Теорема 5. *Для того чтобы уравнение* (7) *имело решение в пространстве* $H(G)$, $G = \mathcal{D}+K$, *для всякой плоской выпуклой области* $\mathcal{D}$ *и любой функции* $g(z) \in H(\mathcal{D})$ *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\tilde{F}(\lambda)$ *была функцией вполне регулярного роста в* C.

Отметим, что в работе [14] находятся необходимые и достаточные условия размерности уравнения (7) в пространстве $H(G)$, $G = \mathcal{D}+K$, где $\mathcal{D}$ — фиксированная выпуклая область в плоскости C.

Литература

[1] B. Malgrange, *Existence et approximation des solution des equations aux derivees partielles et des equation de convolution*, Ann. Inst. Fourier 6 (1956), 271–355.

[2] L. Ehrenpreis, *Mean periodic functions*, Amer. J. Math. 77 (1955), 293–326.

[3] A. Martineau, *Equations differentielles d'ordre infini*, Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 109–154.

[4] D. Pisanelli, *Une generalization des théorèmes de convolution*, C. R. Acad. Sci. Paris, A 275 (1972), 1319–1322.

[5] В. В. Напалков, *О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно сдвига*, Изв. АН СССР, серия матем. 36 (1972), 1269–1281.

[6] —, *Уравнения типа свертки в трубчатых областях* C^2, ibid. 38 (1974), 446–456.

[7] —, *Об одной теореме единственности в теории функций многих комплексных переменных и однородных уравнениях типа свертки в трубчатых областях* C^n, ibid. 40 (1976), 115–132.

[8] В. В. Моржаков, *Об уравнениях свертки в пространствах функций, голоморфных в выпуклых областях и на выпуклых компактах в* C^n, Матем. заметки 16 (1974), 431–440.

[9] В. В. Напалков, *Об одном классе неоднородных уравнений типа свертки*, Успехи математич. наук 29 (1974), 217–218.

[10] Л. Хёрмандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, Москва 1968.

[11] Л. И. Ронкин, *Введение в теорию целых функций многих переменных*, Наука, Москва 1971.

[12] L. Gruman, *Entire functions of several variables and their asymptotic growth*, Ark. för Math. 9 (1) (1971), 141–163.

[13] В. С. Азарин, *Об одном характеристическом свойстве функций вполне регулярного роста в нутри угла*. Сб. *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, 2, Харьков 1966, 55–67.

[14] О. В. Епифанов, *Об эпиморфизме свертки в выпуклых областях*, Докл. АН СССР 217 (1974), 18–19.

Presented to the Semester
COMPLEX ANALYSIS
February 15–May 30, 1979

COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES $f(x, y)$ DONT L'ENSEMBLE DES ZÉROS PAR RAPPORT A y EST ALGÉBRIQUE

NGUYEN THANH VAN

UER de Mathématiques, Informatique et Gestion
Université Paul Sabatier
118, Route de Narbonne, 31077-Toulouse Cedex, France

1. Introduction. Résumé

Dans une note parue aux C. R. A. S. [4], nous avons établi le résultat suivant

Théorème 1. *Soit* Ω *un domaine dans* C^m *et* $f(x, y)$ *une fonction analytique sur* $\Omega \times C^n$, *pour tout* $x \in \Omega$ *on pose* $Z_{x,f} = \{y \in C^n: f(x, y) = 0\}$. *Si l'ensemble* $E_f = \{x \in \Omega$: $Z_{x,f}$ *est algébrique*$\}$ *n'est pas polaire dans un domaine* $\Omega_0 \Subset \Omega$, *alors il existe une fonction* h *analytique sur* $\Omega \times C^n$ *et des fonctions* A_α $(\alpha \in N^n, |\alpha| \leqslant q)$ *analytiques sur* Ω *telles que*

$$f(x, y) = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant q} A_\alpha(x) \cdot y^\alpha\Big) \exp h(x, y).$$

Dans cet énoncé on peut mettre „non polaire dans Ω" à la place de „n'est pas polaire dans un domaine $\Omega_0 \Subset \Omega$", en raison d'un important résultat de Josefson [2]. Le but de ce travail est d'étendre cet énoncé aux fonctions analytiques sur des espaces vectoriels topologiques de Baire.

