Let $u(\alpha, t)$ be a solution of (22)–(24) and let $v(t)$ be a solution of (32), (33). From (22) and (24) it follows that

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = A\vec{u}+b+\omega(h), \quad 0 < t < T, \tag{34}$$

$$\vec{u}(0) = c, \tag{35}$$

where $\vec{u}(t) = \big(u(0,t), u(h,t), \ldots, u(1,t)\big)^*$, $\omega(h) \to 0$ as fast as $h^2 \to 0$.

From (32), (33) and (34), (35) it follows that:

$$\frac{d(\vec{u}-v)}{dt} = A(\vec{u}-v)+\omega(h), \quad 0 < t < T,$$

$$\vec{u}(0)-v(0) = 0.$$

Now, we notice that the matrix A and the vector $\hat{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N)$, $\alpha_j = \exp(\gamma)-(1-\gamma h)^j$, $j = 0, 1, \ldots, N$, $\gamma = \big(K+\sqrt{K^2+2\mu}\big)/\mu$ satisfy the assumptions of Theorem 6. Therefore we have the inequality $\|\vec{u}-v\| \leqslant K_0 h^2$, where $K_0 = \text{const}$ for $\mu(p, r, s) \geqslant \mu_0 > 0$.

References

[1] R. S. Varga, *On a discrete maximum principle*, SIAM Journ. Numer. Anal. 3 (1966).

[2] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, „Наука", Москва 1971.

[3] A. Wakulicz, *Metodi alle differenze per le equazioni differenziali alle derivate parziali*, Roma 1970.

[4] G. T. Mcallister, *Quasilinear uniformly elliptic partial differential equations and difference equations*, SIAM Journ. Numer. Anal. 3 (1966).

[5] J. H. Bramble and B. E. Hubbard, *On a finite difference analogue of an elliptic boundary problem which is neither diagonally dominant nor of non-negative type*, J. Mathematical Phys. 43 (1964).

[6] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, cz. I, Warszawa 1957.

[7] A. P. Kubanskaja, *Convergence of the method of lines in the solutions of nonlinear boundary value problems of parabolic type with discontinuous data*, (LOMI) 18 (1970).

[8] A. P. Malcev, *Constructions of periodic solutions of boundary value problems for equations of parabolic type by the method of lines*, Izv. Vyss. Učebn. Zaved. Radiofizyka 12 (1966), pp. 1657–1665.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО ИЗМЕНЕНИЙ КРАЯ ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ

В. ВАЙНЕЛЬТ

Технический БУЗ, Карл-Маркс-Штадт, ГДР

1

Устойчивость разностных схем исследована относительно многих различных ситуаций, например, исследованы устойчивость по правой части, по начальным данным (если задача нестационарна), по краевым данным и по изменениям коэффициентов.

Однако, мало изучен вопрос о том, как изменяется разностное решение, если меняется граница области краевой задачи. Ответ на такой вопрос актуален, например, в следующих случаях:

(а) Уже при моделировании реальной системы часто область краевой задачи задана неточно из-за неточности измерений или по причинам удобного представления задачи.

(б) Для того, чтобы применить хороший вычислительный метод, иногда упрощается область задачи.

(в) Имеются задачи, при которых граница частично свободна. При этом нужны схемы, обладающие свойством устойчивости по изменениям границы.

Здесь приводится простой случай одномерной краевой задачи.

