COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ

В. В. НАПАЛКОВ

Отдел Физики и Математики Башкирского Филиала АН СССР
ул. Тукаева 50, SU-450057 Уфа, СССР

В работе рассматриваются неоднородные уравнения свертки в полупространствах комплексного пространства C^n. Найдены условия разрешимости таких уравнений. В частности, для размерности $n = 1$ эти условия состоят в том, чтобы характеристическая функция уравнения свертки имела вполне регулярный рост.

1. Введение

Пусть $\mathscr{D} \subset C^n$ — произвольная область; $H(\mathscr{D})$ — пространство функций, аналитических в $\mathscr{D}$, с топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathscr{D}$; $H^*(\mathscr{D})$ — сопряженное с $H(\mathscr{D})$ пространство с топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах из $H(\mathscr{D})$. Так как $H(\mathscr{D})$ является замкнутым подпространством пространства всех непрерывных функций на $\mathscr{D}$ с топологией равномерной сходимости на компактах из $\mathscr{D}$, то всякий функционал $F \in H^*(\mathscr{D})$ определяется некоторой комплексной конечно-аддитивной мерой μ_F, supp $\mu_F \subset \mathscr{D}$, т.е. $\langle F, f\rangle = \int f(z) d\mu_F$, $f(z) \in H(D)$. Пусть $F_0 \in H^*(\mathscr{D})$. Тогда функционал F_0 определяет в пространстве $H(\mathscr{D})$ следующий оператор свертки

$$M_{F_0}[f] = F_0 * f \equiv \langle F_0, f(z+u)\rangle. \tag{1}$$

Так как носитель меры μ_{F_0} компактно лежит в $\mathscr{D}$, то свертка $F_0 * f$ является функцией, аналитической в некоторой окрестности нуля. Характеристической функцией оператора (1) будем называть функцию $\hat{F}_0(\lambda) = \left\langle F_0, \exp\langle\lambda, z\rangle\right\rangle$.

Для оператора (1) естественным образом возникают следующие две задачи:

1. Аппроксимационная задача — всякое ли решение однородного уравнения $M_{F_0}[f] = 0$ из пространства $H(\mathscr{D})$ можно аппроксимировать линейными комбинациями экспоненциальных многочленов, удовлетворяющих этому же уравнению;

2. Найти условия разрешимости неоднородного уравнения

$$M_{F_0}[f] = g. \tag{2}$$

Первая задача изучалась в работах [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7]. Было показано, что аппроксимационная задача имеет положительное решение в случаях, когда $\mathscr{D} = C^n$ ([1], [2]); далее, когда $\mathscr{D}$ — полупространство в C^n или область ,,типа полосы'' ([5]). Наконец, в работах [6], [7] с помощью нового подхода аппроксимационная задача была решена, в частности, для произвольной трубчатой области в C^n.

Вторая задача изучалась Мальгранжем [1], который доказал разрешимость уравнения (2), когда $\mathscr{D} = C^n$. Разрешимость уравнения (2) была доказана Мартино [3] для произвольной выпуклой области $\mathscr{D} \subset C^n$, но при существенном ограничении на характеристическую функцию оператора M_{F_0} — она предполагалась функцией минимального типа. Результат Мартино был затем существенно обобщен В. В. Моржаковым [8], который нашел более общие достаточные условия разрешимости уравнения (2).

В данной работе мы находим общий критерий разрешимости уравнения (2) в случае, когда $\mathscr{D}$ — полупространство в C^n. Используя этот критерий и то, что любая выпуклая область исчерпывается изнутри выпуклыми многогранниками, можно находить условия разрешимости уравнения (2) для выпуклых областей. Заметим, что в случае размерности $n = 1$ отсюда получаются необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (2) для произвольной выпуклой области $\mathscr{D}$, которые ранее были найдены в работе [9].