Soient E et F deux e.v.t. complexes séparés et de Baire dont le produit $E \times F$ est également supposé de Baire. Soit Ω un domaine dans E.

Définition. Un ensemble $X \subset E$ est dit *finiment polaire* dans Ω si et seulement si $X \not\supset \Omega$ et pour tout sous-espace affine de dimension finie Δ dans E, on a sur chaque composante connexe C de $\Omega \cap \Delta$:

— ou bien $X \supset C$,

— ou bien $X \cap \Delta$ est polaire dans C.

Il résulte immédiatement de cette définition que si (X_n) est une suite d'ensembles finiment polaires dans Ω et si $\bigcup_n X_n \not\supset \Omega$, alors $\bigcup_n X_n$ est finiment polaire dans Ω.

Théorème 2. *Soit* $f(x, y)$ *une fonction analytique sur* $\Omega \times F$, *on pose*

$$Z_{x,f} = \{y \in F: f(x, y) = 0\}$$

et

$$E_f = \{x \in \Omega\colon Z_{x,f} \text{ est l'ensemble des zéros d'un polynôme sur } F\}.$$

Si E_f n'est contenu dans aucun ensemble finiment polaire dans Ω, alors $f(x,y) = P(x,y)\exp g(x,y)$, où g est analytique sur $\Omega\times F$ et P est analytique sur $\Omega\times F$ tel que: pour tout $x\in\Omega$, $P(x,y)$ est un polynôme de degré $\leqslant q$ (q entier constant) en y.

2. Démonstration du théorème 2, cas $F = C$

On peut toujours supposer $f(x,0)\not\equiv 0$, quitte à faire un changement d'origine dans F.

2.1. On considère la fonction

$$N_f(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(x,te^{i\theta})|\,d\theta$$

qui est convexe par rapport à $\log t$ ($t>0$). On pose

$$q(x) = \lim_{t\to\infty}\frac{N_f(x,t)}{\log t} \quad \text{et} \quad q = \sup_{x\in\Omega} q(x).$$

Il est évident que $q(x)\in N\cup\{-\infty\}$.

LEMMA. *Dans l'hypothèse du théorème 2, q est un entier $\geqslant 0$ et l'ensemble $e = \{x\in\Omega\colon q(x) < q\}$ est finiment polaire dans Ω et de 1ère catégorie de Baire.*

Preuve. On montre d'abord que q est fini, en raisonnant par l'absurde. Supposons $q=\infty$, posons:

$$X = \{x\in\Omega\colon q(x)<\infty\},\quad X_{ij} = \left\{x\in\Omega\colon \frac{N_f(x,i+k)}{\log(i+k)}\leqslant j\ \forall\, k\in N\right\}(i,j\in N).$$

X_{ij} est évidemment fermé dans Ω, car $x\to N_f(x,t)$ est semicontinue supérieurement dans Ω. D'autre part, $\mathring{X}_{ij} = \emptyset$, en effet dans le cas contraire, on aurait $q(x)\leqslant j$ $\forall x\in\omega = \mathring{X}_{ij}$ ouvert non vide, ce qui entrainerait $q(x)\leqslant j$ $\forall x\in\Omega$, contraire à l'hypothèse $q=\infty$. On démontre cette implication de la manière suivante: Soit A l'ensemble des points $x_0\in\Omega$ tels que $q(x)\leqslant j$ pour x appartenant à un voisinage de x_0, A est évidemment ouvert et $\omega\subset A$.

On va montrer que $\Omega = A$, il suffit de montrer que tout ouvert B de Ω disqué par rapport à un point $a\in A$ est inclus dans A. En effet soit $x\in B$, le plan $\{a+\zeta(x-a)\colon \zeta\in C\}$ coupe B suivant un disque δ de centre a. Pour tout u appartenant à un voisinage de a dans ce disque, on a $q(u)\leqslant j$. Par conséquent, on a d'après un théorème de Pierre Lelong ([3], Proposition 4), $q(u)\leqslant j$ $\forall u\in\delta$, donc $q(x)\leqslant j$.

$X = \bigcup X_{ij}$ est donc de première catégorie de Baire, par conséquent $X\neq\Omega$. A l'aide du théorème de Lelong, il est facile de voir que X est finiment polaire dans Ω. Or $X\supset E_f$ qui n'est contenu dans aucun ensemble finiment polaire (par hypothèse), donc contradiction, ce qui prouve que q est fini. Il est clair que $q\in N$ et $\{x\in\Omega\colon q(x) = q\}\neq\emptyset$. Encore par le théorème de Lelong, on voit que l'ensemble $e = \{x\in\Omega\colon q(x)<q\}$ est finiment polaire dans Ω.

2.2. Posons $C_f = \{x\in\Omega\colon f(x,\theta) = 0\}$. Comme en dimension finie, on voit facilement que $C_f\cup e$ est fermé, et finiment polaire dans Ω. D'autre part, cet ensemble est de première catégorie de Baire. Par conséquent $G = \Omega\setminus(C_f\cup e)$ est un ouvert partout dense dans Ω.

Pour tout $x\in G$, $y\to f(x,y)$ possède m zéros notés $y_j(x)$ ($j=1,2,\dots,m$), on a:

$$f(x,y) = f(x,0)\,(1-y/y_1(x))\dots(1-y/y_m(x))\exp h(x,y)$$

avec

$$h(x,y) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C^+(0,R)}\frac{f'_\xi(x,\xi)}{f(x,\xi)}\log(1-y/\xi)\,d\xi$$

où R est arbitraire $>\max|y_j(x)|$. Par un raisonnement classique, on voit que h est séparément analytique, donc analytique, sur $G\times C$. On va montrer que h est analytiquement prolongeable à $\Omega\times C$. Soit $x_0\in\Omega$, soit π un sous-espace affine de dimension finie de E passant par x_0 tel que la composante connexe de $\pi\cap\Omega$ contenant x_0 rencontre G. Un tel π existe, car G est un ouvert partout dense dans Ω. π peut s'écrire $\pi = \{x_0+\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\dots+\lambda_qu_q\colon \lambda_j\in C\}$ où les u_j sont fixés dans E. On applique le Théorème 1 à la fonction

$$\Phi(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_q;y) = f(x_0+\lambda_1u_1+\dots+\lambda_qu_q,y)$$

définie sur $\omega_\pi\times C$ avec

$$\omega_\pi = \{(\lambda_1,\dots,\lambda_q)\in C^q\colon x_0+\lambda_1u_1+\dots+\lambda_qu_q\in \text{composante de } \Omega\cap\pi \text{ contenant } x_0\}.$$

On voit que la fonction $h(x_0+\lambda_1u_1+\dots+\lambda_qu_q,y)$, définie sur $(\omega_\pi\cap G)\times C$, est analytiquement prolongeable à $\omega_\pi\times C$. On note par $h_\pi(x_0,y)$ la valeur de cette fonction au point $(\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_q=0,y)$. Il est clair que $h_\pi(x_0,y) = h(x_0,y)$ si $x_0\in G$. D'autre part, $h_\pi(x_0,y)$ ne dépend pas du choix de π: Si π' est un autre sous-espace affine de dimension finie passant par x_0 et rencontrant G, alors

