_1-\alpha}{\alpha_1-\alpha_0}\varrho\Big). \tag{3.16}$$

Comme $f \in \mathcal{U}_\beta$ et que $D_\alpha \subset D_\beta$, il résulte des estimations (3.15) et (3.16) que l'on a

$$\Big(\int_{\overline{D}_{\alpha_1}} |f-f^+|^2\, d\mu_1\Big)^{1/2} \leq (1+B_2)\exp\Big(\frac{\alpha_1-\alpha}{\alpha_1-\alpha_0}\varrho\Big). \tag{3.17}$$

L'estimation (3.12) résulte clairement des estimations (3.13), (3.14) et (3.17) en posant $C_2 = 1 + 2B_2$.

Il reste à prouver (3.11). En effet, d'après (3.9), on a

$$\int_{D_{\alpha_1}} |g|^2\, d\mu_1 \leq \int_{D_{\alpha_0}} |f^+|^2\, d\mu_1 \leq \sup_{D_{\alpha_0}} e^v \int_{D_{\alpha_0}} |f^+|^2 e^{-v}\, d\mu_1.$$

Comme $v = 0$ sur D_{α_0}, on en déduit d'après (3.7),

$$\int_{D_{\alpha_0}} |g|^2\, d\mu_1 \leq B_2 \exp\Big(-\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_1-\alpha_0}\Big). \tag{3.18}$$

On en déduit (3.11) avec $C_2 = 1 + 2B_2$ puisque $B_2 \leq C_2$.

Soit maintenant $\theta \in\,]0,1[$. Choisissons $\alpha := (1-\theta)\alpha_0 - \theta\alpha_1$, de sorte que

$$\frac{\alpha-\alpha_0}{\alpha_1-\alpha_0} = \theta \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_1-\alpha}{\alpha_1-\alpha_0} = 1-\theta.$$

Alors pour tout β tel que $(1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1<\beta<\alpha_1$ et $f \in \mathcal{U}_\beta$, on a la décomposition (3.10) avec les estimations (3.11) et (3.12) qui signifient que $g \in C_1 r^{-\theta}\mathcal{U}_{\alpha_0}$ et $h \in C_1 r^{1-\theta}\mathcal{U}_{\alpha_1}$, avec $r = e^\varrho$. Cela prouve donc les inclusions (3.4) pour $r > 1$ et $\alpha_0 > 0$.

Si $r \in\,]0,1]$ et $\alpha_0 > 0$, on a $r^{-\theta} \geq 1$ et donc $\mathcal{U}_\beta \subset \mathcal{U}_{\alpha_0} \subset r^{-\theta}\mathcal{U}_{\alpha_0} \subset C_2 r^{-\theta}\mathcal{U}_{\alpha_0}$, ce qui prouve (3.4) dans ce cas.

Il reste à montrer que (3.4) reste valable si $\alpha_0 = 0$. Pour cela il suffit d'observer que si $\beta > \theta\alpha_1$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\beta > (1-\theta)\varepsilon + \theta\alpha_1$ et donc d'après ce qui précède on a $\mathcal{U}_\beta \subset C_2 r^{-\theta}\mathcal{U}_\varepsilon + C_2 r^{1-\theta}\mathcal{U}_{\alpha_1}$, $\forall r > 0$.

D'après l'inégalité de la moyenne, il existe une constante $C(\varepsilon) > 0$ telle que

$$\sup_K |g|^2 \leq C(\varepsilon) \int_{D_\varepsilon} |g|^2 \, d\mu_1, \qquad \forall g \in \mathcal{O}(D).$$

Par conséquent, on a

$$\int_K |dg|^2 \, d\mu_0 \leq \mu_0(K) C(\varepsilon) \int_{D_\varepsilon} |g|^2 \, d\mu_1,$$

ce qui prouve que $\mathcal{U}_\varepsilon \subset C'(\varepsilon)\mathcal{U}_0$ où $C'(\varepsilon) = \mu_0(K)C(\varepsilon)$.