2. Предварительные сведения

(а) Пусть $\mathscr{D}$ является областью Рунге. Введем оператор $T_{\mathscr{D}}$, действующий из пространства $H^*(\mathscr{D})$ в пространство целых функций экспоненциального типа по правилу: если $F \in H^*(\mathscr{D})$, то $T_{\mathscr{D}}[F]$ — преобразование Лапласа функционала F, то есть $T_{\mathscr{D}}[F] = \hat{F}(\lambda) = \langle F, \exp\langle\lambda, z\rangle\rangle$. Множество всех преобразований Лапласа элементов из $H^*(\mathscr{D})$ обозначим через $P_{\mathscr{D}}$. Так как $\mathscr{D}$ является областью Рунге, то отображение $T_{\mathscr{D}}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $H^*(\mathscr{D})$ и $P_{\mathscr{D}}$. Используя этот изоморфизм, наделим множество $P_{\mathscr{D}}$ топологией так, чтобы отображение $T_{\mathscr{D}}$ было топологическим изоморфизмом.

(б) Компактное множество $K \subset \mathscr{D}$ называется *определяющим функционал* $F \in H^*(\mathscr{D})$ (см. [10], стр. 135), если для всякой окрестности ω этого компакта существует константа C_ω такая, что

$$|\langle F, f\rangle| \leqslant C_\omega \sup_\omega |f|, \quad f \in H(\mathscr{D}).$$

Из определения топологии в $H(\mathscr{D})$ следует, что для любого функционала $F \in H^*(\mathscr{D})$ существует некоторый компакт, определяющий F.

Для произволного компакта $K \subset C^n$ положим $H_K(\zeta) = \sup_{z \in K} (\operatorname{Re}\langle z, \zeta\rangle)$. Очевидно, $H_K(\zeta)$ — выпуклая положительно однородная функция переменной ζ и если компакт K является выпуклым, то $K = \{z \in C^n\colon (\operatorname{Re}\langle z, \zeta\rangle) \leqslant H_K(\zeta), \zeta \in C^n\}$. Имеет место следующая

Теорема А (см. [10], стр. 137). *Если функционал $F \in H^*(\mathscr{D})$ определяется компактным множеством K, то для каждого $\delta > 0$ существует постоянная C_δ такая, что*

$$\left|\left\langle F, \exp\langle z, u\rangle\right\rangle\right| \leqslant C_\delta \cdot \exp\left(H_K(z) + \delta \cdot |z|\right), \quad z \in C^n. \tag{3}$$

Обратно, если $K \subset \mathscr{D}$ — выпуклое компактное множество и $\varphi(z)$ — целая функция, удовлетворяющая неравенству (3) *для всякого $\delta > 0$, то существует функционал $F \in H^*(\mathscr{D})$, определяемый компактом K такой, что $\varphi(z) = \left\langle F, \exp\langle z, u\rangle\right\rangle$.*

3. Решение неоднородных уравнений свертки в полупространстве

Пусть $\varphi(z)$ — целая функция экспоненциального типа в C^n. Введем две функции

$$L_\varphi(z) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{r} \ln|\varphi(r\cdot z)|, \qquad L_\varphi^*(z) = \overline{\lim_{\zeta\to z}} L_\varphi(z), \qquad z \in C^n,$$

которые будем называть, соответственно, радиальным и регуляризованным радиальным индикатором. Отметим несколько нужных нам для дальнейшего свойств функций $L_\varphi(z)$ и $L_\varphi^*(z)$ (см., например, [11], стр. 286).

1) Функция $L_\varphi^*(z)$ является положительно однородной порядка $\varrho = 1$ и плюрисубгармонической функцией в C^n.

2) Множество точек z, для которых $L_\varphi(z) \neq L_\varphi^*(z)$ имеет нулевую меру Лебега.

3) Для всякого $z^0 \in C^n$, $|z^0| = 1$ и любого числа $A > L_\varphi^*(z^0)$ существует такой открытый конус $V \subset C^n$ с вершиной в начале координат, что $z^0 \in V$ и при всех $z \in V$ справедливо неравенство: $\ln|\varphi(z)| \leqslant A|z|$.

Пусть $F \in H^*(C^n)$. Найдем преобразование Лапласа $\hat{F}(\lambda)$ функционала F и построим функции $L_{\hat{F}}(z)$ и $L_{\hat{F}}^*(z)$.

