TOPICS IN COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 31
INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
WARSZAWA 1995

PHÉNOMÈNE DE HARTOGS-BOCHNER DANS LES VARIÉTÉS *CR*

CHRISTINE LAURENT-THIEBAUT
Université de Grenoble I, Institut Fourier
Laboratoire de Mathématiques associé au CNRS (URA 188)
B.P. 74, 38402 Saint-Martin-d'Hères Cedex, France

L'origine de l'étude de l'extension globale des fonctions CR remonte au théorème de Hartogs sur l'extension des fonctions holomorphes définies au voisinage du bord d'un domaine borné, à bord connexe régulier de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$.

Au début des années 1940, Bochner [Bo] et Martinelli [Ma 1] donnent indépendamment une démonstration rigoureuse de ce théorème. Plus précisément Bochner démontre que si D est un domaine borné à bord connexe de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie sur ∂D et vérifiant $\bar\partial_b f = 0$, s'étend en une fonction holomorphe sur D et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\bar D$.

De nombreux auteurs ont alors travaillé sur le sujet, citons entre autres Martinelli [Ma 2], qui a donné une expression intégrale du prolongement F de f, et Weinstock [W], qui a obtenu une caractérisation des fonctions f continues sur ∂D possédant la propriété d'extension holomorphe au domaine D tout entier.

En 1972, Andreotti et Hill [An/Hi] ont montré que le résultat prouvé par Bochner reste vrai si on remplace $\mathbb{C}^n$ par une variété analytique complexe M vérifiant $H^1_c(M, \mathcal{O}) = 0$, et le cas où la donnée f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur le bord du domaine a été résolu indépendamment par Čirka [Či] et Harvey et Lawson [Ha/La] en 1975.

Vers le milieu des années 1980 ce problème d'extension globale des fonctions CR a été généralisé dans deux directions différentes.

La première est de considérer des fonctions CR qui ne sont définies que sur une partie du bord du domaine. Les premiers résultats dans ce cadre ont été obtenus par Lupacciolu et Tomassini [Lu/To] puis par Lupacciolu [Lu]. Leurs travaux ont été ensuite généralisés par différents auteurs (cf. [St], [L-T], [L-T/L], [Lu 2]).

1991 *Mathematics Subject Classification*: 32D15, 32F10.
The paper is in final form and no version of it will be published elsewhere.

La seconde est de remplacer la variété analytique complexe M par une sous-variété CR d'une variété analytique complexe. C'est ce thème, initialisé par Henkin [He 2], qui fait l'objet de cet article.

1. Position du problème. On considère une variété analytique complexe X de dimension n et un fibré vectoriel holomorphe E sur X.

Soit M une sous-variété réelle de classe $\mathcal{C}^\ell$ de X, $\ell \geq 1$, définie par

$$M = \{z \in X \mid \rho_1(z) = \cdots = \rho_k(z) = 0\}, \quad 1 \leq k \leq n \tag{1.1}$$

où les ρ_ν, $1 \leq \nu \leq k$, sont des fonctions à valeurs réelles de classe $\mathcal{C}^\ell$ sur X, vérifiant $d\rho_1 \wedge \cdots \wedge d\rho_k \neq 0$ sur M.

On note $T_\tau^{\mathbb{C}}(M)$ l'espace tangent complexe à M au point $\tau \in M$, i.e.

$$T_\tau^{\mathbb{C}}(M) = \Big\{\zeta \in \mathbb{C}^n \,\Big|\, \sum_{j=1}^n \frac{\partial \rho_\nu}{\partial z_j}(\tau)\zeta_j = 0,\ \nu = 1, \ldots, k\Big\}.$$

On a $\dim_{\mathbb{C}} T_\tau^{\mathbb{C}}(M) \geq n - k$.

Définition 1.1. La variété M est une *variété CR* si $\dim_{\mathbb{C}} T_\tau^{\mathbb{C}}(M)$ est indépendante du point $\tau \in M$. On dit que M est une *variété CR générique* si pour tout $\tau \in M$, $\dim_{\mathbb{C}} T_\tau^{\mathbb{C}}(M) = n - k$.

Définition 1.2. Soit M une sous-variété CR générique de classe $\mathcal{C}^\ell$, $\ell \geq 2$, de X; on dira que M est *q-concave*, $0 \leq q \leq n - k$, si pour tout $\tau \in M$ et tout $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ la forme quadratique sur $T_\tau^{\mathbb{C}}(M)$

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \rho_x}{\partial z_\alpha \partial \bar{z}_\beta}(\tau)\zeta_\alpha \bar{\zeta}_\beta, \qquad \text{où } \rho_x = x_1\rho_1 + \cdots + x_k\rho_k \text{ et } \zeta \in T_\tau^{\mathbb{C}}(M),$$

a au moins q valeurs propres strictement négatives.

Exemple 1.3. Une hypersurface réelle M de classe $\mathcal{C}^\ell$, $\ell \geq 2$, définie par $M = \{z \in X \mid \rho(z) = 0\}$, où ρ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\ell$ de X dans $\mathbb{R}$ vérifiant $d\rho(z) \neq 0$ si $z \in M$, est une variété CR générique.

Dire que M est q-concave signifie alors que la restriction à $T_\tau^{\mathbb{C}}(M)$ de la forme de Levi de ρ au point $\tau \in M$ possède au moins q valeurs propres strictement positives et q valeurs propres strictement négatives. Dans ce cas, on dira que l'hypersurface M est *q-convexe-concave*.

Définition 1.4. Une variété M de la forme (1.1) est dite *presque CR* si le complémentaire dans M de l'ensemble $S_M = \{z \in M \mid \bar\partial\rho_1(z) \wedge \cdots \wedge \bar\partial\rho_k(z) = 0\}$ est dense dans M.

Définition 1.5. Soit V une sous-variété de classe $\mathcal{C}^1$ de X de codimension réelle k, une section $f \in \mathcal{C}^\alpha(V, E)$, $\alpha \geq 0$, du fibré E sur V, est appelée *section*

CR de classe $\mathcal{C}^\alpha$ si pour toute $\varphi \in \mathcal{D}_{n,n-k-1}(X, E^*)$

$$\int_V f\bar{\partial}\varphi = 0.$$

DÉFINITION 1.6. Soit V une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de X, une section $f \in \mathcal{C}^\infty(V, E)$ du fibré E sur V est *une section CR de classe* $\mathcal{C}^\infty$ si f admet une extension $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ à un voisinage de V telle que $\bar{\partial}\tilde{f}$ s'annule à l'ordre infini sur V.

