BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

СТРУКТУРА РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ И ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ

И. В. СУВЕЙКА

Институт Математики АН МССР, Кишинев, СССР

Заметка посвящена исследованию структуры решений смешанной задачи и задачи Коши для уравнения

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)u(t,x)+a\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=0, \tag{1}$$

где

$$A\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^{2k+1}}{\partial x^{2k+1}},\quad k\geqslant 1,\quad a=\pm 1.$$

На основании полученных представлений решается без труда задача исследования в целом построенных решений. В первой части работы рассмотрения ведутся применительно к задаче Коши. Во второй же части под тем же углом зрения соответствующие исследования ведутся для смешанной задачи на полупрямой.

1

Можно показать, что знак при производной по t имеет определенное значение. В этой связи семейство уравнений (1) разбивается на два подсемейства вида

$$\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}+(-1)^{k-1}\frac{\partial u}{\partial t}=0 \tag{2}$$

и

$$\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}}+(-1)^{k}\frac{\partial u}{\partial t}=0, \tag{3}$$

для которых исследования проводятся отдельно. Такой раздельный подход вызван тем, что z-корни уравнения

$$z^{2k+1}+(-1)^{k-1}\lambda=0,\quad \operatorname{Re}\lambda>0, \tag{4}$$

обладают свойствами: $\operatorname{Re} z_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $\operatorname{Re} z_i \geqslant 0$, $i = k+1, \ldots, 2k+1$, в то время как z-корни уравнения

$$z^{2k+1} + (-1)^k \lambda = 0 \tag{5}$$

такие, что $\operatorname{Re} z_i > 0$, $i = 1, \ldots, k$, $\operatorname{Re} z_i \leqslant 0$, $i = k+1, \ldots, 2k+1$.

(а) Пусть $u(t, x)$ — решение уравнения (2), удовлетворяющее условию

$$u(0, x) = \varphi_0(x). \tag{6}$$

Лемма 1. *Если* $\varphi_0(x) \in C^h(R^1)$, $h \geqslant 2k+3$, $|\varphi_0^{(h)}(x)| \leqslant M \exp\{\delta |x|\}$ *при* $x \to -\infty$, *где* $\delta > 0$, *а при* $x \to \infty$ *величины* $\operatorname{Re} \varphi_0^{(h)}(x)$ *и* $\operatorname{Im} \varphi_0^{(h)}(x)$ *монотонно стремятся к нулю* ([1]), *то решение задачи* (2), (6) *имеет вид*

$$\begin{aligned} u(t, x) = {} & \varphi_0(x) + (-1)^k t \varphi_0^{(2k+1)}(x) + \ldots + \frac{(-1)^{k\mu}}{\mu!} t^\mu \varphi_0^{(2k+1)\mu}(x) + \ldots \\ & \ldots + \frac{(-1)^{k\left[\frac{h-1}{2k+1}\right]}}{\left[\frac{h-1}{2k+1}\right]!} t^{\left[\frac{h-1}{2k+1}\right]} \varphi_0^{(2k+1)\left[\frac{h-1}{2k+1}\right]}(x) + \\ & + \frac{(-1)^k}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} e^{\lambda t} \Bigg\{ \sum_{r=1}^{k} \frac{A_r}{z_r^h} \int\limits_x^{-\infty} e^{-z_r(\xi - x)} \varphi_0^{(h)}(\xi)\, d\xi + \\ & + \sum_{r=k+1}^{2k+1} \frac{A_r}{z_r^h} \int\limits_x^{+\infty} e^{-z_r(\xi - x)} \varphi_0^{(h)}(\xi)\, d\xi \Bigg\} d\lambda, \end{aligned} \tag{7}$$

где $A_r^{-1} = (2k+1) z_r^{2k}$.