Лемма 1. *Пусть $z_0 \in C^n$ — произвольная точка, лежащая на единичной сфере. Тогда в полупространстве*

$$(\operatorname{Re}\langle z, \bar{z}_0\rangle) \leqslant L_{\hat{F}}^*(z_0) + \varepsilon, \quad \bar{z}_0 = (\bar{z}_0^1, \ldots, \bar{z}_0^n),$$

существует выпуклое компактное множество, определяющее функционал F.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное сколь угодно малое число. В пространстве C^n возьмем замкнутый шар B_r радиуса r и построим множество:

$$K_r = B_r \cap \{z \in C^n\colon (\operatorname{Re}\langle z, \bar{z}_0\rangle) \leqslant L_{\hat{F}}^*(z_0) + \varepsilon\}.$$

Если число r достаточно велико, то можно утверждать, что

1) множество K_r не пусто;

2) опорная функция $H_{K_r}(z)$ выпуклого множества K_r удовлетворяет условию:

$$L^*_{\hat F}(z) < H_{K_r}(z)+\varepsilon|z|, \quad z \in C^n. \tag{4}$$

Используя принцип Фрагмена–Линделёфа для субгармонических функций (см. [11], стр. 116), из (4) вытекает существование такого r_0, что неравенство

$$L^*_{\hat F}(z) < H_{K_{r_0}}(z)+\varepsilon_1|z|, \quad z \in C^n, \tag{5}$$

выполняется для всякого $\varepsilon_1 > 0$. Из неравенства (5) и свойства (3) регуляризованного индикатора следует, что выполняется неравенство:

$$\ln|\hat F(z)| < H_{K_{r_0}}(z)+\varepsilon_1|z|,$$

где $\varepsilon_1 > 0$ — произвольное сколь угодно малое число, $|z| > r^0(\varepsilon_1)$. По теореме A из последнего неравенства получаем утверждение леммы 1.

Замечание. Из доказательства леммы 1 следует, что $L^*_{\hat F}(z_0) \leqslant H_{K_{r_0}}(z_0)$.

Пусть точка z_0 такая же как и в лемме 1. Полупространство

$$(\mathrm{Re}\langle z, \bar z_0\rangle) < L^*_{\hat F}(z_0)$$

будем в дальнейшем обозначать через $\Pi(z_0)$.

Рассмотрим теперь полупространство $D(z_0)$ вида $(\mathrm{Re}\langle z, \bar z_0\rangle) < c$, где c — некоторое действительное число и построим область $G(z_0) = D(z_0)+\Pi(z_0)$. В пространстве $H(G(z_0))$ рассмотрим оператор свертки

$$M[f] = \langle F, f(z+u)\rangle, \quad f(z) \in H(G(z_0)). \tag{6}$$

Из леммы 1 вытекает, что $M[f](z) \in H(D(z_0))$. Изучим вопрос о том, когда оператор M сюрьективно отображает пространство $H(G(z_0))$ на $H(D(z_0))$, т.е. когда уравнение

$$\langle F, f(z+u)\rangle = g(z) \tag{7}$$

имеет решение $f(z) \in H(G(z_0))$ для всякой функции $g(z) \in H(D(z_0))$. Без ограничения общности можно считать, что $\hat F(0) \neq 0$. Введем пространства $P_{D(z_0)}$ и $P_{G(z_0)}$. Очевидно, оператор (6) является линейным и непрерывным оператором из пространства $H(G(z_0))$ в $H(D(z_0))$. Тогда оператор M^*, сопряженный с M, является линейным и непрерывным оператором, действующим из пространства $H^*(D(z_0))$ в $H^*(G(z_0))$. Пусть функционал $S \in H^*(D(z_0))$. Найдем преобразование Лапласа элемента $M^*[S] \in H^*[G(z_0)]$. Из определения сопряженной операции имеем:

$$\big\langle M^*[S], \exp\langle \lambda, z\rangle\big\rangle = \big\langle S, M[\exp\langle\lambda, z\rangle]\big\rangle = \hat F(\lambda)\cdot \hat S(\lambda).$$

Отсюда вытекает, что оператор M порождает оператор $Z_{\hat F}\colon P_{D(z_0)} \to P_{G(z_0)}$ умножения на характеристическую функцию оператора (6). Из определения топологии в пространствах $P_{D(z_0)}$ и $P_{G(z_0)}$ следует, что оператор $Z_{\hat F}$ в топологическом смысле эквивалентен оператору M^*. Образ $\mathrm{Im}\, M$ оператора M