Remarque. Si V est une variété CR générique et $f \in \mathcal{C}^\infty(V, E)$, les notions de section CR au sens des définitions 1.5 et 1.6 coïncident ([Ai/He], lemme 2.2.1).

DÉFINITION 1.7. Nous dirons qu'une sous-variété CR, M, de X *vérifie le principe du prolongement analytique* si toute section CR, f, de E sur un ouvert connexe Ω de M qui s'annule identiquement au voisinage d'un point $\tau \in \Omega$ est identiquement nulle.

EXEMPLES. 1) Si M est une sous-variété analytique complexe de X elle vérifie bien évidemment le principe du prolongement analytique.

2) On déduit aisément du théorème 3 de [He 1] qu'une sous-variété CR générique 1-concave de X vérifie le principe du prolongement analytique.

DÉFINITION 1.8. Soient M une sous-variété CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ d'une variété analytique complexe X de dimension n et K un compact de M. Nous dirons que *le triplet* (X, M, K) *possède la propriété de Hartogs-Bochner* $\mathcal{C}^\infty$ si, pour tout domaine D relativement compact dans M tel que $M \setminus \bar{D}$ soit connexe, $K \subset \partial D$ et que $\partial D \setminus K$ soit une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $M \setminus K$ et pour toute section CR de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\partial D \setminus K, E)$, il existe $F \in \mathcal{C}^\infty(\bar{D} \setminus K, E)$ telle que F est CR sur D et $F|_{\partial D \setminus K} = f$.

L'objet de cet article est de donner des conditions sur le triplet (X, M, K) pour qu'il possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.

Remarquons qu'il existe des hypersurfaces M de $\mathbb{C}^n$ telles que $(\mathbb{C}^n, M, \emptyset)$ ne possède pas la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$. En effet, prenons $M = \partial B$ où B est la boule unité de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 2$, et considérons un domaine $D \subset\subset M$ à bord $\mathcal{C}^\infty$ tel que $p = (1, 0, \ldots, 0) \in D$. Posons $F(z) = \frac{1}{z_1 - 1}$, F est holomorphe dans $\bar{B} \setminus \{p\}$ et par conséquent $f = F|_{\partial D}$ est CR sur ∂D mais n'admet pas d'extension CR à D tout entier. Ce contre-exemple peut se généraliser en prenant pour M le bord d'un domaine strictement pseudoconvexe d'une variété analytique complexe.

Dans un premier temps, nous cherchons des conditions cohomologiques assurant que le triplet (X, M, K) possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$, ceci par analogie avec le phénomène de Hartogs-Bochner dans les variétés analytiques complexes.

Nous donnons ensuite des conditions géométriques suffisantes sur X, M et K pour que les conditions cohomologiques précédentes soient réalisées.

Pour finir nous étudions la régularité dans le phénomène de Hartogs-Bochner. Plus précisément, on considère un triplet (X, M, K) et un domaine D relativement compact dans M tel que $M \setminus \bar{D}$ soit connexe, $K \subset \partial D$ et que $\partial D \setminus K$ soit une sous-variété presque CR de classe $\mathcal{C}^1$ de $M \setminus K$. On s'intéresse alors au problème suivant : si f est une fonction CR, höldérienne d'ordre $\alpha \geq 0$ sur $\partial D \setminus K$, existe-t-il une fonction CR, F, sur D qui prolonge continûment f ? Quelle est la régularité de F sur $\partial D \setminus K$?

2. Conditions cohomologiques. Soient X une variété analytique complexe de dimension n, E un fibré vectoriel holomorphe sur X, M une sous-variété CR de X et K un compact de M.

Il est bien connu depuis Ehrenpreis [Eh] que si M est une variété analytique complexe vérifiant $H^1_c(M, \mathcal{O}) = 0$ le triplet $(X, M, \emptyset)$ possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$ (cf. [An/Hi]). Soit Φ la famille des fermés de $M \setminus K$ qui sont relativement compacts dans M; Lupacciolu [Lu 1] a prouvé dans le cas où M est une variété analytique complexe que si $H^1_\Phi(M, K, \mathcal{O}) = 0$ alors le triplet (X, M, K) possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$. Remarquons que, si K est vide, les deux familles de supports Φ et c sont identiques et par conséquent les deux conditions coïncident.

Nous allons prouver qu'une condition analogue aux précédentes est encore suffisante pour qu'une variété CR, qui vérifie le principe du prolongement analytique, possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.

Nous noterons $H^{0,1}_{\bar{\partial}_b, \Phi}(M \setminus K, E)$ le groupe de $\bar{\partial}_b$ cohomologie à valeurs dans E et à support dans Φ de bidegre $(0,1)$, c'est-à-dire le quotient de l'espace des $(0,1)$-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\bar{\partial}_b$-fermées dans $M \setminus K$, à valeurs dans E et à support dans Φ, par l'espace des $(0,1)$-formes qui sont le $\bar{\partial}_b$ de sections $\mathcal{C}^\infty$ de E sur $M \setminus K$, à support dans Φ. Lorsque M est une variété analytique complexe il y a identité entre les groupes $H^1_\Phi(M, \mathcal{O}(E))$ et $H^{0,1}_{\bar{\partial}, \Phi}(M, E)$ d'après le théorème de Dolbeault.

THÉORÈME 2.1. *Soient M une sous-variété CR de X qui vérifie le principe du prolongement analytique et K un compact de M. On suppose que*

$$H^{0,1}_{\bar{\partial}_b, \Phi}(M \setminus K, E) = 0,$$

alors (X, M, K) possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration. On considère un domaine D relativement compact dans M tel que $M \setminus \bar{D}$ soit connexe, $K \subset \partial D$ et $\partial D \setminus K$ soit une sous-variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $M \setminus K$ et une section CR de classe $\mathcal{C}^\infty$ de E, $f \in \mathcal{C}^\infty(\partial D \setminus K, E)$, sur $\partial D \setminus K$. Par définition, f se prolonge en une fonction $\tilde{f}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \setminus K$ telle que $\bar{\partial} \tilde{f}$ s'annule à l'ordre ∞ sur $\partial D \setminus K$.

Posons $g = \chi_{\bar{D}}(\bar{\partial} \tilde{f})$ où $\chi_{\bar{D}}$ est la fonction caractéristique de $\bar{D}$, g est alors une $(0,1)$-forme de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \setminus K$, à valeurs dans E dont le support est contenu dans $\bar{D} \setminus K$.