$$h_\pi(x_0,y) = h_{\pi'}(x_0,y)\qquad \forall\, y\in C.$$

En effet

$$\pi' = \{x_0+\mu_1v_1+\dots+\mu_rv_r;\ \mu_j\in C\},$$

l'espace affine

$$\pi'' = \{x_0+\lambda_1u_1+\dots+\lambda_qu_q+\mu_1v_1+\dots+\mu_rv_r\colon \lambda_j \text{ et } \mu_j\in C\}$$

coupe G suivant un ouvert non vide de π'', en appliquant le Théorème 1 à la fonction

$$(\lambda_1,\dots,\lambda_q,\mu_1,\dots,\mu_r;y)\to f(x_0+\lambda_1u_1+\dots+\lambda_qu_q+\mu_1v_1+\dots+\mu_rv_r,y) = \varphi(\lambda,\mu,y).$$

On voit que la fonction

$$h(x_0+\lambda_1 u_1+ \ldots +\lambda_q u_q+\mu_1 v_1+ \ldots +\mu_r v_r, y),$$

définie sur $(\omega_{\pi''}\cap G)\times \boldsymbol{C}$, est analytiquement prolongeable à $\omega_{\pi''}\times \boldsymbol{C}$ et

$$h_\pi(x_0, y) = h_{\pi'}(x_0, y) = \varphi(0, 0, y).$$

Maintenant pour tout $(x, y)\in \Omega\times \boldsymbol{C}$, on pose

$$\tilde{h}(x, y) = h_\Delta(x, y)$$

où Δ est un sous-espace affine de dimension finie quelconque de E passant par x et rencontrant G. $\tilde{h}$ est analytique au sens de Gâteaux sur $\Omega\times \boldsymbol{C}$ et coïncide avec h sur $G\times \boldsymbol{C}$. Donc d'après le Théorème de Zorn, $\tilde{h}$ est analytique sur $\Omega\times \boldsymbol{C}$.

Considérons $P(x, y) = f(x, y)\exp(-g(x, y))$ avec $g = \tilde{h}$, P est analytique sur $\Omega\times \boldsymbol{C}$ et pour tout $x\in\Omega\setminus(C_f\cup e)$, $P(x, y)$ est un polynôme de degré q en y, donc $P(x, y) = \sum_0^q A_k(x)y^k$ avec les A_k analytiques sur Ω.

3. Cas général

On considère la fonction $\varphi(x, y, \lambda) = f(x, \lambda y)$ qui est analytique sur $\Omega\times F\times \boldsymbol{C}$. Pour tout $(x, y)\in E_f\times F$, la fonction $\lambda\to\varphi(x, y, \lambda)$ possède $q(x, y) < \infty$ zéros ou est identiquement nulle. L'hypothèse faite sur E_f entraîne: $E_f\times F$ n'est contenu dans aucun ensemble finiment polaire dans $\Omega\times F$. D'après le cas précédent ($F = \boldsymbol{C}$), on voit que la fonction $\lambda\to\varphi(x, y, \lambda)$ possède exactement q zéros $\lambda_1(x, y), \ldots$ $\ldots, \lambda_q(x, y)$ tous $\neq 0$ (q entier constant), sauf pour (x, y) appartenant à un ensemble Λ fermé et finiment polaire dans $\Omega\times F$ ayant la propriété suivante:

pour tout $(x, y)\in(\Omega\times F)\setminus\Lambda$ et tout $\lambda\in \boldsymbol{C}$,

$$(x, \lambda y)\in(\Omega\times F)\setminus\Lambda.$$

Donc pour $(x, y, \lambda)\in[(\Omega\times F)\setminus\Lambda]\times \boldsymbol{C}$, on a:

$$f(x, \lambda y) = f(x, 0)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1(x, y)}\right)\ldots\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_q(x, y)}\right)\exp\tilde{g}(x, y, \lambda)$$

avec

$$\tilde{g}(x, y, \lambda) = -\frac{1}{2i\pi}\int_{C^+(0,R)}\frac{f'_z(x, zy)}{f(x, zy)}\log\left(1-\frac{\lambda}{z}\right)dz \qquad (R > R(x, y))$$

on constate que $\tilde{g}(x, y, \lambda) = \tilde{g}(x, \lambda y, 1)$.

Encore d'après le cas $F = \boldsymbol{C}$, $\tilde{g}$ est analytiquement prolongeable à $\Omega\times F\times \boldsymbol{C}$. On pose $g(x, y) = \tilde{g}(x, y, 1)$, $P(x, y) = f(x, y)\exp(-g(x, y))$.

La fonction $P(x, y)$ est analytique sur $\Omega\times F$ et, pour tout $(x, y)\in(\Omega\times F)\setminus\Lambda$, $P(x, \lambda y)$ est un polynôme de degré q en $\lambda\in \boldsymbol{C}$.

Soit $\sum_0^\infty A_m(x, y)$ le développement de $P(x, y)$ en série de polynômes homogènes en y.

Chaque $A_m(x, y)$ est analytique sur $\Omega\times F$ et il résulte de ce qui précède que:

$$A_m(x, y) = 0 \quad \forall(x, y)\in(\Omega\times F)\setminus\Lambda, \forall m > q.$$

Puisque $(\Omega\times F)\setminus\Lambda$ est un ouvert non vide du domaine $\Omega\times F$, on a $A_m = 0$ $\forall m > q$. Fin de démonstration.

4. Remarques

4.1. Il résulte immédiatement du théorème 2: Soit E un espace vectoriel topologique complexe séparé et de Baire. Soit f une fonction analytique sur E, $f(0)\neq 0$ (0 = élément nul de E). Si pour tout x appartenant à un ensemble $e\subset E$ qui n'est contenu dans aucun ensemble finiment polaire dans E, $z\to f(zx)$ possède un nombre fini de zéros dans tout le plan $\boldsymbol{C}$ ($z\in \boldsymbol{C}$), alors $f(x) = P(x)\exp g(x)$ où P est un polynôme et g une fonction analytique sur E.

Cet énoncé étend à la dimension infinie un résultat de Hengartner [1].

4.2. Le théorème 2 est aussi une extension à la dimension infinie d'un résultat de Ronkin [5] qui est à l'origine du théorème 1.

4.3. Ce texte reprend et développe la seconde partie d'une communication faite au Colloque d'Analyse Harmonique et Complexe de La Garde — Freinet (Juin 1977, Actes multigraphiés, Université de Provence), ou le théorème 2 est annoncé sans démonstration pour les espaces de Banach. Il constitue l'essentiel d'un exposé que l'auteur a envisagé de faire (sans l'avoir fait) pendant son séjour au Centre Banach de Varsovie en Avril 1979.

Bibliographie

[1] W. Hengartner, *Familles de traces sur les sous-espaces d'une fonction plurisousharmonique ou entière dans* $\boldsymbol{C}^n$, Comm. Helv. Math. 43 (1968), 358–377.

[2] B. Josefson, *On the equivalence of locally polar and globally polar sets for plurisubharmonic functions on* $\boldsymbol{C}^n$, Arkiv för Mat. 16 (1) (1978), 109–115.

[3] P. Lelong, *Sur la structure des courants positifs fermés*, Séminaire Lelong 1975–76, Springer Lecture Notes 578, 136–156.

[4] Nguyen Thanh Van, *Sur les fonctions analytiques de la forme* $f(x, y) = \left(\sum_{|\alpha|\leq q} A_\alpha(x)y^\alpha\right)\times$ $\times\exp h(x, y)$, C. R. Acad. Sci. Paris, Série A, 284 (1977), 1447–1449.

[5] L. Ronkin, *Some problems on the distribution of zeros of entire functions of several variables*, Math. Sb. 16 (1972), 363–380.

Presented to the Semester
COMPLEX ANALYSIS
February 15–May 30, 1979