является плотным подмножеством в $H(D(z_0))$. Действительно, если в уравнении (7) взять в качестве функции $g(z)$ произвольный многочлен, то методом неопределенных коэффициентов можно найти многочлен, удовлетворяющий этому уравнению (здесь используется то, что $\hat F(0) \neq 0$). Так как всякое полупространство является областью Рунге, то $\overline{\mathrm{Im}\, M} = H(D(z_0))$. Таким образом, чтобы доказать резрешимость уравнения (7) в пространстве $H(G(z_0))$ для произвольной функции $g(z) \in H(D(z_0))$ нам нужно, в силу результата Дведонне–Шварца о прямой и сопряженной операциях в пространствах типа $\mathscr F$ [12], выяснить, когда образ оператора M^* является замкнутым подмножеством в $H^*(G(z_0))$. Но последняя задача эквивалентна задаче о замкнутости множества $\mathrm{Im}\, Z_{\hat F}$ в $P_{G(z_0)}$.

Теорема 2. *Множество* $\mathrm{Im}\, Z_{\hat F}$ *замкнуто в* $P_{G(z_0)}$ *тогда и только тогда, когда для всякой целой функции экспоненциального типа* $\psi(z)$ *выполняется равенство*

$$L^*_{\hat F\cdot\psi}(z_0) = L^*_{\hat F}(z_0)+L^*_{\psi}(z_0). \tag{8}$$

Доказательство. Достаточность. Пусть выполняется равенство (8) и пусть функция $N(\lambda) \in P_{G(z_0)}$ принадлежит замыканию множества $\mathrm{Im}\, Z_{\hat F}$. Поскольку топология пространства $P_{G(z_0)}$ сильнее топологии равномерной сходимости на компактах из C^n, то функция $N(\lambda)$ делится на $\hat F(\lambda)$. В работе [1] показано, что функция $\psi(\lambda) = N(\lambda)/\hat F(\lambda)$ имеет экспоненциальный рост. Так как выполняется равенство (8), то $L^*_\psi(z_0) = L^*_N(z_0) - L^*_{\hat F}(z_0)$. Поскольку функция $N(\lambda)$ принадлежит $P_{G(z_0)}$, то существует такой выпуклый компакт $K_N \subset G(z_0)$, что

$$|N(\lambda)| < c_1(\varepsilon)[H_{K_N}(\lambda)+\varepsilon|\lambda|], \quad \lambda \in C^n, \forall\, \varepsilon > 0,$$

и, следовательно, имеет место неравенство $L^*_\psi(z_0) \leqslant H_{K_N}(z_0) - L^*_{\hat F}(z_0)$. Далее, в силу замечания после леммы 1 найдется такой компакт $K_{\hat F} \subset \overline{\Pi}(z_0)$, что $H_{K_{\hat F}}(z_0) = L^*_{\hat F}(z_0)$. Таким образом последнее неравенство можно записать так:

$$L^*_\psi(z_0) \leqslant H_{K_N}(z_0) - H_{K_{\hat F}}(z_0). \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что в полупространстве $D(z_0)$ существует компакт K_ψ, для которого $H_{K_\psi}(z_0) = H_{K_N}(z_0) - H_{K_{\hat F}}(z_0)$. Поэтому из неравенства (9) получаем $L^*_\psi(z_0) \leqslant H_{K_\psi}(z_0)$. Из последнего неравенства следует, что функция $\psi(\lambda)$ принадлежит $P_{D(z_0)}$ (см. доказательство леммы 1). Таким образом достаточность теоремы 2 доказана.

Необходимость. Пусть $\mathrm{Im}\, Z_{\hat F}$ — замкнутое множество в $P_{G(z_0)}$. Если через $\Pi^0(z_0)$ обозначить полупространство $(\mathrm{Re}\langle z, \bar z_0\rangle) < 0$, то, как нетрудно видеть, множество $P_{G(z_0)}$ является $P_{\Pi^0(z_0)}$-модулем и $\mathrm{Im}\, Z_{\hat F}$ образует в нем замкнутый подмодуль. Подмодуль $\mathrm{Im}\, Z_{\hat F}$ порождает в алгебре P_{C^n} некоторый идеал, который, очевидно, является главным с образующей $\hat F(\lambda)$. По теореме 3.2 работы [5] подмодуль $\operatorname{Im} Z_{\hat{F}}$ однозначно определяется своими локальными идеалами. Отсюда следует важный для дальнейших рассуждений вывод: в подмодуль $\operatorname{Im} Z_{\hat{F}}$ входят все функции из $P_{G(z_0)}$, которые делятся на $\hat{F}(\lambda)$.