Puisque $\bar{D} \setminus K$ est un élément de Φ, on déduit de l'hypothèse qu'il existe une section $h \in \mathcal{C}^\infty(M \setminus K, E)$ dont le support appartient à Φ et qui vérifie $\bar{\partial}_b h = g$. Par conséquent, h est CR sur $M \setminus \bar{D}$ et s'annule sur un ouvert non vide de $M \setminus \bar{D}$. Grâce à la connexité de $M \setminus \bar{D}$ et au principe de prolongement analytique h est identiquement nulle sur $M \setminus \bar{D}$.

Posons $F = \tilde{f} - h$; F est une section $\mathcal{C}^\infty$ de E sur $\bar{D} \setminus K$ qui vérifie $\bar{\partial}_b F = \bar{\partial}_b \tilde{f} - \bar{\partial}_b h = g - \bar{\partial}_b h = 0$ sur D et qui est donc CR sur D. De plus $F|_{\partial D \setminus K} = f$ car h est nulle sur $M \setminus (D \cup K)$. ∎

COROLLAIRE 2.2. *Soit M une sous-variété CR de X qui vérifie le principe du prolongement analytique telle que $H^{0,1}_{\bar{\partial}_b,c}(M,E) = 0$. Alors $(X, M, \emptyset)$ possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.*

D é m o n s t r a t i o n. Lorsque $K = \emptyset$, la famille Φ coïncide avec la famille des compacts de M et le corollaire est une conséquence immédiate du théorème 2.1. ∎

En suivant les idées données par Lupacciolu (cf. [Lu 1], th. 2.1) dans les variétés analytiques complexes, on peut prouver aisément le résultat suivant (cf. [L-T 2], lorsque M est une hypersurface).

THÉORÈME 2.3. *Soient M une sous-variété CR de X qui vérifie le principe du prolongement analytique et K un compact de M. On suppose que*

(i) $H^{0,1}_{\bar{\partial}_b,c}(M,E) = 0$.

(ii) *K possède une suite décroissante de voisinages $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans M telle que $K = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, $M \setminus \bar{U}_n$ est connexe et l'application*

$$H^{0,2}_{\bar{\partial}_b,c}(U_n) \to H^{0,2}_{\bar{\partial}_b,c}(M)$$

induite par inclusion est injective pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors (X, M, K) possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.

3. Conditions géométriques. Pour la plupart des conditions géométriques énoncées dans ce paragraphe nous utiliserons la notion de q-convexité introduite dans [He/Le].

DÉFINITION 3.1. Une fonction ρ de classe $\mathcal{C}^2$ sur une variété analytique complexe X de dimension n, à valeurs réelles est dite *q-convexe*, $1 \le q \le n$, si sa forme de Levi possède au moins q valeurs propres strictement positives en tout point de X.

DÉFINITION 3.2. Une variété analytique complexe X de dimension n est *complètement q-convexe*, $0 \le q \le n-1$, si elle possède une fonction d'exhaustion $(q+1)$-convexe.

Un domaine Ω relativement compact dans une variété analytique complexe X de dimension n est *complètement strictement q-convexe*, $0 \le q \le n-1$, s'il existe une fonction $(q+1)$-convexe, φ, définie dans un voisinage $U_{\bar{\Omega}}$ de $\bar{\Omega}$ telle que $\Omega = \{z \in U_{\bar{\Omega}} \mid \varphi(z) < 0\}$.

Définition 3.3. Soit Ω un domaine d'une variété analytique complexe X de dimension n. On dit que X est une extension q-convexe de Ω, $0 \leq q \leq n-1$, si $\partial\Omega$ est compact et s'il existe une fonction $(q+1)$-convexe, ρ, définie sur un voisinage U de $X \setminus \Omega$ telle que $\Omega \cap U = \{z \in U \mid \rho(z) < 0\}$ et pour tout réel α, $0 < \alpha < \sup_{z\in U} \rho(z)$, l'ensemble $\{z \in U \mid 0 \leq \rho(z) \leq \alpha\}$ est compact.

Dans ce paragraphe, X désignera une variété analytique complexe de dimension n, E un fibré vectoriel holomorphe sur X, M une sous-variété CR de X de classe $\mathcal{C}^\infty$ de la forme (1.1) et K un compact de M.

Considérons tout d'abord le cas où $K = \emptyset$ et $X = \mathbb{C}^n$. Les premiers résultats sur le phénomène de Hartogs-Bochner pour les variétés CR, dans ce cadre, ont été donnés par Naruki [N] lorsque M est 2-concave et par Henkin [He 2] lorsque M est seulement 1-concave mais avec une hypothèse restrictive de petit diamètre sur les domaines de M auxquels le phénomène s'applique.

Le théorème suivant généralise à la fois le résultat de Naruki et celui de Henkin.

Théorème 3.4 ([L-T 1], th. 3.2). *Soient M une sous-variété CR générique d'un ouvert X de $\mathbb{C}^n$ de codimension réelle k, $k < n-1$, et D un domaine relativement compact de M à bord $\mathcal{C}^\infty$ tel que $M \setminus D$ soit connexe.*

On suppose que M est 1-concave et que l'on peut trouver un domaine borné $B \subset\subset X$ strictement pseudoconvexe contenant $\bar{D}$ tel que pour tout voisinage V de $B \cap M$, il existe deux domaines bornés Δ et Ω vérifiant

(i) $\bar{D} \subset \Delta \subset\subset V$, $\bar{\Delta} \subset \Omega$.
(ii) *Ω est complètement $(k+1)$-convexe.*
(iii) *Ω est une extension k-convexe de Δ.*

Pour toute section CR de classe $\mathcal{C}^\infty$, $f \in \mathcal{C}^\infty(\partial D, E)$, il existe $F \in \mathcal{C}^\infty(\bar{D}, E)$ telle que F est CR sur D et $F|_{\partial D} = f$.

Le théorème 3.4 est une conséquence du théorème de Hahn-Banach et d'un théorème d'approximation dû à Andreotti et Grauert [An/G].

Corollaire 3.5 (Naruki [N]). *Soit M une sous-variété CR générique d'un ouvert X de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 5$, de la forme* (1.1). *On suppose que X est strictement pseudoconvexe et que M est 2-concave alors $(X, M, \emptyset)$ possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.*

C'est une conséquence immédiate du théorème 3.4, les domaines Δ et Ω étant construits à l'aide de voisinages tubulaires de M. ∎

Remarque. On peut généraliser facilement le corollaire 3.5 au cas où X est une variété de Stein.

