$$\left(A_{\varepsilon_0}(u_\varepsilon^{\alpha hn})-A_{\varepsilon_0}(u_{\varepsilon_0}),\ u_\varepsilon^{\alpha hn}-u_{\varepsilon_0}\right)\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_0\geqslant 0$$

и

$$\varepsilon\left(A_1(u_\varepsilon^{\alpha hn}),\ u_\varepsilon^{\alpha hn}\right)\to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon_0=0.$$

Теорема 4. *Если выполнены условия предыдущей леммы и оператор A_0 обладает свойством* (14), *то приближенные решения $u_\varepsilon^{\alpha hn}$ сходятся в V_0 равномерно относительно ε к точному решению вариационного неравенства* (1), *то есть*

$$\|u_\varepsilon^{\alpha hn}-u_\varepsilon\|_0 \rightrightarrows 0 \quad \text{для всех} \ \varepsilon\in[0,1].$$

Замечание. Для приведенного в начале статьи примера в случае $p=2$ имеет место сходимость

$$\int_0^T\int_\Omega |u_\varepsilon^{\alpha hn}-u_\varepsilon|^2\,dxdt \rightrightarrows 0, \quad \forall\varepsilon\in[0,1].$$

Литература

[1] Ж. Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, „Мир'', Москва 1972.

[2] А. М. Ильин, *Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной*, Мат. заметки 6.2 (1969), стр. 237–248.

[3] J. L. Lions, *Perturbation singulières dans les problèmes aux limites et en contrôl optimal*, Springer-Verlag, Berlin 1973.

[4] B. Margolis, *The flow of bingham fluid under a monotone perturbation*, J. Math. Anal. Appl. 48 (3) (1974), стр. 818–835.

[5] Л. А. Калякин, *Метод Галеркина для уравнений с малым параметром при старших производных*, Матем. сб. 85 (127), 4 (1971), стр. 527–537.

[6] К. В. Емельянов, *Разностная схема для трехмерного эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных*. В сб. *Краевые задачи для уравнений математической физики*, Изд-во УНЦ АН СССР, Свердловск 1973, стр. 30–42.

[7] K. E. Barrett, *The numerical solution of singular-perturbation boundary-value problems*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 27.1 (1974), стр. 57–68.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

Г. И. ШИШКИН

Институт Математики и Механики АН СССР, Свердловск К-66, СССР

Исследование многих задач математической физики приводит к краевым задачам для дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных. При решении задач такого типа возникают трудности, что связано с появлением в решении особенностей типа пограничного слоя при малых значениях параметров.

В работе [1] в случае первой краевой задачи для уравнения

$$\varepsilon\Delta u+\sum_{i=1}^n b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x), \quad 0<x_i<1,\ \varepsilon\in(0,1), \tag{1}$$

предлагается однородная разностная схема. Эта схема при фиксированном значении параметра дает аппроксимацию второго порядка. Полученное приближенное решение сходится к решению краевой задачи равномерно относительно параметра, когда шаг сетки стремится к нулю [1], [2].

В настоящей работе в случае первой краевой задачи для эллиптического уравнения с двумя малыми параметрами при производных построена разностная схема, аналогичная схеме [1], и установлена сходимость решения, полученного по этой схеме, к решению краевой задачи равномерно относительно параметров.

Рассмотрим в квадрате $R=\{0<x_i<1,\ i=1,2\}$ с границей Γ эллиптическое уравнение

$$Lu\equiv\varepsilon_1\sum_{i=1}^2 a_i(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\varepsilon_2\sum_{i=1}^2 b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}-u=f(x), \tag{2}$$

где ε_1 и ε_2 — параметры задачи, $0<\varepsilon_1\leqslant 1$, $|\varepsilon_2|\leqslant 1$. Пусть краевые условия имеют вид:

(3) $$u|_{x_i=0} = \varphi_i(x),$$

(4) $$u|_{x_i=1} = \varphi_{2+i}(x), \quad i = 1,2.$$

Строим однородную разностную схему, решение которой близко к решению задачи (2)–(4) при любых значениях параметров ε_1 и ε_2, в следующем виде:

(5) $$L^h u^h \equiv \sum_{i=1}^{2} \alpha_i(x)\, u^h_{x_i\bar{x}_i} + \sum_{i=1}^{2} \beta_i(x)\, u^h_{\overset{\circ}{x}_i} - u^h = f(x),$$

где

$$\alpha_i(x) = -\frac{h^2}{4}\left\{\operatorname{cth}\frac{\lambda_1^{(i)}(x)\,h}{2}\operatorname{cth}\frac{\lambda_2^{(i)}(x)\,h}{2} + 1\right\},$$

$$\beta_i(x) = \frac{h}{2}\left\{\operatorname{cth}\frac{\lambda_1^{(i)}(x)\,h}{2} + \operatorname{cth}\frac{\lambda_2^{(i)}(x)\,h}{2}\right\},$$

функции $\lambda_j^{(i)}(x)$ являются корнями уравнения

$$\varepsilon_1\, a_i(x)\big(\lambda_j^{(i)}(x)\big)^2 + \varepsilon_2\, b_i(x)\, \lambda_j^{(i)}(x) - 1 = 0, \quad j = 1,2.$$

Граничные условия для системы (5) совпадают с условиями (3), (4):

(6) $$u^h|_{x_i=0} = \varphi_i(x), \quad u^h|_{x_i=1} = \varphi_{2+i}(x), \quad i = 1,2.$$

Здесь h — шаг сетки $S^h = \{x_i = 0, h, 2h, \ldots, Nh = 1,\ i = 1,2\}$.

Коэффициенты $\alpha_i(x)$, $\beta_i(x)$ в схеме (5) выбраны таким образом, чтобы решения экспоненциального типа однородного уравнения (2) с постоянными коэффициентами являлись решениями соответствующих однородных разностных уравнений (5). В отличие от уравнения (1) при малых значениях ε_1 и ε_2 пограничный слой появляется в окрестности каждой точки границы Γ.

Предполагаем выполненными следующие условия:

1) существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что $a_i(x) \geqslant \alpha > 0$, $b_i(x) \geqslant \alpha > 0$;

2) правая часть $f(x)$ и коэффициенты $a_i(x)$, $b_i(x)$ принадлежат пространству $C_3(\bar{R})$ — трижды непрерывно дифференцируемых функций;

3) функции φ_i, $\varphi_{2+i} \in C_3$;

4) в угловых точках границы Γ значения соответствующих граничных функций совпадают.

Обозначим $S_d^h = S^h \cap R^d$, где $R^d = \{(x_1, x_2)\colon d \leqslant x_i \leqslant 1-d,\ 0 \leqslant x_j \leqslant 1,\ i+j = 3\}$, d — произвольное положительное число, $d < \frac{1}{2}$.

Доказана следующая

Теорема. *В точках сетки S_d^h решение задачи* (5), (6) *при $h \to 0$ сходится равномерно относительно параметров ε_1, ε_2 к решению задачи* (2)–(4), *причем*

(7) $$|u^h(x) - u(x)| \leqslant M h^{\nu}, \quad \nu < 1/12.$$

Если же $u(x) \in C_4(\bar{R})$, то справедлива оценка

(8) $$|u^h(x) - u(x)| \leqslant Q h^2,$$

где постоянная Q зависит от параметров ε_1, ε_2.

Здесь и всюду далее условимся обозначать через M положительные постоянные, не зависящие от h, ε_1 и ε_2. Параметр ε_2 считаем, для простоты, неотрицательным.

Пользуясь явным видом коэффициентов схемы (5), нетрудно показать, что для схемы (5) выполняется принцип максимума.