Пусть функция $N(\lambda) \in \operatorname{Im} Z_{\hat{F}}$. Тогда $N(\lambda) = \hat{F}(\lambda)\cdot\psi(\lambda)$, где $\psi(\lambda) \in P_{D(z_0)}$. Докажем, что

$$L_N^*(z_0) = L_{\hat{F}}^*(z_0) + L_\psi^*(z_0). \tag{10}$$

Действительно, пусть имеет место строгое неравенство $L_N^*(z_0) < L_{\hat{F}}^*(z_0) + L_\psi^*(z_0)$. Тогда, как нетрудно видеть, найдется точка $t^0 \in C^n$ такая, что $\psi(\lambda)\exp\langle t^0, \lambda\rangle \notin P_{D(z_0)}$, $N(\lambda)\exp\langle t^0, \lambda\rangle \in P_{G(z_0)}$. Так как функция $N(\lambda)\exp\langle t^0, \lambda\rangle$ делится на $\hat{F}(\lambda)$, то $N(\lambda)\exp\langle t^0, \lambda\rangle \in \operatorname{Im} Z_{\hat{F}}$. Поэтому из равенства $N(\lambda)\exp\langle t^0, \lambda\rangle = \hat{F}(\lambda) M(\lambda)\exp\langle t^0, \lambda\rangle$ должно вытекать, что $M(\lambda)\exp\langle t^0, \lambda\rangle \in P_{D(z_0)}$, что противоречит предположению относительно точки t^0. Таким образом равенство (10) доказано.

Следствие 3. *Для того чтобы уравнение* (7) *имело решение в пространстве* $H(G(z_0))$ *для произвольной функции* $g(z) \in H(D(z_0))$ *необходимо и достаточно, чтобы для всякой целой функции экспоненциального типа* $\psi(\lambda)$ *выполнялось равенство* (8).

4. Приложения

Пусть функционал $F \in H^*(C^n)$ таков, что

$$L_{\hat{F}}^*(z) = H_K(z), \tag{11}$$

где $H_K(z)$ — опорная функция некоторого выпуклого замкнутого множества $K \subset C^n$. Существование таких функционалов следует из результата Мартино (см. [11], стр. 294). Пусть $\mathscr{D} \subset C^n$ — произвольная выпуклая область. Построим область $G = \mathscr{D} + K$. В этом пункте мы будем рассматривать уравнение (7), где $g(z) \in H(\mathscr{D})$. Неоднородное уравнение свертки с условием (11) ранее рассматривалось В. В. Моржаковым [8]. Мы найдем необходимые и достаточные условия существования решения уравнения (7) для любой выпуклой области $\mathscr{D}$ и любой функции $g(z) \in H(\mathscr{D})$. Точно так же как и выше (п. 3) показывается, что данная задача эквивалентна задаче о замкнутости множества значений оператора $Z_{\hat{F}}\colon P_{\mathscr{D}} \to P_G$, умножения на функцию $\hat{F}(\lambda)$.

Теорема 4. *Для того чтобы уравнение* (7) *имело решение в пространстве* $H(G)$, $G = \mathscr{D} + K$, *для всякой выпуклой области* $\mathscr{D}$ *и любой функции* $g(z) \in H(\mathscr{D})$ *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство* (8) *для любой точки* z_0 *и любой целой функции экспоненциального типа* $\psi(\lambda)$.

Доказательство. Необходимость условий вытекает из следствия 3, так как в качестве области $\mathscr{D}$ можно взять любое полупространство. Достаточность теоремы 4 фактически доказана в работе [8]. Пусть $\psi(\lambda) \in P_G$ такова,

что отношение $\psi(\lambda)/\hat{F}(\lambda)$ есть целая функция. Обозначим через S функционал из пространства $H^*(G)$, преобразование Лапласса которого равно $\psi(\lambda)$. Очевидно существует такой выпуклый компакт $K_1 \subset \mathscr{D}$, что сумма $K_1 + K$ является компактом, определяющим функционал S. Из равенства (8) следует, что

$$L^*_{\psi(\lambda)/\hat{F}(\lambda)}(z_0) = L_\psi^*(z_0) - L_{\hat{F}}^*(z_0) \leqslant H_{K_1+K}(z_0) - H_K(z_0) = H_{K_1}(z_0).$$

Из последнего неравенства и теоремы А следует, что функция $\psi(\lambda)/\hat{F}(\lambda)$ принадлежит пространству $P_{\mathscr{D}}$. Таким образом, оператор $Z_{\hat{F}}$ имеет замкнутый образ в пространстве P_G и поэтому уравнение (7) разрешимо в пространстве $H(G)$ для всякой функции $g(z) \in H(\mathscr{D})$. Поскольку область $\mathscr{D}$ в данных рассуждениях была произвольной, то достаточность доказана. Теорема 4 доказана.

Отметим, что равенство (8) выполняется, если функция $\hat{F}(\lambda)$ имеет вполне регулярный рост в C^n (см. [8]).

Целую функцию $\varphi(\lambda)$, $\lambda \in C^n$, имеющую экспоненциальный рост, называют (см. [12]) функцией *вполне регулярного роста* в C^n, если почти для всех $\lambda \in C^n$ выполняется равенство

$$\lim_{\substack{r\to\infty \\ r\notin E_0}} \frac{1}{r}\ln|\varphi(r\cdot\lambda)| = L_\varphi(\lambda),$$

где E_0 — множество относительной меры нуль, зависящее, вообще говоря, от точки λ.

Рассмотрим теперь случай размерности $n = 1$. Целые функции одного комплексного переменного, имеющие вполне регулярный рост, обладают следующим свойством: если в произведении $g(\lambda)\cdot\varphi(\lambda)$ двух целых функций экспоненциального типа хотя бы один из сомножителей имеет вполне регулярный рост вдоль луча $\arg\lambda = \theta$, то для индикатрис этих функций выполняется равенство

$$h_{g\cdot\varphi}(\theta) = h_g(\theta) + h_\varphi(\theta). \tag{12}$$

Заметим, что в общем случае имеет место неравенство:

$$h_{g\cdot\varphi}(\theta) \leqslant h_g(\theta) + h_\varphi(\theta).$$

В работе [13] В. С. Азарин доказал, что указанное выше свойство функций регулярного роста является характеристическим, т.е. имеет место следующая

Теорема В. *Если для всякой целой функции* $g(\lambda)$ *экспоненциального типа выполняется равенство* (12), *то функция* $\varphi(\lambda)$ *имеет вполне регулярный рост.*

Так как для целой функции $\varphi(\lambda)$ экспоненциального типа, зависящий от одного комплексного переменного, справедливо равенство

$$L_\varphi(z) = L_\varphi^*(z) = h_\varphi(\theta)\cdot|z|, \quad \theta = \arg z, 0 < \theta \leqslant 2\pi,$$

то из теорем 4 и В вытекает (см. [9])

Теорема 5. *Для того чтобы уравнение* (7) *имело решение в пространстве* $H(G)$, $G = \mathscr{D}+K$, *для всякой плоской выпуклой области* $\mathscr{D}$ *и любой функции* $g(z) \in H(\mathscr{D})$ *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\tilde{F}(\lambda)$ *была функцией вполне регулярного роста в* C.

Отметим, что в работе [14] находятся необходимые и достаточные условия размерности уравнения (7) в пространстве $H(G)$, $G = \mathscr{D}+K$, где $\mathscr{D}$ — фиксированная выпуклая область в плоскости C.

Литература

[1] B. Malgrange, *Existence et approximation des solution des equations aux derivees partielles et des equation de convolution*, Ann. Inst. Fourier 6 (1956), 271–355.

[2] L. Ehrenpreis, *Mean periodic functions*, Amer. J. Math. 77 (1955), 293–326.

[3] A. Martineau, *Equations differentielles d'ordre infini*, Bull. Soc. Math. France 95 (1967), 109–154.

[4] D. Pisanelli, *Une generalization des théorèmes de convolution*, C. R. Acad. Sci. Paris, A 275 (1972), 1319–1322.

[5] В. В. Напалков, *О подпространствах аналитических функций, инвариантных относительно сдвига*, Изв. АН СССР, серия матем. 36 (1972), 1269–1281.

[6] —, *Уравнения типа свертки в трубчатых областях* C^2, ibid. 38 (1974), 446–456.

[7] —, *Об одной теореме единственности в теории функций многих комплексных переменных и однородных уравнениях типа свертки в трубчатых областях* C^n, ibid. 40 (1976), 115–132.

[8] В. В. Моржаков, *Об уравнениях свертки в пространствах функций, голоморфных в выпуклых областях и на выпуклых компактах в* C^n, Матем. заметки 16 (1974), 431–440.

[9] В. В. Напалков, *Об одном классе неоднородных уравнений типа свертки*, Успехи математич. наук 29 (1974), 217–218.

[10] Л. Хёрмандер, *Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных*, Мир, Москва 1968.

[11] Л. И. Ронкин, *Введение в теорию целых функций многих переменных*, Наука, Москва 1971.

[12] L. Gruman, *Entire functions of several variables and their asymptotic growth*, Ark. för Math. 9 (1) (1971), 141–163.

[13] В. С. Азарин, *Об одном характеристическом свойстве функций вполне регулярного роста в нутри угла*. Сб. *Теория функций, функциональный анализ и их приложения*, 2, Харьков 1966, 55–67.

[14] О. В. Епифанов, *Об эпиморфизме свертки в выпуклых областях*, Докл. АН СССР 217 (1974), 18–19.

Presented to the Semester
COMPLEX ANALYSIS
February 15–May 30, 1979

COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

SUR LES FONCTIONS ANALYTIQUES $f(x, y)$ DONT L'ENSEMBLE DES ZÉROS PAR RAPPORT A y EST ALGÉBRIQUE

NGUYEN THANH VAN

UER de Mathématiques, Informatique et Gestion
Université Paul Sabatier
118, Route de Narbonne, 31077-Toulouse Cedex, France

1. Introduction. Résumé

Dans une note parue aux C. R. A. S. [4], nous avons établi le résultat suivant

Théorème 1. *Soit* Ω *un domaine dans* C^m *et* $f(x, y)$ *une fonction analytique sur* $\Omega \times C^n$, *pour tout* $x \in \Omega$ *on pose* $Z_{x,f} = \{y \in C^n: f(x, y) = 0\}$. *Si l'ensemble* $E_f = \{x \in \Omega: Z_{x,f}$ *est algébrique*$\}$ *n'est pas polaire dans un domaine* $\Omega_0 \Subset \Omega$, *alors il existe une fonction* h *analytique sur* $\Omega \times C^n$ *et des fonctions* A_α $(\alpha \in N^n, |\alpha| \leqslant q)$ *analytiques sur* Ω *telles que*

$$f(x, y) = \Big(\sum_{|\alpha| \leqslant q} A_\alpha(x) \cdot y^\alpha\Big) \exp h(x, y).$$

Dans cet énoncé on peut mettre „non polaire dans Ω'' à la place de „n'est pas polaire dans un domaine $\Omega_0 \Subset \Omega$", en raison d'un important résultat de Josefson [2]. Le but de ce travail est d'étendre cet énoncé aux fonctions analytiques sur des espaces vectoriels topologiques de Baire.

Soient E et F deux e.v.t. complexes séparés et de Baire dont le produit $E \times F$ est également supposé de Baire. Soit Ω un domaine dans E.

Définition. Un ensemble $X \subset E$ est dit *finiment polaire* dans Ω si et seulement si $X \not\supset \Omega$ et pour tout sous-espace affine de dimension finie Δ dans E, on a sur chaque composante connexe C de $\Omega \cap \Delta$:

— ou bien $X \supset C$,

— ou bien $X \cap \Delta$ est polaire dans C.

Il résulte immédiatement de cette définition que si (X_n) est une suite d'ensembles finiment polaires dans Ω et si $\bigcup_n X_n \not\supset \Omega$, alors $\bigcup_n X_n$ est finiment polaire dans Ω.

Théorème 2. *Soit* $f(x, y)$ *une fonction analytique sur* $\Omega \times F$, *on pose*

$$Z_{x,f} = \{y \in F: f(x, y) = 0\}$$