Corollaire 3.6 (Henkin [He 2], th. 1). *Soit M une sous-variété CR générique d'un ouvert X de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$, de la forme* (1.1). *On suppose que M est 1-concave, alors, si Θ est un domaine borné strictement pseudoconvexe "assez petit" de $\mathbb{C}^n$, le triplet $(\Theta, \Theta \cap M, \emptyset)$ possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.*

Précisons ce que signifie “assez petit” pour Henkin. On note W un domaine tel que $W \subset\subset X$ et on pose $M_\varepsilon = \{z \in W \mid \rho_1(z) = \varepsilon_1, \ldots, \rho_k(z) = \varepsilon_k\}$ où $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k)$. Soit $\varepsilon_0 > 0$ tel que la variété M_ε soit 1-concave pour tout ε vérifiant $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. On désigne alors par W_0 la réunion $\bigcup_{|\varepsilon|<\varepsilon_0} M_\varepsilon$. Dire que Θ est “assez petit” signifie $\Theta \subset\subset W_0$. Pour obtenir le corollaire il suffit alors d'appliquer le théorème 3.4 en prenant pour Ω des domaines strictement pseudoconvexes relativement compacts dans Θ et pour Δ des domaines construits à partir de voisinages tubulaires de M.

Le théorème 3.4 peut être généralisé au cas où X est une variété analytique complexe possédant certaines propriétés de convexité holomorphe si l'on se restreint au cas où M est une hypersurface.

THÉORÈME 3.7 ([L-T 2], cor. 2.1.3). *Soit X une variété analytique complexe complètement 2-convexe de dimension n, $n \geq 3$. On notera φ une fonction d'exhaustion 3-convexe de X. Soit M une hypersurface réelle $\mathcal{C}^\infty$ de X telle que $X \setminus M$ possède exactement deux composantes connexes. On suppose qu'il existe deux fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur X, ρ^+ et ρ^-, vérifiant $d\rho^+(z) \neq 0$ et $d\rho^-(z) \neq 0$ pour tout $z \in X$ et telles que :*

a) $M = \{z \in X \mid \rho^+(z) = 0\} = \{z \in X \mid \rho^-(z) = 0\}$.

b) $X^+ = \{z \in X \mid \rho^+(z) > 0\} = \{z \in X \mid \rho^-(z) > 0\}$. *et* $X^- = X \setminus \bar{X}^+$

c) *Pour tout λ et μ, $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$, les fonctions $\lambda\rho^+ + \mu\varphi$ et $-\lambda\rho^- + \mu\varphi$ sont 2-convexes sur X^+ et X^- respectivement.*

Alors, le triplet $(X, M, \emptyset)$ possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.

Grâce à une étude de la théorie d'Andreotti-Grauert dans les demi-espaces fermés et à l'utilisation de la suite de Mayer-Vietoris pour le couple (X, M), les hypothèses du théorème 3.7 impliquent que $H^{0,1}_{\bar\partial_{b,c}}(M, E) = 0$. Le corollaire 2.2 permet alors de conclure.

On déduit alors aisément du théorème 3.7 le résultat suivant :

COROLLAIRE 3.8 ([L-T 2], cor. 2.1.4). *Soit X une variété de Stein de dimension n, $n \geq 5$, et M une hypersurface réelle 2-convexe-concave de classe $\mathcal{C}^\infty$ de X telle que $X \setminus M$ possède exactement deux composantes connexes. Alors le triplet $(X, M, \emptyset)$ possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.*

On peut remarquer que dans l'ensemble des résultats précédents la variété M est supposée strictement 1-concave. On sait par ailleurs depuis longtemps que si M est une variété de Stein de dimension n, $n \geq 2$, M possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$. De plus, on a montré au paragraphe 1 que si M est une hypersurface strictement pseudoconvexe le triplet $(X, M, \emptyset)$ n'a pas la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$. Il semble alors naturel de se demander si une hypothèse de 1-concavité faible sur M ne serait pas suffisante pour que $(X, M, \emptyset)$ possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$. Des résultats partiels ont été donnés dans ce cadre par Henkin [He 2]; le problème général reste ouvert.

Définition 3.9. Une sous-variété CR, M, de $\mathbb{C}^n$ est dite *standard* si M est de la forme

$$M = \{(z,w) \in \mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^{n-k} \mid \operatorname{Im} z_\nu(w,\bar{w}) = \Phi_\nu(w,\bar{w}),\ \nu = 1,\dots,k\}$$

où les Φ_ν, $\nu = 1,\dots,k$, sont des formes hermitiennes sur $\mathbb{C}^{n-k}$.

Théorème 3.10 ([He 2], th. 2). *Soit M une sous-variété CR standard de $\mathbb{C}^n$, faiblement 1-concave et telle que $\dim_{\mathbb{C}} T^{\mathbb{C}}(M) \geq 2$. Alors $(\mathbb{C}^n, M, \emptyset)$ possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.*

Théorème 3.11 ([He 2], th. 3). *Soit M une sous-variété CR d'un ouvert de $\mathbb{C}^n$ admettant un feuilletage $\mathcal{C}^\infty$ par des courbes complexes et telle que $\dim_{\mathbb{C}} T^{\mathbb{C}}(M) \geq 2$. Alors si Θ est un domaine borné strictement pseudoconvexe "assez petit" de $\mathbb{C}^n$, le triplet $(\Theta, \Theta \cap M, \emptyset)$ possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.*

Considérons maintenant le cas où le compact K est non vide.

Lorsque M est une variété analytique complexe, il existe une littérature assez importante sur le problème de l'extension des fonctions CR définies sur une partie du bord d'un domaine de M (cf. [Lu/To], [Lu 1], [St], [L-T], [L-T/L], [Lu 2], [Ky], ainsi que les références citées dans ces différents articles).

Si M est une hypersurface réelle, le phénomène de Hartogs-Bochner pour (X, M, K) est étudié dans [L-T 2] en utilisant la théorie d'Andreotti-Grauert dans les demi-espaces.