On en déduit que $\mathcal{U}_\beta \subset C_2' r^{-\theta}\mathcal{U}_0 + C_2 r^{1-\theta}\mathcal{U}_{\alpha_1}$, $\forall r > 0$, ce qui prouve encore (3.4) pour la constante $\widetilde{C}_2 = \max\{C_2', C_2\}$. ∎

Les inégalités de convexité du théorème 4.1 constituent une version très précise de la propriété $(\overline{\Omega})$ de Vogt [V] pour l'espace de Fréchet $\mathcal{O}(D)$. Cette propriété $(\overline{\Omega})$ a été établie par Aytuna ([A]) pour l'espace $\mathcal{O}(D)$ en démontrant une version plus faible de la proposition 4.2. Sa méthode est basée sur les estimations L^2 de Hörmander [H]; c'est cette méthode que nous avons reprise ici ([Ze,1]).

4. S.D.O.B. et bases de Schauder communes des espaces $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(\widehat{K}_D)$

THÉORÈME 4.1. *Soit (K, D) un condensateur régulier dans $\mathbb{C}^n$. Soit (φ_j) le S.D.O.B. associé à ce condensateur. Alors :*

1) *(φ_j) est une base de Schauder des espaces $\mathcal{O}(D_\alpha)$, $\mathcal{O}(D)$ et $\mathcal{O}(\widehat{K}_D)$, $\widehat{K}_D$ désignant l'enveloppe holomorphe-convexe de K dans D et $D_\alpha = D(K, \alpha)$,* $0 < \alpha < 1$.

2) *Pour tout $\alpha \in \,]0, 1[$ et toute suite complexe (c_j), les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *$\sum c_j \varphi_j$ converge dans $\mathcal{O}(D_\alpha)$,*

(ii) $\displaystyle\limsup_{j\to\infty} \frac{\log |c_j|}{\log \gamma_j} \leq -\alpha.$

3) $\displaystyle\lim_{j\to\infty} \frac{\log |\varphi_j|_{D_\alpha}}{\log \gamma_j} = \alpha, \quad \forall \alpha \in \,]0, 1[\,.$

4) $\displaystyle\mathrm{Reg}\sup \left(\limsup_{j\to\infty} \frac{\log |\varphi_j|}{\log \gamma_j} \right) = \omega(\cdot, K, D)$ *sur* $D \setminus \widehat{K}_D$.

Démonstration. 1) Il suffit de prouver que (φ_j) est une base de $\mathcal{O}(D_\alpha)$, car

$$\mathcal{O}(D) == \lim_{\alpha\uparrow 1} \mathrm{proj}\, \mathcal{O}(D_\alpha), \qquad \mathcal{O}(\widehat{K}_D) = \lim_{\alpha\downarrow 0} \mathrm{ind}\, \mathcal{O}(D_\alpha).$$

(φ_j) est totale dans $\mathcal{O}(D)$, d'après le théorème 2.1. Puisque $\mathcal{O}(D)$ est partout dense dans $\mathcal{O}(D_\alpha)$, (φ_j) est aussi totale dans $\mathcal{O}(D_\alpha)$. Il en résulte que pour tout $f \in \mathcal{O}(D_\alpha)$, sa restriction à K est un élément de l'espace hilbertien H_0.

Soit $f \in \mathcal{O}(D_\alpha)$. Comme élément de H_0, f est la somme de la série $\sum_0^\infty \varphi'_j(f)\varphi_j$, où

$$\varphi'_j(f) = \int_K f\varphi_j \, d\mu_0.$$

Soit $\beta < \alpha$, $\varepsilon > 0$. On va montrer que

$$|\varphi'_j(f)| \le C(\beta,\varepsilon)\|f\|_\beta \gamma_j^{-\beta+\varepsilon}, \qquad \forall j. \tag{4.1}$$

En effet, il est facile de voir que $\|\varphi'_j\|_1^* = \gamma_j^{-1}$, $\|\varphi'_j\|_0^* = 1$, ce qui donne, avec (3.3),

$$\|\varphi'_j\|_\beta^* \le C(\beta,\varepsilon)\gamma_j^{-\beta+\varepsilon}, \qquad \forall j.$$

d'autre part, $\mathcal{O}(D)$ est partout dense dans $\mathcal{O}(D_\alpha)$ et $B_\beta \Subset D_\alpha$; on a donc

$$\|\varphi'_j\|_\beta^* = \sup\{|\varphi'_j(g)| : g \in \mathcal{O}(D_\alpha),\ \|g\|_\beta \le 1\},$$

d'où (4.1).

(2.17) et (4.1) assurent la convergence normale de la série $\sum_{j=0}^\infty \varphi'_j(f)\varphi_j$ sur tout compact de D_α. D'après la proposition 1.2, la somme de cette série est égale à f sur D_α.

