BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

АППРОКСИМАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Л. А. КАЛЯКИН

Институт Математики и Механики АН СССР, Свердловск К-66, СССР

В данной заметке рассматриваются нестационарные вариационные неравенства с малым параметром. Целью работы является изучение влияния этого параметра на поведение решения, а также на сходимость некоторых приближенных методов.

В качестве примера можно рассмотреть следующую краевую задачу, которая сводится к вариационному неравенству (см. [1], стр. 294). Пусть Ω — область n-мерного пространства с регулярной границей Γ. Рассматривается уравнение

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t}-\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right)+|u_\varepsilon|^{p-2}u_\varepsilon=f(x,t),\qquad x\in\Omega,\ 0<t<T,$$

с краевым и начальными условиями

$$u_\varepsilon\geqslant 0,\qquad \Phi(u_\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}\cos(\nu,x_i)\geqslant 0,$$

$$u_\varepsilon\cdot\Phi(u_\varepsilon)=0\quad\text{для}\quad x\in\Gamma,\ 0<t<T;$$

$$u(x,0)=0\quad\text{для}\quad x\in\Omega,$$

где $\varepsilon>0$ — малый параметр, ν — нормаль к границе Γ.

В подобных задачах с параметром кроме вопроса о поведении u_ε при $\varepsilon\to 0$ возникает также вопрос о сходимости приближенных решений $\tilde{u}_\varepsilon$ (полученных каким-либо методом) к точному u_ε. Для приведенного примера известно, что комбинация методов штрафа и Галеркина дает последовательность приближенных решений, сходящуюся при каждом $\varepsilon>0$. Естественный вопрос, который возникает: будет ли эта сходимость равномерной по ε? При отсутствии равномерной сходимости может случиться, что приближенный метод становится практически неприемлимым для малых значений ε, см. [2].

Здесь нами получен общий результат о сходимости решений u_ε при условии монотонности операторов, входящих в вариационное неравенство, и доказана равномерная по ε сходимость методов штрафа, Галеркина, дискретизации по времени и их комбинаций.

Замечания. 1. Поведение решений вариационных неравенств в зависимости от малого параметра подробно исследовано Ж. Л. Лионсом в [3] (в основном в случае линейных операторов), см. также [4].

2. При изучении вопроса о равномерной сходимости приближенных методов обычно ограничивались линейными задачами, см. [2], [5]–[7].

Для удобства изложения задачу поставим в формализованном виде (следуя [1], стр. 329, 396).

Пусть V_1, V_0 — рефлексивные банаховы пространства, V_1', V_0' — им сопряженные, H — гильбертово. Считается, что справедливы вложения $V_1 \subset V_0 \subset H \subset V_0' \subset V_1'$ и все пространства строго выпуклые. Через (u,v) обозначается скалярное произведение между $u \in V_i'$ и $v \in V_i$, $i=0,1$, через $\|v\|_i$, $\|v\|_i^*$ нормы в V_i и V_i'.

Пусть заданы операторы A_1, A_0, L_1, L_0, обладающие свойствами:

1) $A_i: V_i \to V_i'$ $(i=0,1)$ — ограниченный, семинепрерывный, монотонный и

$$(A_0(u)-A_0(v), u-v) > 0 \quad \text{при} \quad u \neq v; \quad A_i(0)=0;$$

2) A_0 — коэрцитивный в V_0, то есть

$$\frac{(A_0(v), v)}{\|v\|_0} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\|_0 \to \infty;$$

3) $A_1 + A_0$ — коэрцитивный в V_1, то есть

$$\frac{(A_1(v)+A_0(v), v)}{\|v\|_1} \to +\infty \quad \text{при} \quad \|v\|_1 \to +\infty;$$

4) L_i — неограниченный замкнутый оператор из V_i в V_i' с плотной областью определения $D_i \subset V_i$; L_i^* — его сопряженный $(i=0,1)$;

5) $L_i \geqslant 0$, $L_i^* \geqslant 0$;

6) множество $D_1 \cap D_0$ плотно в V_0 и $L_1 = L_0$ на $D_1 \cap D_0$;

7) замыкание оператора $L_1: D_1 \cap D_0 \to V_0'$ совпадает с L_0.