Théorème 3.12 ([L-T 2], th. 3.3). *Soient X une variété analytique complexe de dimension n, $n \geq 5$, M une hypersurface réelle de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans X telle que $X \smallsetminus M$ possède exactement deux composantes connexes X^+ et X^- et $K = S \cap M$. On suppose que*

a) $H^{0,1}_{\bar\partial_b,c}(M,E) = 0$,

b) *S possède une base de voisinages $\mathcal{V}$ telle que, pour tout $V \in \mathcal{V}$, $M \smallsetminus V$ est connexe, X est une extension 2-convexe de V, $V \smallsetminus M$ admet exactement deux composantes connexes V^+ et V^- et les demi-espaces X^+ et X^- sont respectivement des extensions 2-concaves de $X^+ \smallsetminus V^+$ et $X^- \smallsetminus V^-$.*

Alors, le triplet (X, M, K) possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.

Corollaire 3.13 ([L-T 2], th. 3.4). *Soient X une variété de Stein de dimension n, $n \geq 5$, M une hypersurface réelle 2-concave de classe $\mathcal{C}^\infty$ de X et S un compact de Stein dans X tels que $X \smallsetminus M$ et $S \smallsetminus M$ possèdent exactement deux composantes connexes. On note $K = M \cap S$. Alors, le triplet (X, M, K) possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.*

Nous allons étudier le cas où M est de codimension réelle k en utilisant des méthodes analogues à celles de [L-T 1]. Nous noterons toujours Φ la famille de supports introduite au paragraphe 2, c'est-à-dire la famille des fermés de $M \smallsetminus K$ qui sont relativement compacts dans M.

Proposition 3.14. *On suppose que la variété M est $(q+1)$-concave et que le compact K possède une suite décroissante de voisinages $(U_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ telle que $K = \bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} U_\ell$ et $U_\ell = V_\ell \cap M$, où V_ℓ est un domaine complètement strictement pseudoconvexe relativement compact dans X. On considère une forme différentielle CR, f, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \smallsetminus K$, à valeurs dans E, de type (p,r), à support dans Φ, $0 \le p \le n$, $1 \le r \le q$. Pour qu'il existe un $(p, r-1)$-courant g d'ordre nul sur $M \smallsetminus K$, à valeurs dans E et à support dans Φ tel que $\bar\partial_b g = f$, il suffit qu'il existe un domaine strictement pseudoconvexe $B \subset\subset X$ contenant le support de f tel que, pour toute forme différentielle φ de type $(n-p, n-k-r)$, de classe $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs dans E^*, $\bar\partial$-fermée au voisinage de $M \cap B$ et pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, on ait*

$$(*) \qquad \Big| \int_{M\smallsetminus U_\ell} f \wedge \varphi \Big| \le C_\ell \|\varphi\|_{\infty, \bar U_\ell}$$

où les constantes C_ℓ sont indépendantes de la forme différentielle φ.

Démonstration. Supposons que la condition $(*)$ est satisfaite.

Soit θ une $(n-p, n-k-r)$-forme différentielle $\bar\partial_b$-fermée, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \cap \bar B$, à valeurs dans E^*, qui est identiquement nulle au voisinage de K.

D'après le théorème 7.2.3 de [Ai/He], on peut approcher θ uniformément sur tout compact de $M \cap B$ par une suite $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de $(n-p, n-k-r)$-formes différentielles de classe $\mathcal{C}^\infty$, à valeurs dans E^*, $\bar\partial$-fermées au voisinage de $M \cap B$. En choisissant un voisinage U_ℓ de K sur lequel θ s'annule identiquement et en appliquant $(*)$, on obtient

$$\int_{M\smallsetminus K} f \wedge \theta = \int_{M\smallsetminus U_\ell} f \wedge \theta = \lim_{\nu\to\infty} \int_{M\smallsetminus U_\ell} f \wedge \varphi_\nu \le C_\ell \lim_{\nu\to\infty} \|\varphi_\nu\|_{\infty, \bar U_\ell} = 0.$$

Notons $E_{\Phi^*}^{n-p,n-k-r+1}(M \cap \bar B, E^*)$ l'espace des $(n-p, n-k-r+1)$-formes différentielles à valeurs dans E^*, de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \cap \bar B$ qui sont le $\bar\partial_b$ sur $M \cap B$ d'une forme $\mathcal{C}^\infty$ sur $M \cap \bar B$, identiquement nulle au voisinage de K.

L'application $L : \psi \mapsto \int_{M\smallsetminus K} f \wedge \theta$, où θ est identiquement nulle au voisinage de K et vérifie $\bar\partial_b \theta = \psi$, définit une forme linéaire sur $E_{\Phi^*}^{n-p,n-k-r+1}(M \cap \bar B, E^*)$.

Désignons par $H_0^{n-p,n-k-r+1}(M \cap \bar B, E^*)$, respectivement $H_0^{n-p,n-k-r}(M \cap \bar U_\ell, E^*)$, les groupes de $\bar\partial_b$-cohomologie continue à valeurs dans E^* sur $M \cap \bar B$ en bidegré $(n-p, n-k-r+1)$, respectivement sur $M \cap \bar U_\ell$ en bidegré $(n-p, n-k-r)$.

Sous les hypothèses de cette proposition, le premier de ces groupes est de dimension finie et par conséquent sa topologie est séparée, et le second est nul (cf. [He 3], th. 8.15).

Soit U un voisinage de K dans M. Le théorème de l'application ouverte donne l'existence d'une constante C_U telle que si $\psi \in E_{\Phi^*}^{n-p,n-k-r+1}(M \cap \bar B, E^*)$ vérifie $\operatorname{supp}\psi \subset M \smallsetminus \bar U$, il existe $\widetilde\theta \in \mathcal{C}^{n-p,n-k-r}(M \cap \bar B, E^*)$ identiquement nulle au voisinage de K telle que $\bar\partial_b \widetilde\theta = \psi$ et $\|\widetilde\theta\|_{\infty, M\cap\bar B} \le C_U \|\psi\|_{\infty, M\cap\bar B}$. En effet, on obtient tout d'abord $\alpha \in \mathcal{C}^{n-p,n-k-r}(M \cap \bar B, E^*)$ telle que $\bar\partial_b \alpha = \psi$ et $\|\alpha\|_{\infty, M\cap\bar B} \le C_1 \|\psi\|_{\infty, M\cap\bar B}$. Puisque ψ est nulle sur U, il existe un voisinage

U_ℓ de K sur lequel $\bar\partial_b\alpha = 0$; on peut alors trouver $\beta \in \mathcal{C}^{n-p,n-k-r-1}(\bar U_\ell, E^*)$ telle que $\bar\partial_b\beta = \alpha$ et $\|\beta\|_{\infty,\bar U_\ell} \le C_2\|\alpha\|_{\infty,\bar U_\ell}$. Soit $\widetilde U_\ell$ un voisinage de K tel que $K \subset \widetilde U_\ell \subset\subset U_\ell$ et χ une fonction $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans U_ℓ, égale à 1 sur $\widetilde U_\ell$. La forme différentielle $\widetilde\theta = \alpha - \bar\partial_b\chi\beta$ convient.