2) Supposons $\sum c_j\varphi_j$ convergente dans $\mathcal{O}(D_\alpha)$, soit f sa somme. Alors $c_j = \varphi'_j(f)$ et (ii) est une conséquence immédiate de (4.1).

3) C'est une conséquence facile de (2.17) et de (4.1) appliquée à $f = \varphi_j$, avec $\varphi'_j(\varphi_j) = 1$.

4) Soit

$$u = \operatorname{Reg}\sup\left(\limsup_{j\to\infty} \frac{\log|\varphi_j|}{\log\gamma_j}\right).$$

En raison de (2.13) il suffit de prouver que l'inégalité $u(z) > \omega(z,K,D)$ est impossible, $\forall z \in D \setminus \widehat{K}_D$. Supposons-la vérifié en un point $a \in D \setminus \widehat{K}_D$ et soit $\alpha := \omega(a,K,D)$. A l'aide du lemme de Hartogs on voit facilement qu'il existe une boule ouverte $B \subset D$ de centre a, $C > 0$ et $\beta < \alpha$ tels que

$$|\varphi_j|_B \le C\gamma_j^\beta, \qquad \forall j. \tag{4.2}$$

Soit $f = \sum \varphi'_j(f)\varphi_j$ une fonction holomorphe admettant D_α comme domaine d'holomorphie. Les inégalités (4.1), (4.2) et (2.17) montrent que la série $\sum\varphi'_j(f)\varphi_j$ converge dans $\mathcal{O}(D_\alpha \cup B)$, f est donc analytiquement prolongeable à $D_\alpha \cup B$: c'est impossible. ∎

R e m a r q u e. L'existence de bases communes est démontrée par Zakharyuta ([Za,1]) dans le cas particulier où D est "très fortement pseudoconvexe" par une méthode différente de celle présentée ici (voir [Ze,1]). L'assertion 4 du théorème est due à Nguyen et Siciak dans un cas particulier (voir [N-S]).

Application 1 — Généralisation du théorème de Whittaker

THÉORÈME 4.2. *Soit* (K, D) *un condensateur régulier dans* $\mathbb{C}^n$. *Si* (f_i) *est une base commune des espaces* $\mathcal{O}(D)$ *et* $\mathcal{O}(\widehat{K}_D)$, *alors elle est une base commune des espaces* $\mathcal{O}(D_\alpha)$, $0 < \alpha < 1$.

Démonstration. La première preuve de cet énoncé figure dans [Za1]. Nous en donnons brièvement ici une nouvelle due à Lassere [L]. C'est une conséquence facile de l'assertion suivante : Soit $\mathcal{C}$ une partie équicontinue de $\mathcal{L}(\mathcal{O}(K), \mathcal{O}(K))$. Si sa restriction à $\mathcal{O}(D)$ est une partie équicontinue de $\mathcal{L}(\mathcal{O}(D), \mathcal{O}(D))$, alors sa restriction à $\mathcal{O}(D_\alpha)$ est une partie équicontinue de $\mathcal{L}(\mathcal{O}(D_\alpha), \mathcal{O}(D_\alpha))$, $\forall \alpha \in \,]0, 1[$.

Cette assertion se démontre élémentairement à l'aide de la base (φ_j).

Application 2 — Propriété produit de la fonction extrémale

THÉORÈME 4.3. *Pour* $j = 1, \ldots, p$ *soit* D_j *un ouvert pseudoconvexe de* $\mathbb{C}^{nj}$ *et* E_j *un sous-ensemble* $\mathcal{K}$*-analytique de* D_j. *Alors pour tout* $z = (z_1, \ldots, z_p) \in D_1 \times \ldots \times D_p$ *on a*

$$\omega(z, E_1 \times \ldots \times E_p, D_1 \times \ldots \times D_p) = \max_j \omega(z_j, E_j, D_j). \tag{4.3}$$

Démonstration. C'est une conséquence du Théorème 4.1.4, pour les détails voir [N-S].

5. Isomorphisme d'espaces de fonctions holomorphes. Rappelons quelques résultats de la théorie des échelles hilbertiennes de Mityagin dans le contexte où nous allons les appliquer.