Пусть K_1 — замкнутое выпуклое множество в V_1, K_0 — его замыкание в V_0. Считаем, что для операторов L_i $(i=0,1)$ выполнены следующие условия согласования: $\forall v \in K_i$ существует последовательность $\{v_j\}$ такая, что $v_j \in K_i \cap D_i$, $v_j \to v$ в V_i и $\lim\limits_{j\to\infty} \sup (L_i v_j, v_j - v) \leqslant 0$.

Обозначим $A_\varepsilon = \varepsilon A_1 + A_0$, $\varepsilon > 0$. Рассмотрим следующие вариационные неравенства (в слабой постановке). Для данного элемента $f \in V_0'$ найти $u_\varepsilon \in K_i$, так, чтобы

(1) $$(L_i v, v-u_\varepsilon) + (A_\varepsilon(u_\varepsilon), v-u_\varepsilon) \geqslant (f, v-u_\varepsilon), \quad \forall v \in K_i \cap D_i,$$

где $i=1$ при $\varepsilon>0$ и $i=0$ при $\varepsilon=0$. Известно, что при выполнении сформулированных выше условий задача (1) разрешима единственным образом, [1], стр. 396.

Рассмотрим метод штрафа для вариационного неравенства (1). Для этого введем операторы штрафа B_i, связанные с множествами K_i, $i=0,1$, [1], стр. 384. Предположим, что $(B_1(v), v) > 0$, $\forall v \notin K_1$. Тогда $B_\varepsilon = \varepsilon B_1 + B_0$ — оператор штрафа, связанный с K_1 при всех $\varepsilon > 0$. Уравнение со штрафом, соответствующее задаче (1), имеет вид:

(2) $$u_\varepsilon^\alpha \in D_1, \quad L_1 u_\varepsilon^\alpha + A_\varepsilon(u_\varepsilon^\alpha) + \frac{1}{\alpha} B_\varepsilon(u_\varepsilon^\alpha) = f, \quad \varepsilon > 0, \ \alpha > 0.$$

Исследуем зависимость решения u_ε^α от параметров ε и α.

Лемма 1. *Пусть выполнены наложенные выше ограничения на пространства и операторы. Если* $\alpha \to 0$, $\varepsilon \to \varepsilon_0 \geqslant 0$, *то*

(A) $u_\varepsilon^\alpha \to u_{\varepsilon_0}$ *слабо в* V_1, *при* $\varepsilon_0 > 0$ (*либо* $u_\varepsilon^\alpha \to u_0$ *слабо в* V_0 *при* $\varepsilon_0 = 0$);

(B) $(A_{\varepsilon_0}(u_\varepsilon^\alpha) - A_{\varepsilon_0}(u_{\varepsilon_0}), u_\varepsilon^\alpha - u_{\varepsilon_0}) \to 0$ *при* $\varepsilon_0 \geqslant 0$;

(C) $\varepsilon(A_1(u_\varepsilon^\alpha), u_\varepsilon^\alpha) \to 0$ *при* $\varepsilon_0 = 0$.

Доказательство (проводится для $\varepsilon_0 = 0$). Умножим уравнение (2) на u_ε^α и воспользуемся монотонностью операторов A_1, L_1 и B_ε:

(3) $$(A_0(u_\varepsilon^\alpha), u_\varepsilon^\alpha) \leqslant \varepsilon(A_1(u_\varepsilon^\alpha), u_\varepsilon^\alpha) + (A_0(u_\varepsilon^\alpha), u_\varepsilon^\alpha) \leqslant \|f\|_0^* \cdot \|u_\varepsilon^\alpha\|_0.$$

Отсюда с учетом коэрцитивности оператора A_0 получаем, что

(4) $$\|u_\varepsilon^\alpha\|_0 \leqslant M, \quad \forall \varepsilon > 0, \ \alpha > 0.$$

Покажем, что

(5) $$\varepsilon \|u_\varepsilon^\alpha\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \ \alpha \to 0.$$

В самом деле, если это не так, то можем выбрать последовательность $u_n = u_{\varepsilon_n}^{\alpha_n}$ $(\alpha_n \to 0, \ \varepsilon_n \to 0)$ такую, что $\varepsilon_n \|u_n\|_1 \geqslant m > 0$ для всех n; тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n\|_1 = \infty$. Поэтому после деления неравенства (3) на $\varepsilon_n \|u_n\|_1$ приходим к соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(A_1(u_n), u_n) + (A_0(u_n), u_n)}{\|u_n\|_1} \leqslant \frac{M\|f\|_0^*}{m} < \infty,$$

которое противоречит условию коэрцитивности оператора $A_1 + A_0$.