Для доказательства оценки (7) достаточно установить следующие три неравенства

(9) $$|u^h(x) - u(x)| \leqslant M\frac{h^{1/4}}{\sqrt{\varepsilon_1}}, \quad x \in S^h, \quad \varepsilon_1 \geqslant h^{1/3},$$

(10) $$|u^h(x) - u(x)| \leqslant M\big[(\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_1})^{\delta} + h\big], \quad x \in S_d^h,$$

(11) $$|u^h(x) - u(x)| \leqslant M\left[\varepsilon_1^{3/2} + \frac{\sqrt{h+\varepsilon_1}}{\varepsilon_2}\right], \quad x \in S^h,$$

где $\delta < 1$. В самом деле, оценка (7) будет следовать из этих неравенств, если при $\varepsilon_1 \geqslant h^{1/3}$ воспользуемся оценкой (9), при $\varepsilon_1 \leqslant h^{1/3}$, $\varepsilon_2 \leqslant h^{1/12}$ оценкой (10), а при $\varepsilon_1 \leqslant h^{1/3}$, $\varepsilon_2 \geqslant h^{1/12}$ оценкой (11).

При установлении оценки (9) используем соотношение:

(12) $$L^h\big(u^h(x) - u(x)\big) = \sum_{i=1}^{2}\Big\{\big(\alpha_i(x) - \varepsilon_1 a_i(x)\big)\, u_{x_i\bar{x}_i} + \big(\beta_i(x) - \varepsilon_2 b_i(x)\big)\, u_{\overset{\circ}{x}_i} + \varepsilon_1 a_i(x)\left(u_{x_i\bar{x}_i} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right) + \varepsilon_2 b_i(x)\left(u_{\overset{\circ}{x}_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\Big\}.$$

Принимая во внимание внутренние априорные оценки решения задачи (2)–(4) (см. [3], гл. IV), приходим к неравенству

$$\big|L^h\big(u^h(x) - u(x)\big)\big| \leqslant M\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}\left(1 + \frac{\varepsilon_2^3}{\varepsilon_1^{3/2}}\right) + \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\varepsilon_2}{r} + \frac{\varepsilon_1}{r^2}\right)\right] h,$$

где r — расстояние точки x до границы Γ. С помощью барьерных функций типа

$$W_i(x) = \pm M_1 + [\varphi_i(x) \mp M_1]\exp(-N x_i),$$

где $N = \max_{x \in R}\big(|\lambda_k^{(1)}(x)| + |\lambda_k^{(2)}(x)|\big)$, $k = 1,2$, M_1 — достаточно большое положительное число, нетрудно показать справедливость неравенства

$$|u^h(x) - u(x)| \leqslant M\frac{\varepsilon_2 + \sqrt{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1}\, r.$$

Из этой и предыдущей оценки с использованием принципа максимума устанавливается оценка (9).

Оценки (10), (11) находятся с учетом асимптотического поведения решения задачи (2)–(4) при ε_1, $\varepsilon_2 \to 0$ и при $\varepsilon_1 \to 0$ $(\varepsilon_2 \neq 0)$ соответственно.

Функция

$$Y_0(x) = u_0(x) + \sum_{j=1}^{4} v_j(x), \quad x \in R^d,$$

где

$$u_0(x) = -f(x),$$
$$v_1(x) = [\varphi_1(x)-u_0(0,x_2)]\exp\big(\lambda_1^{(1)}(0,x_2)\,x_1\big),$$
$$v_2(x) = [\varphi_2(x)-u_0(x_1,0)]\exp\big(\lambda_1^{(2)}(x_1,0)\,x_2\big),$$
$$v_3(x) = [\varphi_3(x)-u_0(1,x_2)]\exp\big(\lambda_2^{(1)}(1,x_2)\,(x_1-1)\big),$$
$$v_4(x) = [\varphi_4(x)-u_0(x_1,1)]\exp\big(\lambda_2^{(2)}(x_1,1)\,(x_2-1)\big),$$
$$\lambda_1^{(i)}(x) = \min_{k=1,2}\lambda_k^{(i)}(x), \qquad \lambda_2^{(i)}(x) = \max_{k=1,2}\lambda_k^{(i)}(x),$$

является первым членом асимптотического разложения решения задачи (2)–(4) в области R^d, когда $\varepsilon_1\to 0$, $\varepsilon_2\to 0$. С помощью барьеров экспоненциального типа можно показать, что разность $Y_0(x)-u^h(x)$ оценивается величиной, стоящей в правой части неравенства (10). Учитывая оценку разности $Y_0(x)-u(x)$ приходим к оценке (10).

Аналогично оцениваются разности $Y_1(x)-u(x)$, $Y_1(x)-u^h(x)$, где $Y_1(x)$ есть первый член асимптотического разложения задачи (2)–(4) при $\varepsilon_1\to 0$ (значение $\varepsilon_2\neq 0$ фиксировано).

В том случае, когда $u(x)\in C_4(\bar{R})$, используя соотношение (12), приходим к неравенству

$$\big|L^h\big(u^h(x)-u(x)\big)\big| \leqslant Q(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\,h^2, \qquad x\in\bar{R}.$$

Оценка (8) вытекает из принципа максимума.

Для того, чтобы $u(x)\in C_4(\bar{R})$ необходимо на коэффициенты уравнения, правую часть и краевые условия наложить дополнительные ограничения.

Замечание. Неравенство (10) выполнено во всех точках сетки S^h, если значения функций $f(x)$, $\varphi_j(x)$, $1\leqslant j\leqslant 4$ совпадают в угловых точках области R. В этом случае на сетке S^h справедлива оценка (7).

Литература

[1] А. М. Ильин, *Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной*, Мат. заметки 6.2 (1969), стр. 237–248.

[2] К. В. Емельянов, *Разностная схема для трехмерного эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных*, В сб. *Краевые задачи для уравнений математической физики*, вып. II, Изд-во УНЦ АН СССР. Свердловск 1973, стр. 30–42.

[3] А. Фридман, *Уравнения с частными производными параболического типа*, „Мир”, Москва 1968.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО РАЗНОСТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Ф. П. ВАСИЛЬЕВ

Московский Государственный Университет, Факультет Вычислительной Математики и Кибернетики, Москва, СССР

В работе рассматривается задача о быстрейшем переводе управляемого объекта из одного множества в другое множество при условии, что движение объекта описывается системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Для приближённого решения этой задачи применяется обобщённый метод Ньютона из работы [1] в сочетании с разностными аппроксимациями, доказывается сходимость предлагаемого метода.

1. Постановка задачи

Пусть движение управляемого объекта описывается системой уравнений

(1) $$\dot{x}(\tau) = f\big(x(\tau),u(\tau),\tau\big),\ \ \tau\geqslant 0; \qquad x(0)=x_0\in X_0,$$

где τ — время, $x=(x^1,\ldots,x^n)$ — фазовые координаты, $u=(u^1,\ldots,u^r)$ — управляющие параметры, $f=(f^1,\ldots,f^n)$ — заданная вектор-функция переменных $(x,u,\tau)\in E_n\times V\times[0,+\infty)$, E_n — евклидово пространство размерности n; X_0, V — заданные множества из E_n и E_r соответственно.

Пару $\big(x_0,u(\tau)\big)=(x_0,u)$ назовём *допустимой* на отрезке $[0,t]$, если $x_0\in X_0$, $u=u(\tau)$ — ограниченная измеримая вектор-функция, принимающая свои значения из множества V почти при всех $\tau\in[0,t]$, а решение (траектория) $x(\tau)=x(\tau,x_0,u)$ системы (1), соответствующее начальному условию $x(0)=x_0$ и управлению $u=u(\tau)$, определено на всём отрезке $[0,t]$. Множество всех допустимых пар (x_0,u) на $[0,t]$ обозначим через U_t.

Пусть X_t — множество достижимости системы (1) в момент t, то есть $X_t=\{x\colon x=x(t,x_0,u),(x_0,u)\in U_t\}$, а Y — некоторое заданное множество из E_n. Введём функцию:

(2) $$\varrho(t)\equiv\inf_{(x_0,u)\in U_t}\inf_{y\in Y}|x(t,x_0,u)-y| = \inf_{x\in X_t}\inf_{y\in Y}|x-y|, \qquad t\geqslant 0,$$