Soit (a_j) une suite croissante de réels > 0 telle que $\lim_{j\to\infty} a_j = \infty$; on note

$$l^2(\exp(\lambda a_j)) := \Big\{\xi = (\xi_j) : \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \exp(2\lambda a_j) < \infty\Big\}.$$

C'est un espace de Hilbert avec la norme $\|\xi\|_\lambda^2 := \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^2 \exp(2\lambda a_j)$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit deux espaces :

$$L_\alpha^2(a_j) = \bigcap_{\lambda<\alpha} l^2(\exp(\lambda a_j)), \quad -\infty < \alpha < \infty, \tag{5.1}$$

$$\overline{L}_\alpha^2(a_j) = \bigcup_{\lambda>\alpha} l^2(\exp(\lambda a_j)), \quad -\infty < \alpha < \infty. \tag{5.2}$$

Le premier espace est une limite projective, c'est un espace de Fréchet; le deuxième est une limite inductive.

Les cas qui nous intéressent vérifient la propriété suivante :

$$\sum_{j=1}^{\infty} e^{-ta_j} < \infty \quad \forall t > 0. \tag{5.3}$$

C'est la condition de nucléarité des espaces (5.1) et (5.2).

Le théorème d'isomorphisme de Mityagin s'exprime dans ce cas particulier de la façon suivante ([Mi]) :

Soient (a_j) et (b_j) deux suites croissantes de réels > 0 vérifiant (5.3). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

$$L^2_\alpha(a_j) \simeq L^2_\alpha(b_j). \tag{5.4.1}$$

$$0 < \liminf_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} \leq \limsup_{j\to\infty} \frac{a_j}{b_j} < \infty. \tag{5.4.2}$$

$$\overline{L}^2_\alpha(a_j) \simeq \overline{L}^2_\alpha(b_j). \tag{5.4.3}$$

Soit $\varDelta^n$ (resp. $\overline{\varDelta}^n$) le polydisque unité ouvert (resp. fermé). Soit $v : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^n$ une bijection telle que $|v(j)| \leq |v(j+1)|$, $\forall j \in \mathbb{N}^n$. Posons $e_j(z) = z^{v(j)}$ et $v_j = |v(j)|$ pour $j \in \mathbb{N}^*$. Il est facile de voir que $v_j \sim j^{1/n}$ lorsque $j \to \infty$. Il résulte alors des inégalités de Cauchy que l'application linéaire

$$\mathcal{O}(e^\alpha \varDelta^n) \to L^2_\alpha(j^{1/n}), \qquad f = \sum_{j=1}^\infty \xi_j e_j \mapsto \xi = (\xi_j), \tag{5.5}$$

est un isomorphisme pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ qui induit également un isomorphisme de $\mathcal{O}(e^\alpha \overline{\varDelta}^n)$ sur $\overline{L}^2_\alpha(j^{1/n})$.

Les résultats du §4 peuvent également s'interpréter en terme d'isomorphisme. En effet, les estimations (4.9) et (4.10) impliquent que l'application

$$\mathcal{O}(D_\alpha) \to L^2_\alpha(\log \gamma_j), \qquad f = \sum_{j=1}^\infty \xi_j \varphi_j \mapsto \xi = (\xi_j), \tag{5.6}$$

est un isomorphisme pour tout $\alpha \in \,]0,1]$ qui induit un isomorphisme de $\mathcal{O}(K_\alpha)$ sur $\overline{L}^2_\alpha(\log \gamma_j)$ où $\gamma_j = \gamma_j(K, D)$. Nous allons prouver le résultat suivant :

Théorème 5.1. *Soit (K, D) un condensateur P-régulier. Alors on a les propriétés suivantes* :

$$0 < \liminf_{j\to\infty} \frac{\log \gamma_j}{j^{1/n}} \leq \limsup_{j\to\infty} \frac{\log \gamma_j}{j^{1/n}} < \infty, \tag{1}$$

$$\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}(\varDelta^n), \tag{2}$$

$$\mathcal{O}(K) \simeq \mathcal{O}(\overline{\varDelta}^n). \tag{3}$$

Démonstration. La relation (1) est équivalente à (2) grâce aux isomorphismes (5.5), (5.6) via le théorème d'isomorphisme de Mityagin.

