BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

КРИТЕРИИ ВЫБОРА ПАРАМЕТРОВ В ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ АНТЕНН

ЛЮЦИАН А. ВЕНГРОВИЧ

Институт Основных Проблем Техники ПАН, Варшава, Польша

В работах [4] и [5] представлен аналитический метод решения задачи возбуждения линейных и ленточных источников электромагнитного поля, генерирующих заданные функции направленности в присутствии не идеально проводящей поверхности земли, рис. 1 и 2.

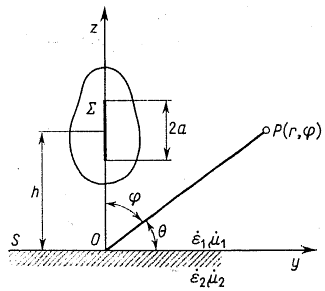

Рис. 1

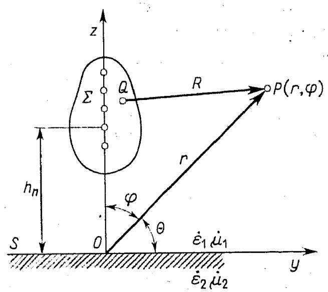

Рис. 2

Эта обратная задача состоит в обращении решения граничной задачи для уравнения Гельмгольца, [4]. Метод решения состоит в алгебраизации задачи, результатом которой является бесконечная система линейных уравнений

$$A = K \cdot C. \tag{1}$$

Матрица $(a_m)_1^\infty$ представляет здесь заданную функцию направленности

$$F(\varphi) = \sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty} a_m \cos(m\varphi). \tag{2}$$

Матрица $(c_n)_1^N$ содержит комплексные коэффициенты возбуждения отдельных линейных источников или парциальных распределений тока на ленте

$$f_n(z) = \frac{c_n}{2a} \sin\left[n\frac{\pi}{2}\left(\frac{z-h}{2}+1\right)\right], \tag{3}$$

где N обозначает принятое количество линейных источников или номер наивысшего возбужденного нами парциального распределения тока на ленте.

Матрица $K = (g_{mn} - f_{mn})_{(1;N)}^{(1;\infty)}$ описывает свойства самой системы. Матрица G зависит от геометрии источников и представляет собой их вклад в дальнее поле при граничном условии $E_{x|s} = 0$. Матрица F зависит также и от параметров земли и представляет собой поправку, которую вносит в дальнее поле действительное распределения поля на границе $E_{x|s}$.

В результате быстрого убывания элементов матрицы K с возрастанием m, рассматриваются матрицы K_1, образованные из предыдущих отбрасыванием строк с индексами $m > M_1$.

Решение задачи получаем, применяя метод квазирешения [1], и тогда

$$C = [K_1^* P K_1]^{-1} K_1^* PA \tag{4}$$

или метод регуляризации Тихонова [3], согласно которому

$$C = [K_1^* P K_1 + \alpha I]^{-1} K_1^* PA. \tag{5}$$

Минимальные свойства полученных решений переходят на функционалы, характеризующие полученное приближение заданной функции направленности и „количество тока'', необходимое для её осуществления.

$$\Delta_P = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |F(\varphi) - \overline{F}(\varphi)|^2\, d\varphi + \alpha D_P, \tag{6}$$

$$D_P = \frac{1}{2a}\int_{h-a}^{h+a} |J_x(z)|^2\, dz, \tag{7}$$

где $F(\varphi)$ и $\overline{F}(\varphi)$ обозначают заданную и осуществленную функции направленности.

Как полученное приближение заданной функции направленности, так и минимальные свойства матрицы возбуждения C зависят от выбора параметров. В случае линейных источников этими параметрами являются количество N и положение H_n излучающих элементов, а в случае ленточных источников — высота подвеса H и ширина $2A$ ленты, а также количество парциальных распределений N, которое мы намерены возбуждать.

Хотя известные решения прямых задач дают ценные указания при выборе этих параметров, однако окончательным критерием правильности произведенного выбора являются конечные результаты решения обратной задачи.

Поэтому следует сформулировать критерий оценки произведенного выбора параметров, которым можно было бы пользоваться уже в начальной стадии решения задачи. Этому вопросу посвящена настоящая работа.

Критерий оценки произведенного а приори выбора параметров может быть найден путем расчета потока мощности в окрестности источников [6], проще однако довольствоваться числами обусловленности матриц

$$K_1^* K_1 = [(G_1 - F_1)^* \cdot (G_1 - F_1)] \tag{8}$$

согласно [2]. Первое из них

$$\tilde{N} = \frac{1}{N}\sqrt{\mathrm{Sp}(K_1^* K_1)} \cdot \sqrt{\mathrm{Sp}(K_1^* K_1)^{-1}} \tag{9}$$

дает менее точный критерий, но требует только вычисления следов прямой и обратной матриц, тогда как второе

$$\tilde{H} = \sqrt{\frac{\mu_{\max}}{\mu_{\min}}} \tag{10}$$

хотя является более точным критерием обусловленности, требует нахождения собственных значений μ_i матрицы $(K_1^* K_1)$ размерами $N \times N$. Для „лучше всего обусловленной'' матрицы I числа обусловленности достигают наименьшего возможного значения равного 1.

Большие значения чисел $\tilde{N}$ и $\tilde{H}$ свидетельствуют о слабой обусловленности исследуемых матриц и указывают на несоответствующий выбор параметров. Так например, в случае ленточных источников, наблюдая поведение чисел обусловленности как функции N для фиксированных остальных параметров, можно найти критерий выбора этого существенного параметра и избежать таким образом сверх-направленных решений с большими нормами матриц возбуждения C.

С этой целью были приготовлены две программы вычисления на языке АЛГОЛ 1204, генерирующие элементы матриц K_1 и определяющие числа обусловленности $\tilde{N}$. В первой программе принимается во внимание идеальная проводимость земли ($F = 0$), во второй — не идеальная проводимость. В обеих программах для обращения матриц применялась процедура SYMINVER. Время расчета для наибольшей рассматриваемой матрицы (30×14) не превышало 10 минут на машине ODRA 1204.

Программа вычислений была приготовлена в Вычислительном Центре ПАН.

В результате произведенных расчетов построены кривые зависимости чисел обусловленности $\tilde{N}$ от N для нескольких значений ширины ленты, расположенной на постоянной высоте $H = 5\pi$ над идеально проводящей поверхностью земли, рис. 3. Легко заметить, что для каждого A существует критическое значение N, выше которого числа обусловленности резко возрастают. Результаты аналогических вычислений, проведенных для не идеально

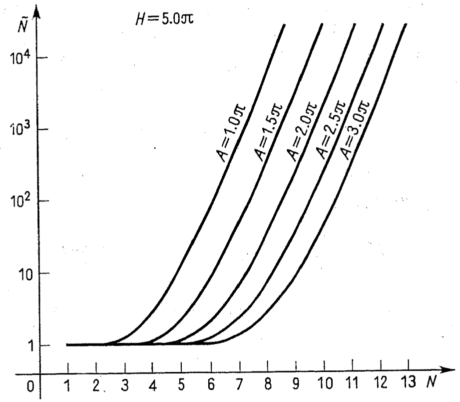

Рис. 3

проводящей земли ($\dot{\varepsilon}_2' = 4+i0$), только незначительно отличаются от приведенных на рисунке 3 в направлении более быстрого возрастания $\tilde{N}$ выше критического значения N.

Предлагаемый метод создает удобный критерий выбора числа N в зависимости от остальных параметров, чем уменьшает степень неопределенности системы и позволяет избежать длительных численных экспериментов.

Литература

[1] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Изд. II, Москва 1966.

[2] Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *О плохо обусловленных системах линейных уравнений*, Журн. вычисл. матем. и матем. физики 1.3 (1961), стр. 412.

[3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Москва 1974.

[4] L. A. Węgrowicz, *Inverse electromagnetic problem for line and strip sources over the plane imperfectly conducting ground*, 1974 URSI Symposium on Electromagnetic Wave Theory, London 1974, стр. 145–147.

[5] —, *Zagadnienie odwrotne dla anten elektrycznych umieszczonych nad nieidealnie przewodzącą powierzchnią ziemi*, Prace IPPT PAN, Nr. 17/1975, Warszawa 1975.

[6] —, *Aperture radiation and superdirectivity*, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Techn. 16.4 (1968), стр. 27–33.

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ

А. М. ФЕДОТОВ

Вычислительный Центр СО АН СССР, Новосибирск, СССР

1

Будем называть модель некоторой системы *линейной*, если в ответ на возмущение $x(s)$, $-\infty \leqslant s \leqslant t$, её фазовое состояние описывается уравнением вида

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \tilde{w}(t,s)x(s)\,ds, \tag{1}$$

где $\tilde{w}(t,s)$ — кусочно-непрерывная функция, которая называется весовой функцией уравнения (1), или режимом работы рассматриваемой системы. Будем рассматривать системы с однородными во времени режимами работы, т.е.

$$\tilde{w}(t,s) = w(t-s), \qquad t \geqslant s$$

и кроме того

$$\int_0^\infty |w(\tau)|\,d\tau < \infty, \qquad \int_0^\infty |w(\tau)|^2\,d\tau < \infty.$$

2

Будем считать, что мы можем измерять внешнее воздействие $x(t)$ и фазовое состояние $y(t)$ нашей системы. Нашей задачей является определение режима работы системы, описываемой моделью (1), если измерения проводятся с аддитивной ошибкой. Пусть $\xi(t)$ и $\eta(t)$ результаты измерений функций $x(t)$ и $y(t)$ соответственно, тогда

$$\xi(t) = x(t)+\delta_1(t),$$
$$\eta(t) = y(t)+\delta_2(t),$$

где $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$ — ошибки измерений.