Нам потребуется также следующее свойство:

(6) $$\forall v \in V_1, \quad \varepsilon(A_1(u_\varepsilon^\alpha), v) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \ \alpha \to 0.$$

Для его доказательства запишем неравенство, вытекающее из условия монотонности, $(A_1(u_\varepsilon^\alpha), v) \leqslant \frac{1}{\beta}(A_1(u_\varepsilon^\alpha), u_\varepsilon^\alpha) - \frac{1}{\beta}(A_1(\beta v), u_\varepsilon^\alpha) + (A_1(\beta v), v)$, $v \in V_1$.

Поскольку величина $\varepsilon(A_1(u_\varepsilon^\alpha), u_\varepsilon^\alpha)$ равномерно ограничена (см. (3), (4)), то при $\varepsilon \to 0$, $\alpha \to 0$ и при соответствующем выборе $\beta = \beta(\varepsilon, \alpha) \to \infty$ приходим к (6).

Рассмотрим ограниченное в V_0 множество $\{u_\varepsilon^\alpha\}$. Выделим подпоследовательность $u_n = u_{\varepsilon_n}^{\alpha_n}$ $(n\to\infty,\ \alpha_n\to 0,\ \varepsilon_n\to 0)$, которая обладает свойствами:

$$(7)\qquad \begin{gathered} u_n \to u\in V_0 \text{ слабо в } V_0, \quad A_0(u_n)\to \chi\in V_0' \text{ слабо в } V_0',\\ B_0(u_n)\to \psi\in V_0' \text{ слабо в } V_0'. \end{gathered}$$

Докажем, что $u\in K_0$. Для этого умножим уравнение (2) на $u_n\pm v$ $(\varepsilon = \varepsilon_n,\ \alpha=\alpha_n,\ v\in D_1\cap D_0)$ и воспользуемся свойствами монотонности:

$$\begin{aligned} |(B_0(u_n), v)| \leqslant \alpha_n|(L_1 v, u_n\pm v)| + \alpha_n\varepsilon_n|(A_1(v), u_n\pm v)| +\\ +\varepsilon_n|(B_1(u_n), v)| + \alpha_n|(f, u_n\pm v)|, \qquad v\in D_1\cap D_0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом свойств (4), (5) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty}(B_0(u_n), v) = 0$ для всех $v\in D_1\cap D_0$. Поскольку множество $D_1\cap D_0$ плотно в V_0 и последовательность $B_0(u_n)$ ограничена в V_0', то $B_0(u_n)\to 0$ слабо в V_0'. Кроме того, из уравнения (2) следует, что

$$(B_0(u_n), u_n) \leqslant \alpha_n(f, u_n)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Поэтому в силу свойства (M) для оператора штрафа B_0 (см. [1], стр. 184, 384) получаем, что $B_0(u)=\psi=0$. Тем самым $u\in K_0$.

Покажем, что $\chi = A_0(u)$. С этой целью умножим уравнение (2) на $u_n - v$, $v\in K_1\cap D_1\cap D_0$ $(\varepsilon=\varepsilon_n,\ \alpha=\alpha_n)$. Учитывая условия монотонности для A_i, L_i, B_i и свойства операторов штрафа B_i имеем:

$$(8)\qquad \limsup_{n\to\infty}(A_0(u_n), u_n - v) \leqslant (L_0 v, v-u) + (f, u-v), \qquad \forall v\in K_1\cap D_1\cap D_0.$$

В силу свойств (6), (7) неравенство (8) справедливо для всех $v\in K_0\cap D_0$. Теперь остается воспользоваться условием согласования, чтобы из (8) заключить, что

$$(9)\qquad \limsup_{n\to\infty}(A_0(u_n), u_n - u)\leqslant 0.$$

Отсюда с учетом свойства псевдомонотонности оператора A_0 ([1], стр. 190) и свойств (7) вытекает, что

$$(10)\qquad \liminf_{n\to\infty}(A_0(u_n), u_n - v)\geqslant (A_0(u), u-v), \qquad \forall v\in V_0$$

и $\chi = A_0(u)$.