Pour démontrer (2), on peut supposer D convexe (voir [Mi-He]). Soit E un polydisque fermé tel que $E \subset D$. Alors (E, D) est un condensateur régulier tel que $\widehat{E}_D = E$. Donc d'après (5.6), $\mathcal{O}(E) \simeq \overline{L}^2_0(\log \gamma'_j)$ où $\gamma'_j = \gamma_j(E, D)$. D'après (5.4) et (5.5), on a

$$0 < \liminf_{j\to\infty} \frac{\log \gamma'_j}{j^{1/n}} \leq \limsup_{j\to\infty} \frac{\log \gamma'_j}{j^{1/n}} < \infty.$$

Puisque $\mathcal{O}(D) \simeq L_1^2(\log \gamma_j')$, il résulte du théorème d'isomorphisme de Mityagin que $\mathcal{O}(D) \simeq \mathcal{O}(\Delta^n)$. D'où l'isomorphisme (2). Les estimations (1) en résultent grâce au théorème de Mityagin ([Mi]).

L'isomorphisme (3) en résulte par le même théorème puisque $\mathcal{O}(K) \simeq \overline{L}_0^2(\log \gamma_j)$. ■

Remarque. L'isomorphisme (2) du théorème 5.1 est dû à Zakharyuta ([Za,1]) dans le cas particulier où D est "très fortement pseudoconvexe". Le cas général est dû à Aytuna ([A]) et a également été annoncé par Zakharyuta ([Za,3]). L'isomorphisme (3) du théorème 5.1 est dû à Zakharyuta ([Za,1], [Za,3]). La démonstration présentée ici semble plus élémentaire.

6. S.D.O.B. et fonctions séparément analytiques. Pour $j = 1, \ldots, p$, soient D_j un ouvert borné de $\mathbb{C}^{n_j}$ et E_j un sous-ensemble non $\mathbb{C}_j^n$-pluripolaire de D_j. On pose

$$X := (D_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p) \cup (E_1 \times D_2 \times E_3 \times \ldots \times E_p) \\ \cup (E_1 \times \ldots \times E_{p-1} \times D_p),$$

$$\widehat{X} := \Big\{(z_1, \ldots, z_p) \in D_1 \times \ldots \times D_p : \sum_{j=1}^{p} \omega(z_j, E_j, D_j) < 1\Big\}.$$

Une fonction $f(z_1, \ldots, z_p)$ définie sur X est dite *séparément analytique* sur X lorsque pour tout $k = 1, \ldots, p$ et pour $z \in E_1 \times \ldots \times \check{E}_k \times \ldots \times E_p$ ($\check{E}_k$ signifie que E_k n'y figure pas), la fonction $\xi \to f(z_1, \ldots, z_{k-1}, \xi, z_{k+1}, \ldots, z_p)$ est analytique sur D_k.

THÉORÈME 6.1. *On suppose que les E_j sont $\mathcal{K}$-analytiques sauf au plus un, et que les ouverts bornés D_j correspondants sont pseudoconvexes. Alors pour toute fonction f séparément analytique sur X, il existe une et une seule fonction $\widehat{f}$ analytique sur $\widehat{X}$ telle que $f = \widehat{f}$ sur $X \cap \widehat{X}$.*

La démonstration est divisée en plusieurs étapes :

1) *Existence de $\widehat{f}$, cas $p=2$.* Ce cas $p=2$ a été traité dans [N-Z,2]. On résume ici la preuve. On peut supposer $D := D_1$ pseudoconvexe et $E := E_1$ $\mathcal{K}$-analytique. On pose $G := D_2$, $F := E_2$.

On se ramène au cas où *E est compact et f continue et bornée sur $E \times G$.* Sous ces conditions, on choisit une suite croissante (D_s) d'ouverts hyperconvexes telle que $E \subset D_s \Subset D$ et $\bigcup D_s = D$. Pour s fixé, soit (φ_j) le S.D.O.B. associé au condensateur $\widetilde{E} := E \cap \widetilde{D}_s$.