On en déduit donc que pour toute ψ identiquement nulle sur U

$$|L(\psi)| = \Big|\int_{M\smallsetminus K} f\wedge\widetilde\theta\Big| \le C_{f,U}\|\widetilde\theta\|_{\infty,M\cap\bar B} \le C'_{f,U}\|\psi\|_{\infty,M\cap\bar B}.$$

On peut alors appliquer le théorème de Hahn-Banach. Il résulte du théorème de représentation de Riesz qu'il existe un $(p, r-1)$-courant g d'ordre nul à support dans Φ tel que pour tout $\theta \in \mathcal{C}^\infty_{n-p,n-k-r}(M, E^*)$, identiquement nulle au voisinage de K on ait

$$\int_{M\smallsetminus K} g\wedge\bar\partial\theta = (-1)^r\int_{M\smallsetminus K} f\wedge\theta$$

c'est-à-dire $\bar\partial_b g = f$. ■

R e m a r q u e. Le support de la solution g obtenue est contenu dans $(M\smallsetminus K)\cap\bar B$.

LEMME 3.15. *Soient X une variété de Stein de dimension n, $n\ge 5$, M une sous-variété CR générique 2-concave de classe $\mathcal{C}^\infty$ de X et S un compact de Stein de X. Si $K = M\cap S$, la condition $(*)$ est satisfaite pour toute $(0,1)$-forme différentielle f à valeurs dans E, de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\bar\partial$-fermée sur $M\smallsetminus K$ et à support dans Φ.*

D é m o n s t r a t i o n. Soient B un domaine strictement pseudoconvexe de X contenant le support de f, φ une $(n, n-k-1)$-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans E^*, $\bar\partial$-fermée sur un voisinage $V_{M\cap B}$ de $M\cap B$, et η un réel strictement positif. En appliquant la proposition 1.7 de [L-T 1] on peut construire un domaine Δ_η complètement $(k+1)$-convexe de X contenu dans le tube de rayon η centré sur M tel que $\operatorname{supp} f \subset\subset \Delta_\eta \subset\subset V_{M\cap B}$.

On déduit des théorèmes d'annulation d'Andreotti-Grauert que $\varphi = \bar\partial\psi$ sur Δ_η, où ψ est une $(n, n-k-2)$-forme différentielle $\mathcal{C}^\infty$ à valeurs dans E^*.

Comme S est un compact de Stein de X, il existe une suite $(\varphi_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ de fonctions strictement plurisousharmoniques d'exhaustion de X telles que si $U_\ell = \{z\in M \mid \varphi_\ell(z) < 0\}$, $(U_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de voisinages de K dans M vérifiant $K = \bigcap_{\ell\in\mathbb{N}} U_\ell$. Pour $\varepsilon > 0$, posons $V_{\ell,\varepsilon} = \{z\in X \mid \varphi_\ell(z) < \varepsilon\}$. En appliquant encore une fois la proposition 1.7 de [L-T 1], on peut construire un domaine $\Delta_{\ell,\eta,\varepsilon}$ complètement $(k+1)$-convexe tel que

$$U_\ell \subset\subset \Delta_{\ell,\eta,\varepsilon} \subset V_{\ell,\varepsilon}\cap\Delta_\eta.$$

Grâce aux résultats de W. Fischer et Lieb [Fi/Li], on peut écrire $\varphi = \bar\partial\psi_\ell$ sur $\Delta_{\ell,\eta,\varepsilon}$ où ψ_ℓ est une $(n, n-k-2)$-forme différentielle continue sur $\bar\Delta_{\ell,\eta,\varepsilon}$ vérifiant $\|\psi_\ell\|_{\infty,\bar\Delta_{\ell,\eta,\varepsilon}} \le C_\ell\|\varphi\|_{\infty,\bar\Delta_{\ell,\eta,\varepsilon}}$.

Soit $\widetilde{\psi}_\ell$ une extension continue de ψ_ℓ à X. Considérons $\varepsilon_0 > 0$ tel que V_{ℓ,ε_0} contienne le support de f. Par des méthodes analogues à celles de la démonstration du corollaire 2.2.4 de [L-T 2], on peut construire un domaine $\widetilde{\Delta}_{\ell,\eta,\varepsilon}$ tel que $\widetilde{\Delta}_{\ell,\eta,\varepsilon}$ soit une extension $(k+1)$-convexe de $\Delta_{\ell,\eta,\varepsilon}$ et $\operatorname{supp} f \subset \widetilde{\Delta}_{\ell,\eta,\varepsilon}$.

Considérons la $(n, n-k-2)$-forme différentielle $\alpha = \psi - \widetilde{\psi}_\ell$; elle est $\bar\partial$-fermée sur $\Delta_{\ell,\eta,\varepsilon}$. On peut donc trouver une suite $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de formes différentielles $\bar\partial$-fermées sur $\widetilde{\Delta}_{\ell,\eta,\varepsilon}$, qui converge uniformément vers α sur tout compact de $\Delta_{\ell,\eta,\varepsilon}$. On a alors

$$\begin{aligned}\int_{M\smallsetminus U_\ell} f\wedge\varphi &= \int_{M\smallsetminus U_\ell} f\wedge\bar\partial\widetilde{\psi}_\ell + \int_{M\smallsetminus U_\ell} f\wedge\bar\partial(\psi-\widetilde{\psi}_\ell)\\ &= \int_{M\smallsetminus U_\ell} f\wedge\bar\partial\widetilde{\psi}_\ell + \int_{M\smallsetminus U_\ell} f\wedge\bar\partial(\alpha-\alpha_\nu)\\ &= \int_{\partial U_\ell} f\wedge\widetilde{\psi}_\ell + \int_{\partial U_\ell} f\wedge(\alpha-\alpha_\nu).\end{aligned}$$