Лемма 2. *Пусть степень гладкости* h *функции* $\varphi_0(x)$ *и поведение* $\varphi_0^{(h)}(x)$ *при* $x \to -\infty$ *такие же, как в лемме* 1. *Если* $\varphi_0^{(h)}(x) \in L_1(\delta_1, \infty)$, $\delta_1 \in R^1$, *и существует предел*

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{l^\alpha} \int\limits_{x-l}^{x} \varphi_0^{(h)}(y)\, dy = m_-^\alpha \{\varphi_0^{(h)}\}, \qquad \alpha > 0,$$

тогда равномерно по x *из любого компакта* $K \subset R^1$

$$\lim_{t \to \infty} t^{-\left(\alpha + \frac{2k+h}{2k+1} - 1\right)} u(t, x) =$$

$$= \frac{(-1)^k m_-^\alpha \{\varphi_0^{(h)}\}}{2k+1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} \frac{e^z}{z^{\frac{2k+h-1}{2k+1}}} \Bigg\{ \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{\omega_r^{2k+h-1}} \int\limits_0^\infty \mu^\alpha e^{\omega_r \mu z^{1/(2k+1)}}\, d\mu \Bigg\} dz.$$

([1]) Либо $\varphi_0^{(h)} \in L_1(\delta_0, \infty)$, $\delta_0 \in R^1$.

Если же $\varphi_0^{(h)}(x) \in L_1(R^1)$, *тогда*

$$\lim_{t \to \infty} t^{-\left(\frac{2k+h}{2k+1} - 1\right)} u(t, x) =$$

$$= \frac{(-1)^k}{2k+1} \Bigg\{ \Bigg(\sum_{r=1}^{k} \frac{1}{\omega_r^{2k+h}} \Bigg) \varphi_0^{(h-1)}(-\infty) + \Bigg(\sum_{r=k+1}^{2k+1} \frac{1}{\omega_r^{2k+h}} \Bigg) \varphi_0^{(h-1)}(-\infty) \Bigg\} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{2k+h}{2k+1}\right)},$$

где $z_r = \omega_r \lambda^{1/(2k+1)}$.

(б) Пусть $u(t, x)$ — решение задачи (3), (6).

Лемма 3. *Если* $\varphi_0(x) \in C^h(R^1)$, $h \geqslant 2k+3$, $|\varphi_0^{(h)}(x)| \leqslant M \exp\{\delta x\}$ *при* $x \to \infty$, *где* $\delta > 0$, *а при* $x \to -\infty$ *величины* $\operatorname{Re} \varphi_0^{(h)}(x)$ *и* $\operatorname{Im} \varphi_0^{(h)}(x)$ *монотонно стремятся к нулю, то решение задачи* (3), (6) *имеет вид*

$$\begin{aligned} u(x, t) = {} & \varphi_0(x) + (-1)^{k-1} t \varphi_0^{(2k+1)}(x) + \ldots + \frac{(-1)^{(k-1)\mu}}{\mu!} t^\mu \varphi_0^{(2k+1)\mu}(x) + \ldots \\ & \ldots + \frac{(-1)^{(k-1)\left[\frac{h-1}{2k+1}\right]}}{\left[\frac{h-1}{2k+1}\right]!} \varphi_0^{(2k+1)\left[\frac{h-1}{2k+1}\right]}(x)\, t^{\left[\frac{h-1}{2k+1}\right]} + \\ & + \frac{(-1)^{k-1}}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma} e^{\lambda t} \Bigg\{ \sum_{r=1}^{k} \frac{A_r}{z_r^h} \int\limits_x^{\infty} e^{-z_r(\xi - x)} \varphi_0^{(h)}(\xi)\, d\xi + \\ & + \sum_{r=k+1}^{2k+1} \frac{A_r}{z_r^h} \int\limits_x^{-\infty} e^{-z_r(\xi - x)} \varphi_0^{(h)}(\xi)\, d\xi \Bigg\} d\lambda. \end{aligned} \tag{8}$$

Лемма 4. *Пусть степень гладкости* h *функции* $\varphi_0(x)$ *и поведение* $\varphi_0^{(h)}(x)$ *при* $x \to \infty$ *такие же, как в лемме* 3. *Если* $\varphi_0^{(h)}(x) \in L_1(\delta_1, -\infty)$, $\delta_1 \to R^1$, *и существует предел*

$$\lim_{l \to \infty} \frac{1}{l^\alpha} \int\limits_{x}^{x+l} \varphi_0^{(h)}(y)\, dy = m_+^\alpha \{\varphi_0^{(h)}\}, \qquad \alpha > 0,$$