Pour $w \in F$, $f(\cdot, w)$ est holomorphe sur D, donc c'est un élément de $\mathcal{O}^2(\widetilde{D}_s, d\mu_1)$ et peut s'écrire $f(\cdot, w) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j(w)\varphi_j$, avec

$$C_j(w) = \int_{\tilde{E}} f(z, w)\overline{\varphi}_j(z)\, d\mu_0(z), \qquad \mu_0 = (dd^c\omega(\cdot, \widetilde{E}, \widetilde{D}_s))^{n_1}.$$

L'intégrale définit une fonction analytique sur G que l'on note encore par C_j. Par des majorations adéquates utilisant (2.12) et (2.13), on montre que la série $\sum_{j=0}^{\infty} C_j(w)\varphi_j(z)$ converge uniformément sur tout compact de l'ouvert

$$\begin{aligned} X_s &:= \{(z,w) \in \widetilde{D}_s \times G : \omega(z,\widetilde{E},\widetilde{D}_s) + \omega(w,F,G) < 1\} \\ &= \{(z,w) \in D_s \times G : \omega(z,E,D_s) + \omega(w,F,G) < 1\}. \end{aligned}$$

Soit $F_s(z,w)$ la somme de cette série. Elle est évidemment égale à $f(z,w)$ sur $X_s \cap (\widetilde{D}_s \times F) = X_s \cap (D_s \times F)$, on vérifie qu'elle l'est encore sur $X_s \cap (\widetilde{E}_s \times G) = X_s \cap (E \times G)$. On vérifie ensuite que $F_s = F_{s+1}$ sur X_s. Ces vérifications utilisent (1.4bis). On obtient $\widehat{f}$ en "recollant les morceaux" (X_s, F_s) et en remarquant que $\bigcup X_s = \widehat{X}$.

2) *Existence de* $\widehat{f}$, *cas* $p > 2$. On a besoin de quelques nouvelles notations. Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in (\mathbb{R}_*^+)^p$, on pose

$$\begin{aligned} D_j^{\alpha_j} &:= \{\xi \in D_j : \omega(\xi, E_j, D_j) < \alpha_j\}, \quad & D^\alpha &:= D_1^{\alpha_1} \times \ldots \times D_p^{\alpha_p}, \\ E_j^{\alpha_j} &:= E_j \cap D_j^{\alpha_j}, & E^\alpha &= E_1^{\alpha_1} \times \ldots \times E_p^{\alpha_p}. \end{aligned}$$

On peut supposer $E_1, \ldots, E_{p-1}$ $\mathcal{K}$-analytiques et $D_1, \ldots, D_{p-1}$ pseudoconvexes. On raisonne par récurrence en supposant que l'énoncé est vrai pout $p-1$.

(i) Soit T_p le simplexe $\{(x_1, \ldots, x_p) \in (\mathbb{R}_*^+)^p : \sum_{j=1}^p x_j \le 1\}$. On va montrer que pour tout $\alpha \in T_p$ il existe une fonction f_α analytique sur D^α telle que $f_\alpha = f$ sur $D^\alpha \cap X$. On pose $\theta_j = \alpha_j(1-\alpha_p)^{-1}$ pour $j = 1, \ldots, p-1$, $D^\theta = D_1^{\theta_1} \times \ldots \times D_{p-1}^{\theta_{p-1}}$, $E^\theta = E_1^{\theta_1} \times \ldots \times E_{p-1}^{\theta_{p-1}}$. Puisque f est séparément analytique sur X, $f(z,\cdot)$ est analytique sur D_p pour $z \in E^\theta$, pour $w \in F$, $f(\cdot, w)$ est séparément analytique sur

$$X_* := (D_1 \times E_2 \times \ldots \times E_{p-1}) \cup \ldots \cup (E_1 \times \ldots \times E_{p-2} \times D_{p-1}).$$

Donc, par hypothèse de récurrence, il existe une fonction $\widehat{f}_w$ analytique sur $\widehat{X}_*$ telle que $\widehat{f}_w = f(\cdot, w)$ sur $\widehat{X}_* \cap X_*$. On remarque que $D^\theta \subset \widehat{X}_*$, car $\sum_{j=1}^{p-1} \theta_j \le 1$. On considère sur

$$Y := (D^\theta \times E_p) \cup (E^\theta \times D_p)$$

la fonction $\widetilde{f}$,

$$\widetilde{f}(z,w) = \begin{cases} f(z,w) & \text{si } (z,w) \in E^\theta \times D_p, \\ \widehat{f}_w(z) & \text{si } (z,w) \in D^\theta \times E_p. \end{cases}$$

$\widetilde{f}$ est séparément analytique sur Y et égale à f sur $Y \cap X$, donc d'après le cas $p = 2$ il existe une fonction g analytique sur

$$\widehat{Y} = \{(z,w) \in D^\theta \times D_p : \omega(z, E^\theta, D^\theta) + \omega(w, E_p, D_0) < 1\}$$

telle que $g = \widetilde{f}$ sur $\widehat{Y} \cap X$.

La propriété produit de la fonction extrémale (4.3) et (1.4) donnent, pour $z = (z_1, \ldots, z_{p-1}) \in D^\theta$,

$$\omega(z, E^\theta, D^\theta) = \max_{1 \le j \le p-1} \frac{1-\alpha_p}{\alpha_j} \omega(z_j, E_j, D_j).$$

Pour $(z, W) \in D^\alpha \subset D^\theta \times D_p^{\alpha_p}$ on a

$$\omega(z, E^\theta, D^\theta) + \omega(w, E_p, D_0) < 1 - \alpha_p + \alpha_p = 1,$$

donc $D^\alpha \subset \widehat{Y}$. On remarque que $f = g$ sur $D^\alpha \cap X$; en effet, $\widetilde{f} = f = g$ sur $\widehat{Y} \cap Y \cap X$ qui contient $D^\alpha \cap X$ car $D^\alpha \subset \widehat{T}$ et $D^\alpha \cap X \subset Y \cap X$. On obtent donc le résultat annoncé en posant $f_\alpha = g$.

(ii) Terminons maintenant la preuve de l'existence de $\widehat{f}$. Soient $\alpha, \beta \in T_p$, soient f_α et f_β comme dans (i). Alors $f_\alpha = f_\beta$ sur $D^\alpha \cap D^\beta \cap X$ qui contient E^γ, avec $\gamma = (\min(\alpha_1, \beta_1), \ldots, \min(\alpha_p, \beta_p))$. Or d'après (1.4bis), E^γ est "localement" non pluripolaire dans $D^\gamma = D^\alpha \cap D^\omega$, donc $f_\alpha = f_\beta$ sur $D^\alpha \cap D^\beta$. On peut donc recoller les morceaux (D^α, f_α) pour tous les $\alpha \in T_p$: on obtient une fonction $\widehat{f}$ analytique sur

$$\widehat{X} = \bigcup_{\alpha \in T_p} D^\alpha$$

et égale à f sur $\widehat{Y} \cap X$.

3) *Unicité*. Si g est analytique sur $\widehat{X}$ et égale à f sur $\widehat{X} \cap X$, alors pour tout $\alpha \in T_p$, $\widehat{f}$ et g sont analytiques sur $D^\alpha \subset \widehat{X}$ et égales sur E^α qui est "localement" non pluripolaire dans D^α, donc identiques sur D^α. Par conséquent $\widehat{f} = g$ sur $\widehat{X}$, réunion des D^α.

R e m a r q u e s. 1) Le théorème 5.1 est une extension du théorème bien connu de J. Siciak ([Si,1]).

2) Dans le cas $p = 2$, l'hypothèse que $D = D_1$ et $G = D_2$ sont bornés, oubliée dans [N-Z,2], est faite pour garantir les propriétés de convergence de la fonction extrémale. Plus précisément, si D est un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, alors :

• pour toute suite croissante (E_s) de sous-ensembles de $\mathbb{C}^n$,

$$\omega(z, E_s, D) \searrow \omega\Big(z, \bigcup E_s, D\Big), \quad \forall z \in D,$$

• pour toute suite croissante (D_s) d'ouverts de $\mathbb{C}^n$ telle que $\bigcup D_s = D$ et tout $E \subset \mathbb{C}^n$,

$$\omega(z, E_s, D) \searrow \omega(z, E, D), \quad \forall z \in D.$$

Lorsque D et G ne sont pas bornés (D ouvert pseudoconvexe, G ouvert), la démonstration de [N-Z,2] est valable sous les hypothèses suivantes :

• Il existe une suite croissante d'ouverts hyperconvexes (D_t) telle que $D_t \Subset D$, $\bigcup D_t = D$ et que

$$\lim_{t\to\infty} \omega(z, E\cap D_s, D_t) = \omega(z, E\cap D_s, D), \qquad \forall z \in D,\ \forall s,$$
$$\lim_{s\to\infty} \omega(z, E\cap D_s, D) = \omega(z, E, D), \qquad \forall z \in D.$$

• Il existe une suite croissante d'ouverts (G_t) ayant les mêmes propriétés par rapport au couple (F, G).

Ces hypothèses sont satisfaites lorsque E et F sont des compacts P-réguliers dans D et G respectivement, avec D, G pseudoconvexes : on retrouve le résultat de Zakharyuta [Za,2].

Elles sont également satisfaites lorsque D et G sont hyperconvexes ([K]).

3) Dans son article de synthèse sur les fonctions plurisousharmoniques [Sa], A. Sadullaev a donné brièvement une autre démonstration du théorème 5.1 avec $p = 2$, D_i pseudoconvexe et E_i borélien $(i = 1, 2)$.

Note. V. P. Zakharyuta nous a aimablement communiqué son texte polycopié "Espaces de fonctions analytiques" (95 pages en Russe). On y trouve des énoncés semblables à certains résultats de notre texte avec des techniques de démonstrations différentes.

Bibliographie

[A] A. Aytuna, *On Stein manifolds M for which $\mathcal{O}(M)$ is isomorphic to $\mathcal{O}(\Delta^n)$ as Fréchet spaces*, Manuscripta Math. 62 (1988), 297–315.

[B-T] E. Bedford and B. A. Taylor, *A new capacity for plurisubharmonic functions*, Acta Math. 149 (1982), 1–41.

[Be] S. Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping*, Math. Surveys 5, Amer. Math. Soc., 1950.

[H-M] G. Henkin and B. Mityagin, *Linear problems of complex analysis*, Russian Math. Surveys 26 (1972), 99–164.

Ho] L. Hörmander, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland, 1973.

[K] M. Klimek, *Pluripotential Theory*, Oxford University Press, 1991.

[L] P. Lassere, *Interpolation d'opérateurs entre espaces de fonctions holomorphes*, Ann. Polon. Math. 56 (1991), 97–102.

[M] B. Mityagin, *Approximate dimensions and bases in nuclear spaces*, Russian Math. Surveys 16 (1961), 59–127.

[N-S] T. V. Nguyen et J. Siciak, *Fonctions plurisousharmoniques extrémales et systèmes doublement orthogonaux de fonctions holomorphes*, Bull. Sci. Math. (2) 115 (1991), 235–244.

[N-Z,1] T. V. Nguyen et A. Zeriahi, *Familles de polynômes presque partout bornées*, Bull. Sci. Math. (2) 107 (1983), 81–91.

[N-Z,2] —, —, *Une extension du théorème de Hartogs sur les fonctions séparément analytiques*, dans : Analyse complexe multivariable, Récents Développements, A. Meril (éd.), Editel, Rende, 1991, 183–194.

[R-N] F. Riesz et B. Sz. Nagy, *Leçons d'Analyse Fonctionnelle*, Académie des Sciences de Hongrie, 1952.

[Sa] A. Sadullaev, *Fonctions plurisousharmoniques*, dans : Progrès en Mathématiques, Itogi Nauki 8, 274 (1985), 65–113 (en russe).

[Si,1] J. Siciak, *Separately analytic functions and envelopes of holomorphy of some lower dimensional subsets of* $\mathbb{C}^n$, Ann. Polon. Math. 22 (1969), 145–171.

[Si,2] —, *Extremal plurisubharmonic functions in* $\mathbb{C}^n$, ibid. 39 (1981), 175–211.

[V] D. Vogt, *Eine Charakterisierung der Potenzreihenräume von endlichem Typ und ihre Folgerungen*, Manuscripta Math. 37 (1982), 269–301.

[Za,1] V. P. Zakharyuta, *Fonctions plurisousharmoniques*, *échelles hilbertiennes et isomorphismes d'espaces de fonctions analytiques de plusieurs variables*, *I et II*, Teor. Funktsiĭ Funktsional. Anal. i Prilozhen. 19 (1974), 133–157, et 21 (1974), 65–83 (en russe).

[Za,2] —, *Separately analytic functions*, *generalizations of Hartog's theorem and envelopes of holomorphy*, Math. USSR-Sb. 30 (1976), 51–67.

[Za,3] —, *Isomorphisms of spaces of analytic functions*, Soviet Math. Dokl. 22 (1980), 631–634.

[Ze,1] A. Zeriahi, *Bases de Schauder et isomorphismes d'espaces de fonctions holomorphes*, C. R. Acad. Sci. Paris 310 (1990), 691–694.

[Ze,2] —, *Fonction de Green pluricomplexe à pôle à l'infini sur un espace de Stein parabolique et applications*, Math. Scand. 69 (1991), 89–126.