2

Для краевой задачи для уравнения Штурма–Лиувилля:

$$-(p(x)u')'+q(x)u = f(x) \quad (x \in (0, l))$$

с краевыми условиями либо третьего рода:

$$\alpha_1 u(0)-p(0)u'(0) = \gamma_1,$$
$$\alpha_2 u(l)+p(l)u'(l) = \gamma_2$$

либо первого рода:

$$u(0) = \gamma_1, \quad u(l) = \gamma_2$$

ставится на сетке

$$\bar{\omega}_h = \{x_i = ih \mid i = 0, \ldots, n-1\} \cup \{l = (n-1)h + h^* \mid 0 < h^* \leqslant h\}$$

схема второго порядка аппроксимации [1]:

$$(1) \qquad \Lambda y \equiv -(ay_{\bar{x}})_x + qy(x) = f(x) \quad (x \in \omega_h)$$

с краевым данным либо:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \lambda_1 y &\equiv \bar{\alpha}_1 y(0) - a_1 y_x(0) = \bar{\gamma}_1, \\ \lambda_2 y &\equiv \bar{\alpha}_2 y(l) + a(l) y_{\bar{x}}(l) = \bar{\gamma}_2, \end{aligned} \quad \text{либо:} \quad \begin{aligned} \lambda_1 y &\equiv y(0) = \gamma_1, \\ \lambda_2 y &\equiv y(l) = \gamma_2. \end{aligned}$$

При этом:

$$a(x) = p(x - h/2), \quad \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 + (h/2)q(0), \quad \bar{\alpha}_2 = \alpha_2 + (h^*/2)q(l),$$
$$\bar{\gamma}_1 = \gamma_1 + (h/2)f(0), \quad \bar{\gamma}_2 = \gamma_2 + (h^*/2)f(l)$$

и предполагается, что:

(I) функции p, q, f определены на достаточно широком интервале $[0, D] \ni l$, L — непрерывны.

(II) p положительно определённая, q неотрицательная функции,

(III) α_i, γ_i $(i = 1, 2)$ постоянные $(\alpha_2(l), \gamma_2(l)$ и могут быть L-непрерывные функции от $l)$. В случае краевых данных третьего рода пусть:

$$\alpha_i \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 > 0.$$

3

Для схемы (1), (2) верна следующая априорная оценка:

$$(3) \qquad \|y\|_{C^2(\omega_h)} \leqslant K[|\bar{\gamma}_1| + |\bar{\gamma}_2| + \|f\|_{C(\omega_h)}],$$

где

$$\|y\|_{C^2(\omega_h)} = \max\{\|y\|_C, \|y_{\bar{x}}\|_C, \|y_{\bar{x}x}\|_C\},$$

и где в случае краевого условия первого рода здесь следует написать γ_i вместо $\bar{\gamma}_i$.

Замечание 1. Правая часть (3) может быть ослаблена (через более слабую норму).

Замечание 2. Из (3) следует, что (1), (2) имеет единственное решение.

Замечание 3. В случае достаточно гладкого решения исходной задачи из устойчивости (3) и из аппроксимации следует сходимость второго порядка в C^2-норме.

4

Кроме (1), (2) рассматривается аналогичная схема на сетке

$$\bar{\Omega}_h = \{ih \mid i = 0, \ldots, N-1;\ N \geqslant n\} \cup \{L = (N-1)h + H^* \mid 0 < H^* \leqslant h\}$$

как разностная аппроксимация исходной задачи на интервале $[0, L]$, где для определённости $L = l + \delta$, $\delta > 0$.

Пусть $Y(x)$ решение этой аналогичной схемы, то вопрос ставится так: Что можно сказать об отклонении

$$y(x) - Y(x) \quad (x \in \omega_h \subset \Omega_h)?$$

Можно доказать следующую теорему.

Теорема. *Для решений* y *схемы* (1), (2) *и* Y *аналогичной схемы*

$$\Lambda Y = f(x) \quad (x \in \Omega_h),$$
$$\lambda_1 Y = \bar{\gamma}_1, \quad \lambda_2 Y|_{x=L} = \bar{\gamma}_2 \quad (\textit{или } \gamma_i \textit{ вместо } \bar{\gamma}_i)$$

верна оценка

$$\|y - Y\|_{C^2(\omega_h)} \leqslant \bar{K} \cdot \delta,$$

где $\bar{K} > 0$ *постоянная не зависящая от* h, l.

Литература

[1] А. А. Самарский, *Введение в теорию разностных схем*, „Наука", Москва 1971.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)