D'où, pour tout $\eta,\varepsilon > 0$ et tout $\nu\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\Big|\int_{M\smallsetminus U_\ell} f\wedge\varphi\Big| &\le C_\ell(\|\widetilde{\psi}_\ell\|_{\infty,\partial U_\ell} + \|\alpha-\alpha_\nu\|_{\infty,\partial U_\ell})\\ &\le C_\ell(\|\varphi\|_{\infty,\bar\Delta_{\ell,\eta,\varepsilon}} + \|\alpha-\alpha_\nu\|_{\infty,\partial U_\ell}).\end{aligned}$$

En faisant tendre η et ε vers 0 et ν vers l'infini on aura

$$\Big|\int_{M\smallsetminus U_\ell} f\wedge\varphi\Big| \le C_\ell\|\varphi\|_{\infty,U_\ell}. \ \blacksquare$$

Théorème 3.16. *Soient X une variété de Stein de dimension n, $n\ge 5$, M une sous-variété CR générique* 2*-concave de classe $\mathcal{C}^\infty$ de X et S un compact de Stein de X. Si $K = M\cap S$, on a*

$$H^{0,1}_{\bar\partial_b,\Phi}(M\smallsetminus K, E) = 0.$$

Démonstration. Soit f une $(0,1)$-forme différentielle à valeurs dans E, de classe $\mathcal{C}^\infty$, $\bar\partial$-fermée sur $M\smallsetminus K$ et à support dans Φ. D'après le lemme 3.15, f satisfait la condition $(*)$. On déduit alors de la proposition 3.14 qu'il existe une mesure g à support dans Φ et à valeurs dans E telle que $\bar\partial_b g = f$. La seconde assertion du théorème 3.1 de [L-T 1] montre que g est en fait une section $\mathcal{C}^\infty$ de E, ce qui prouve le théorème. $\blacksquare$

Le théorème 3.16 associé au théorème 2.1 permet de donner l'énoncé suivant :

Corollaire 3.17. *Soient X une variété de Stein de dimension n, $n\ge 5$, M une sous-variété CR générique* 2*-concave de classe $\mathcal{C}^\infty$ de X et S un compact de Stein de X. Si $K = M\cap S$, le triplet (X, M, K) possède la propriété de Hartogs-Bochner $\mathcal{C}^\infty$.*

4. Régularité pour le phénomène de Hartogs-Bochner. Nous considérons toujours une variété analytique complexe X de dimension n, une sous-variété CR, M, de X de codimension réelle k et un compact K de M. Nous supposerons dans ce paragraphe que la variété M vérifie le principe du prolongement analytique.

Soit D un domaine relativement compact dans M tel que $M \setminus \bar{D}$ soit connexe, $K \subset \partial D$ et que $\partial D \setminus K$ soit une sous-variété presque CR de classe $\mathcal{C}^1$ de $M \setminus K$. Si f est une fonction CR continue sur $\partial D \setminus K$, on notera T le courant d'ordre nul sur $M \setminus K$ défini par

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\partial D \setminus K} f\varphi \tag{4.1}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_{n,n-k-1}(M \setminus K)$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \cap (\partial D \setminus K)$ soit compact.

Remarquons que $\bar{\partial}_b T = 0$ et que $\operatorname{supp} T \in \Phi$ où Φ est la famille de supports définie au paragraphe 2.

Supposons que f possède une extension CR continue F à D et notons encore F la mesure sur $M \setminus K$ définie par

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_D F\varphi$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_{n,n-k}(M \setminus K)$ telle que $\operatorname{supp} \varphi \cap (\bar{D} \setminus K)$ soit compact. Alors, $\operatorname{supp} F \in \Phi$ et on déduit du théorème de Stokes que

$$\bar{\partial}_b F = T.$$

Ceci prouve que pour espérer obtenir le phénomène de Hartogs-Bochner continu pour un triplet (X, M, K), il est raisonnable de supposer que (X, M, K) possède la propriété

(∗∗) Pour tout $(0,1)$-courant α d'ordre nul sur $M \setminus K$, $\bar{\partial}_b$-fermé, à support dans Φ, il existe une mesure β sur $M \setminus K$, à support dans Φ telle que $\bar{\partial}_b \beta = \alpha$.

Notons que lorsque $K = \emptyset$ des conditions géométriques du type de celles des théorèmes 3.6 et 3.4 assurent que $(X, M, \emptyset)$ satisfait la condition (∗∗) (cf. [He 2] et [L-T 1]).

Supposons maintenant que (X, M, K) satisfait la condition (∗∗) et revenons au problème de l'extension de f à D. Considérons le courant T défini par (4.1). Grâce à (∗∗), il existe une mesure F sur $M \setminus K$ à support dans Φ telle que

$$\bar{\partial}_b F = T.$$

Puisque $\operatorname{supp} T = \partial D \setminus K$, F est CR sur $M \setminus \partial D$. De plus F est nulle en dehors d'un compact de M et comme M vérifie le principe du prolongement analytique, F est donc nulle sur $M \setminus \bar{D}$.

Si de plus M est telle que toute fonction CR sur M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (ce qui est vérifié si M est 1-concave ou si M est une variété analytique complexe, par exemple), le comportement de la mesure F au voisinage d'un point p de $\partial D \setminus K$ sera le même que celui de toute solution locale de l'équation $\bar{\partial}_b S = T$ au voisinage de p.

Dans le cas où M est une variété analytique complexe, l'étude locale de l'équation $\bar{\partial} S = T$ au voisinage d'un point p de $\partial D \setminus K$ est liée à l'étude de la transformée de Bochner-Martinelli de f (cf. [Ha/La], [Či]). Il en résulte que si f est continue, $F|_D$ s'étend continûment à $\bar{D} \setminus K$ avec $F|_{\partial D \setminus K} = f$ et si de plus f est höldérienne d'ordre α, $0 \leq \alpha < 1$, ou de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 0$, F a la même régularité sur $\bar{D} \setminus K$ que f.

Dans toute la suite nous supposerons que le triplet (X, M, K) satisfait $(**)$ et que la variété M est une hypersurface réelle 1-convexe-concave de X.

Dans [Fi/Le], B. Fischer et Leiterer ont construit un noyau local dans les hypersurfaces réelles 1-convexe-concaves de $\mathbb{C}^n$ qui possède des propriétés analogues à celle du noyau de Bochner-Martinelli dans $\mathbb{C}^n$. Cela leur permet de prouver le résultat suivant :

THÉORÈME 4.1 ([Fi/Le], th. 6.11). *Soit M une hypersurface réelle 1-convexe-concave de $\mathbb{C}^n$, $n \geq 3$. On suppose que D est un domaine borné à bord $\mathcal{C}^2$ "assez petit" de M tel que $M \setminus \bar{D}$ soit connexe. Si f est une fonction CR höldérienne d'ordre α, $0 < \alpha < 1$, sur ∂D il existe une unique fonction F continue sur ∂D et CR sur D telle que $F|_{\partial D} = f$.*

Remarque. 1) L'extension F du théorème 4.1 est donnée par la formule intégrale

$$F(z) = \int_{\zeta \in \partial D} f(\zeta) K(z, \zeta)$$

où $K(z, \zeta)$ est la généralisation du noyau de Bochner-Martinelli construite par B. Fischer et Leiterer au voisinage de ∂D.

2) Un théorème analogue est annoncé par Henkin ([He 2], th. 1) en codimension quelconque et pour une donnée f seulement continue.

En étudiant précisément la régularité du noyau construit par Fischer et Leiterer, Barkatou a généralisé le théorème précédent.

THÉORÈME 4.2 ([Ba], th. 1.2). *On suppose que (X, M, K) possède la propriété $(**)$ et que M est une hypersurface réelle 1-convexe-concave de X. Alors si D est un domaine relativement compact dans M tel que $M \setminus \bar{D}$ soit connexe, $K \subset \partial D$ et que $\partial D \setminus K$ soit une sous-variété presque CR de classe $\mathcal{C}^2$ de $M \setminus K$, pour toute fonction CR, höldérienne d'ordre α, $0 < \alpha \leq 1$, sur ∂D il existe une fonction $F \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{C}^{(\alpha/2) - \varepsilon}(\bar{D} \setminus K)$, CR sur D telle que $F|_{\partial D} = f$.*

Bibliographie

[Ai/He] R. A. Airapetjan and G. M. Henkin, *Integral representations of differential forms on Cauchy-Riemann manifolds and the theory of CR-functions*, Russian Math. Surveys 39 (1984), 41–118.

[An/G] A. Andreotti et H. Grauert, *Théorèmes de finitude pour la cohomologie des espaces complexes*, Bull. Soc. Math. France 90 (1962), 193–259.

[An/Hi] A. Andreotti and C. D. Hill, *E. E. Levi convexity and the Hans Lewy problem. Part I: Reduction to vanishing theorems*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 26 (1972), 325–363.

[Ba] M. Y. Barkatou, *Estimation höldérienne d'un noyau local de type Martinelli-Bochner sur les hypersurfaces* 1*-convexes-concaves*, *Applications*, Math. Z., à paraître.

[Bo] S. Bochner, *Analytic and meromorphic continuation by means of Green's formula*, Ann. of Math. 44 (1943), 652–673.

[Či] E. M. Čirka, *Analytic representation of CR functions*, Math. USSR-Sb. 27 (1975), 526–553.

[Eh] L. Ehrenpreis, *A new proof and an extension of Hartogs theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 507–509.

[Fi/Le] B. Fischer and J. Leiterer, *A local Martinelli-Bochner formula on hypersurfaces*, Math. Z. 214 (1993), 659–681.

[Fi/Li] W. Fischer und I. Lieb, *Lokale Kerne und beschränkte Lösungen für den $\bar\partial$-Operator auf q-konvexen Gebieten*, Math. Ann. 208 (1974), 249–265.

[Ha/La] R. Harvey and H. B. Lawson, *Boundaries of complex analytic varieties I*, Ann. of Math. 102 (1975), 233–290.

[He 1] G. M. Henkin, *Solution des équations de Cauchy-Riemann tangentielles sur des variétés de Cauchy-Riemann q-convexes*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 292 (1981), 27–30.

[He 2] —, *The Hartogs-Bochner effect on CR manifolds*, Soviet Math. Dokl. 29 (1984), 78–82.

[He 3] —, *The method of integral representations in complex analysis*, in: Sovremennye problemy matematiki, Fundamental'nye napravleniya 7, Moscow, VINITI, 1985, 23–124 (in Russian); English transl.: Encyclopedia of Math. Sci. 7, Several Complex Variables I, Springer, 1990, 19–116.

[He/Le] G. M. Henkin and J. Leiterer, *Andreotti-Grauert Theory by Integral Formulas*, Birkhäuser, 1988.

[Ky] A. M. Kytmanov, *Holomorphic extension of CR-functions with singularities on a hypersurface*, Math. USSR-Izv. 37 (1991), 681–691.

[L-T] C. Laurent-Thiebaut, *Sur l'extension des fonctions CR dans une variété de Stein*, Ann. Mat. Pura Appl. 150 (1988), 141–152.

[L-T 1] —, *Résolution du $\bar\partial_b$ à support compact et phénomène de Hartogs-Bochner dans les variétés CR*, in: Proc. Sympos. Pure Math. 52 (1991), 239–249.

[L-T 2] —, *Phénomène de Hartogs-Bochner relatif dans une hypersurface réelle* 2*-concave d'une variété analytique complexe*, Math. Z. 212 (1993), 511–525.

[L-T/L] C. Laurent-Thiebaut and J. Leiterer, *On the Hartogs-Bochner extension phenomenon for differential forms*, Math. Ann. 284 (1989), 103–119.

[Lu] G. Lupacciolu, *A theorem on holomorphic extension of CR functions*, Pacific J. Math. 124 (1986), 177–191.

[Lu 1] —, *Some global results on extension of CR objects in complex manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 321 (1990), 761–774.

[Lu 2] G. Lupacciolu, *Characterization of removable sets in strongly pseudo-convex boundaries*, à paraître.

[Lu/To] G. Lupacciolu et G. Tomassini, *Un teorema di estensione per le CR-funzioni*, Ann. Mat. Pura Appl. 137 (1984), 257–263.

[Ma 1] E. Martinelli, *Sopra una dimonstrazione di R. Fueter per un teorema di Hartogs*, Comment. Math. Helv. 15 (1943), 340–349.

[Ma 2] —, *Sulla determinazione di una funzione analitica più variabili complesse in un campo, assegnatone la traccia sulla frontiera*, Ann. Mat. Pura Appl. 55 (1961), 192–202.

[N] I. Naruki, *Localization principle for differential complexes and its applications*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ. 8 (1972), 43–110.

[St] E. L. Stout, *Removable singularities for the boundary values of holomorphic functions*, in: Math. Notes 38, Princeton University Press, 1993, 600–629.