тогда равномерно по x *из любого компакта* $K \subset R^1$

$$\lim_{t \to \infty} t^{-\left(\alpha + \frac{2k+h}{2k+1} - 1\right)} u(t, x) =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1} m_+^\alpha \{\varphi_0^{(h)}\}}{2k+1} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-i\infty+\gamma}^{+i\infty+\gamma} \frac{e^z}{z^{\frac{2k+h-1}{2k+1}}} \Bigg\{ \sum_{r=1}^{k} \frac{1}{\omega_r^{2k+h-1}} \int\limits_0^\infty \mu^\alpha e^{-\omega_r \mu z^{1/(2k+1)}}\, d\mu \Bigg\} dz.$$

Если же $\varphi_0^{(h)}(x) \in L_1(R^1)$, *тогда*

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\left(\frac{2k+h}{2k+1}-1\right)} u(t,x) =$$

$$= \frac{(-1)^{k-1}}{2k+1}\left\{\left(\sum_{r=1}^{k}\frac{1}{\omega_r^{2k+h}}\right)\varphi_0^{(h-1)}(\infty)+\left(\sum_{r=k+1}^{2k+1}\frac{1}{\omega_r^{2k+h}}\right)\varphi_0^{(h-1)}(-\infty)\right\}\frac{1}{\Gamma\left(\dfrac{2k+h}{2k+1}\right)},$$

где величины ω_r *имеют тот же смысл, что и в лемме* 2.

В завершение этого раздела приведем представление решения задачи (1), (6) в случае, когда $\varphi_0^{h(2k+1)}(x) \in W_2^l(R^1)$, $l \geqslant 2k+2$, $h \geqslant 3$.

Имеет место такой результат: функция $u(t,x)$ — решение задачи (1), (6) — имеет вид

$$u(t,x) = \varphi_0(x) - \frac{t}{a}A\varphi_0(x) + \frac{t^2}{2a^2}A^2\varphi_0(x) - \frac{1}{3!}\frac{t^3}{a^3}A^3\varphi_0(x) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(-1)^r}{r!}\frac{t^r}{a^r}A^r\varphi_0(x) + \ldots + \frac{(-1)^{h-1}}{(h-1)!}\frac{t^{h-1}}{a^{h-1}}A^{h-1}\varphi_0(x) +$$

$$+ \frac{(-1)^h}{a^{h-1}}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma}\frac{e^{\lambda t}}{\lambda^h}\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix\xi}\widetilde{A^h\varphi_0}(\xi)}{(i\xi)^{2k+1}+a\lambda}\,d\xi\right\}d\lambda,$$

где $\tilde{f}(\xi)$ — преобразование Фурье функции $f(x) \in L_2(R^1)$. Поведение по времени построенного решения имеет характер предельного интегрального равенства и устанавливается на основе некоторых лемм из [1].

2

(а) Пусть $u(t,x)$, $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, есть решение задачи

$$\frac{\partial^{2k+1}u(t,x)}{\partial x^{2k+1}} + (-1)^{k-1}\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad t>0,\ x>0, \tag{9}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad x \geqslant 0, \tag{10}$$

$$\frac{\partial^{j-1}u(t,0)}{\partial x^{j-1}} = f_j(t), \quad t>0, \tag{11}$$

где $\varphi_1(x)$ и $f_j(t)$, $j = 1,2,\ldots,k$ — заданные функции.