Используя соотношение (10), получаем из (8):

$$(A_0(u), v-u) + (L_0 v, v-u)\geqslant (f, v-u), \qquad \forall v\in K_0\cap D_0.$$

Следовательно $u=u_0$ — решение предельного вариационного неравенства.

Утверждение (B), очевидно, вытекает из (7), (9) и монотонности A_0.

Для доказательства формулы (C) умножим уравнение (2) на $u_n - v$ и воспользуемся выражением (6):

$$(11)\qquad \limsup_{n\to\infty}\varepsilon_n(A_1(u_n), u_n)\leqslant (A_0(u_0), v-u_0) + (L_0 v, v-u_0) + (f, u_0 - v), \qquad \forall v\in K_1\cap D_1\cap D_0.$$

Учитывая свойства 6), 7), заключаем, что последнее неравенство верно для всех $v\in K_0\cap D_0$. Применяя наконец условие согласования для L_0, переходим от (11) к (C). Лемма доказана.

В случае, когда $K_1 = V_1$ вариационное неравенство (1) переходит в уравнение

$$(12)\qquad u_\varepsilon\in D_i, \quad L_i u_\varepsilon + A_\varepsilon(u_\varepsilon) = f, \qquad i=1 \text{ при } \varepsilon>0, \qquad i=0 \text{ при } \varepsilon=0.$$

Как известно, при выполнении сформулированных выше требований на операторы L_i, A_i существует сильное решение $u_\varepsilon\in D_i$ задачи (12) при всех $\varepsilon\geqslant 0$, [1], стр. 329. Относительно поведения u_ε (при $\varepsilon\to 0$) имеем из леммы 1:

Теорема 1. *Для решений u_ε уравнения* (12) *справедливы при $\varepsilon\to 0$ соотношения*:

$$(13)\qquad \begin{gathered} u_\varepsilon\to u_0 \textit{ слабо в } V_0, \quad (A_0(u_\varepsilon) - A_0(u_0), u_\varepsilon - u_0)\to 0,\\ \varepsilon(A_1(u_\varepsilon), u_\varepsilon)\to 0, \end{gathered}$$

кроме того,

$$L_1 u_\varepsilon\to L_0 u_0 \textit{ слабо в } V_1'.$$

Теорема 2. *Для решений u_ε, u_0 вариационных неравенств* (1) *справедливы соотношения* (13).

Теорема 3. *Если оператор A_0 обладает свойством*

$$(14)\qquad (A_0(u) - A_0(v), u-v)\geqslant \gamma\|u-v\|_0^p, \qquad \forall u,v\in V_0\ (\gamma>0,\ p>1),$$

то метод штрафа для вариационного неравенства (1) *сходится равномерно относительно ε, то есть*

$$\|u_\varepsilon^\alpha - u_\varepsilon\|_0 \rightrightarrows 0 \quad \textit{при } \alpha\to 0 \textit{ для всех } \varepsilon\in[0,1].$$

Рассмотрим для уравнения (2) метод аппроксимации неограниченного оператора L_i ограниченным L_h, [1], стр. 239. Пусть L_h: $V_0\to V_0'$ — ограниченный линейный оператор; $L_h\geqslant 0$ и

$$\lim_{h\to 0}\|L_h v - L_1 v\|_1^* = 0 \quad \text{для всех } v\in D_1,$$

$$\lim_{h\to 0}\|L_h v - L_0 v\|_0^* = 0 \quad \text{для всех } v\in D_0.$$

Для решения уравнения

$$(15)\qquad u_\varepsilon^{\alpha h}\in V_1, \quad L_h u_\varepsilon^{\alpha h} + A_\varepsilon(u_\varepsilon^{\alpha h}) + \frac{1}{\alpha}B_\varepsilon(u_\varepsilon^{\alpha h}) = f, \qquad \varepsilon>0,\ \alpha>0$$

применим метод Галеркина, предполагая, что V_1 — сепарабельное пространство. Обозначим через $u_\varepsilon^{\alpha hn}$ приближенное решение уравнения (15) по первым n координатным функциям. Имеют место