Лемма 5. *Пусть* $\varphi_1(x) \in C^h[0,\infty)$, $h \geqslant 2k+3$, *величины* $\operatorname{Re}\varphi_1^{(h)}(x)$ *и* $\operatorname{Im}\varphi_1^{(h)}(x)$ *монотонно стремятся к нулю при* $x \to \infty$, $f_1(t) \in C^{h_1}[0,\infty)$, $h_1 \geqslant 3$, *а* $f_j(t) \in C^{h_2}[0,\infty)$, $h_2 \geqslant 2$, *и функции* $f_1^{(h_1)}(t)$, $f_j^{(h_2)}(t)$, $j = 2,\ldots,k$, *допускают преобразование Лапласа. Тогда существует решение задачи* (9), (10), (11), *которое дается в виде суммы* $u(t,x) = u_{\varphi_0}(t,x) + u_F(t,x)$, *где* $u_{\varphi_0}(t,x)$ — *решение задачи* (2), (6), $\varphi_0(x)$ — *продолжение функции* $\varphi_1(x)$ *из* (10) *на всю вещественную ось с сохранением степени гладкости и определенным законом поведения при* $x \to -\infty$, $u_F(t,x)$ — *решение уравнения* (9), *удовлетворяющее однородному условию* (10) *и граничному условию*

$$\frac{\partial^{j-1}u_F(t,0)}{\partial x^{j-1}} = f_j(t) - \frac{\partial^{j-1}u_{\varphi_0}(t,0)}{\partial x^{j-1}}, \quad j = 1,2,\ldots,k.$$

Лемма 6. *Пусть функции* $\varphi_1(x)$ *и* $f_j(t)$, $j = 1,\ldots,k$, *удовлетворяют условиям леммы* 5, *существуют пределы*

$$\lim_{l\to\infty}\frac{1}{l^{\alpha_i}}\int\limits_0^l f_i^{(h_i)}(\tau)\,d\tau = m_+^{\alpha_i}\{f^{(h_i)}\}, \quad \alpha_i > 0,$$

и имеет место равенство

$$\alpha_1 + h_1 = \alpha_2 + h_2 + \frac{1}{2k+1} = \ldots = \alpha_i + h_i + \frac{i-1}{2k+1} = \ldots$$

$$\ldots = \alpha_k + h_k + \frac{k-1}{2k+1} = \alpha \geqslant h.$$

Тогда справедливо предельное соотношение

$$\lim_{t\to\infty} t^{-(\alpha-1)}u(t,x) = \sum_{j=1}^{k} m_+^{\alpha_j}\{f_j^{(h_j)}\}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-i\infty+\gamma}^{i\infty+\gamma}\frac{e^z}{z^{h_j+\frac{j-1}{2k+1}-1}}\left\{\int\limits_0^\infty \mu^{\alpha_j}e^{-z\mu}d\mu\right\}dz.$$

Другие возможные ситуации в поведении функций $\varphi_1(x)$ и $f_j(t)$, $j = 1,\ldots,k$, мы опускаем.

(б) Пусть $u(t,x)$, $t \geqslant 0$, $x \geqslant 0$, есть решение задачи

$$\frac{\partial^{2k+1}u}{\partial x^{2k+1}} + (-1)^k\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad t>0,\ x>0, \tag{12}$$

$$u(0,x) = \varphi_1(x), \quad x \geqslant 0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial^{j-1}u(t,0)}{\partial x^{j-1}} = f_j(t), \quad t>0,\ j = 1,\ldots,k+1, \tag{14}$$

и выполнены условия согласования:

$$\begin{gathered} f_1(0) = \varphi_1(0), \quad f_1'(0) = (-1)^{k-1}\varphi_1^{(2k+1)}(0), \\ f_j(0) = \varphi_1^{(j-1)}(0), \quad j = 2,\ldots,k. \end{gathered} \tag{15}$$

Лемма 7. *Пусть функции* $\varphi_1(x)$, $f_i(t)$, $i = 1,\ldots,k+1$, *удовлетворяют условию*:

$$\varphi_1(x) \in C^h[0,\infty), \quad |\varphi_1^{(h)}(x)| \leqslant M\exp\{\delta x\}, \quad x \geqslant 0,\ \delta > 0,$$

$$f_1(t) \in C^{h_1}[0,\infty), \ h_1 \geqslant 3, \quad f_j(t) \in C^{h_2}[0,\infty), \ h_2 \geqslant 2, \ j = 2,\ldots,k+1,$$

и существуют образы Лапласа функций $f_i^{(h_i)}(t)$, $i = 1,\ldots,k+1$. *Если выполнены условия согласования* (15), *тогда решение задачи* (12), (13), (14) *дается суммой* $u(t,x) = u_{\varphi_0}(t,x) + u_F(t,x)$, *где* $u_{\varphi_0}(t,x)$ *имеет вид* (8), $\varphi_0(x)$ *есть* *продолжение функции* $\varphi_1(x)$ *из* (14), *удовлетворяющее условиям леммы* 3, *а* $u_F(t,x)$ *удовлетворяет уравнению* (12), *однородному условию* (13) *и граничным условиям*

$$\frac{\partial^{j-1} u_F(t,0)}{\partial x^{j-1}} = f_j(t) - \frac{\partial^{j-1} u_{\varphi_0}(t,0)}{\partial x^{j-1}}, \quad j = 1, \ldots, k+1.$$

В этом случае имеет место похожий в смысле поведения по времени такой результат.

Лемма 8. *Пусть функции* $\varphi_1(x)$ *и* $f_i(t)$, $i = 1, \ldots, k$, *удовлетворяют условиям леммы* 7, $h_1 > h_2 + \frac{i-1}{2k+1}$, $i = 2, \ldots, k+1$, $h_1 \geqslant h$, *и* $f_1^{(h_1)}(t) \in L_1(0,\infty)$, $f_i^{(h_2)}(t) \in L_1(0,\infty)$. *Тогда справедливо предельное равенство*

$$\lim_{t\to\infty} \bar{t}^{(h-1)} u(t,x) = \frac{f_1^{(h_1-1)}(\infty) - f_1^{(h_1-1)}(0)}{(h_1-1)!}.$$

Замечание. Построенные нами выше решения входят в класс единственности решений соответствующих задач.

Литература

[1] И. В. Сувейка, *Решение задачи Коши для одного нестационарного уравнения и его асимптотика при больших значениях времени*. II, Дифференциальные уравнения 10.4 (1974).

Presented to the Semester
Mathematical Models and Numerical Methods
(February 3–June 14, 1975)

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 3

ON THE SOLUTION OF A CLASS OF EQUATIONS WITH MONOTONE OPERATORS BY ITERATION AND PROJECTION-ITERATION

K. GRÖGER

Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik der ADW, Berlin, DDR

Introduction

In our lectures during the semester on "Mathematical Models and Numerical Methods" at Banach Center we were concerned with the following problems:

1. Approximative solution of equations of the type $Au = 0$, where A is a strongly monotone and Lipschitzian operator.

2. Approximative solution of problems of the type $\Lambda u + Au \ni 0$, where Λ is a (possibly multivalued) maximal monotone operator and A is again strongly monotone and Lipschitzian.

3. A posteriori error estimates for approximate solutions of equations with monotone operators.

The results we presented and further information on some special cases one can find in Gajewski–Gröger–Zacharias [11] (Kap.III.3, Kap. V), in Aubin [1] (Chap. 10) and in a series of papers of Gajewski–Gröger ([5]–[10]). Therefore, in this paper we shall not repeat the contents of our lectures. Instead of this we shall present some results, which are closely related to the subject of our lectures and which were stimulated by our stay at Banach Center. We shall consider problems of the type

$$Au + B\Lambda u \ni 0, \quad u \in D(\Lambda),$$

where Λ is maximal monotone and A, B are strongly monotone and Lipschitzian. Our results are slight generalizations of the results of Gajewski–Gröger [5] on problems of the type $\Lambda u + Au \ni 0$ mentioned above.

The paper consists of 3 sections. In Section 1 we start with a precise formulation of the problems we are interested in and we prove an existence and uniqueness result by means of the contraction principle. We show under some assumptions on A and B that it is possible to reduce the original problem to the iterative solution of a sequence of problems with linear operators instead of A and B. In Section 2 we