Лемма 2. *Пусть выполнены наложенные выше требования на операторы A_i, B_i, L_i, L_h. Если $\varepsilon\to\varepsilon_0$, $\alpha\to 0$, $h\to 0$, $n\to\infty$ то $u_\varepsilon^{\alpha hn}\to u_{\varepsilon_0}$ слабо в V_1 при $\varepsilon_0>0$ (либо $u_\varepsilon^{\alpha hn}\to u_0$ слабо в V_0 при $\varepsilon_0=0$); кроме того*

$$\left(A_{\varepsilon_0}(u_\varepsilon^{\alpha hn}) - A_{\varepsilon_0}(u_{\varepsilon_0}),\ u_\varepsilon^{\alpha hn} - u_{\varepsilon_0}\right) \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon_0 \geqslant 0$$

и

$$\varepsilon\left(A_1(u_\varepsilon^{\alpha hn}),\ u_\varepsilon^{\alpha hn}\right) \to 0 \quad \textit{при} \quad \varepsilon_0 = 0.$$

Теорема 4. *Если выполнены условия предыдущей леммы и оператор A_0 обладает свойством* (14), *то приближенные решения $u_\varepsilon^{\alpha hn}$ сходятся в V_0 равномерно относительно ε к точному решению вариационного неравенства* (1), *то есть*

$$\|u_\varepsilon^{\alpha hn} - u_\varepsilon\|_0 \rightrightarrows 0 \quad \textit{для всех} \ \ \varepsilon \in [0,1].$$

Замечание. Для приведенного в начале статьи примера в случае $p = 2$ имеет место сходимость

$$\int_0^T \int_\Omega |u_\varepsilon^{\alpha hn} - u_\varepsilon|^2\, dx dt \rightrightarrows 0, \quad \forall \varepsilon \in [0,1].$$

Литература

[1] Ж. Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, „Мир'', Москва 1972.

[2] А. М. Ильин, *Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной*, Мат. заметки 6.2 (1969), стр. 237–248.

[3] J. L. Lions, *Perturbation singulières dans les problèmes aux limites et en contrôl optimal*, Springer-Verlag, Berlin 1973.

[4] B. Margolis, *The flow of bingham fluid under a monotone perturbation*, J. Math. Anal. Appl. 48 (3) (1974), стр. 818–835.

[5] Л. А. Калякин, *Метод Галеркина для уравнений с малым параметром при старших производных*, Матем. сб. 85 (127), 4 (1971), стр. 527–537.

[6] К. В. Емельянов, *Разностная схема для трехмерного эллиптического уравнения с малым параметром при старших производных*. В сб. *Краевые задачи для уравнений математической физики*, Изд-во УНЦ АН СССР, Свердловск 1973, стр. 30–42.

[7] K. E. Barrett, *The numerical solution of singular-perturbation boundary-value problems*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 27.1 (1974), стр. 57–68.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

Г. И. ШИШКИН

Институт Математики и Механики АН СССР, Свердловск К-66, СССР

Исследование многих задач математической физики приводит к краевым задачам для дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных. При решении задач такого типа возникают трудности, что связано с появлением в решении особенностей типа пограничного слоя при малых значениях параметров.

В работе [1] в случае первой краевой задачи для уравнения

$$(1) \qquad \varepsilon \Delta u + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u = f(x), \quad 0 < x_i < 1, \ \varepsilon \in (0,1),$$

предлагается однородная разностная схема. Эта схема при фиксированном значении параметра дает аппроксимацию второго порядка. Полученное приближенное решение сходится к решению краевой задачи равномерно относительно параметра, когда шаг сетки стремится к нулю [1], [2].

В настоящей работе в случае первой краевой задачи для эллиптического уравнения с двумя малыми параметрами при производных построена разностная схема, аналогичная схеме [1], и установлена сходимость решения, полученного по этой схеме, к решению краевой задачи равномерно относительно параметров.

Рассмотрим в квадрате $R = \{0 < x_i < 1,\ i = 1,2\}$ с границей Γ эллиптическое уравнение

$$(2) \qquad Lu \equiv \varepsilon_1 \sum_{i=1}^{2} a_i(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \varepsilon_2 \sum_{i=1}^{2} b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} - u = f(x),$$

где ε_1 и ε_2 — параметры задачи, $0 < \varepsilon_1 \leqslant 1$, $|\varepsilon_2| \leqslant 1$. Пусть краевые условия имеют вид: