[13] R. Kühnau, *Einige Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen endlich vielfach zusammenhängender Gebiete*, L'Enseign. Math. 24 (1978), 189–201; auch in *Contributions to Analysis*, Monographie No 27 de L'Enseign. Math., Genève 1979, hier Seiten 59–71.
[14] M. Schiffer, *Analytical theory of subsonic and supersonic flows*; Im *Handbuch der Physik*, Band 9, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1960.
[15] J. Serrin, *Mathematical principles of classical fluid mechanics*; Im *Handbuch der Physik*, Band 8, 1. Teil, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1959.

Presented to the Semester
COMPLEX ANALYSIS
February 15–May 30, 1979

COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN-POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

DIE HYPERBOLISCHE METRIK ALS GRENZFALL EINER DURCH QUASIKONFORME ABBILDUNGEN DEFINIERTEN METRIK

REINER KÜHNAU

Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität, Halle-Wittenberg
Universitätsplatz 6, 401 Halle an der Saale, DDR

I

In [11], [3] wurde eine Charakterisierung der Kapazität eines Kondensators bzw. verwandter Größen für den Fall eines ortsabhängigen Dielektrikums gegeben in Analogie zum klassischen Gaußschen Prinzip minimaler Energie für den Fall konstanter Dielektrizitätskonstanten. Dabei spielte eine gewisse Metrik bzw. Halbmetrik eine wichtige Rolle. Im folgenden soll für diese gezeigt werden, daß sie bei gewissen Grenzübergängen in die hyperbolische Metrik bzw. Halbmetrik übergeht, was in [11] nur in einem Spezialfall evident war.

II

Die Funktion $p(z) \geqslant 1$ sei für alle z erklärt und — das genügt hier für unsere Zwecke — stückweise konstant; unten folgt hierzu Konkreteres. Wir setzen

$$\nu(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1}.$$

Mit $\mathfrak{r}(z,\zeta)$ bezeichnen wir jeweils bei festem ζ wie in [11] diejenige stetige schlichte Abbildung der z-Vollkugel auf sich mit $\mathfrak{r}(\infty,\zeta) = \infty$, $\mathfrak{r}(\zeta,\zeta) = 0$, für die $f = \log\mathfrak{r}(z,\zeta)$ (bei festem ζ) die Differentialgleichung

$$f_{\bar{z}} = -\nu\overline{f_z} \tag{1}$$

erfüllt, wobei der Entwicklungstypus ist

$$f = (1+\nu(\infty))^{-1}[\log z-\nu(\infty)\overline{\log z}]+\varepsilon(z) \quad \text{in } z = \infty, \tag{2}$$

$$f = (1+\nu(\zeta))^{-1}[\log(z-\zeta)-\nu(\zeta)\overline{\log(z-\zeta)}]+\text{const}+\varepsilon(z) \quad \text{in } z = \zeta. \tag{3}$$

Dabei sei $\varepsilon(z)$ irgendeine nach 0 strebende Funktion, für die im Falle (2) noch

$z^{\alpha} \cdot \varepsilon(z)$, im Falle (3) noch $(z-\zeta)^{-\alpha} \cdot \varepsilon(z)$ nach 0 strebt zu jedem α mit $0 < \alpha < 1$. Dann wird

(4) $$[z, \zeta] = |\mathfrak{r}(z, \zeta)|$$

als „Pseudodistanz" der Punkte z und ζ bezeichnet. Es gilt nach [10], [11] $[z, \zeta] = [\zeta, z]$ und $[z, \zeta] \geqslant 0$ mit Gleichheit genau für $z = \zeta$.

Die Größe $|\mathfrak{r}'(\zeta, \zeta)| = \varrho(\zeta)$ kann man noch für Stellen ζ, in deren Umgebung $p(z) \equiv 1$ ist (so daß dort $\mathfrak{r}(z, \zeta)$ als Funktion von z komplex analytisch und also differenzierbar ist), als „Dichte" einer Metrik auffassen, deren Linienelement demnach $\varrho(\zeta)|d\zeta|$ ist. Diese Dichte $\varrho(\zeta)$ vergrößert sich bei festem ζ, falls irgendwo in einem beschränkten Teilgebiet der Ebene die Werte der Funktion $p(z)$ durch größere ersetzt werden. Das ergibt sich aus der Extremaleigenschaft der Abbildung $\mathfrak{r}(z, \zeta)$ gemäß [6], [7], [8], [14] (Seite 371), [15]; vgl. auch [4], Seite 90/91. Dieser Vergrößerungseffekt tritt übrigens nicht immer bei der Pseudodistanz $[z, \zeta]$ (zu festem z, ζ) auf. Das sieht man schon am Spezialfall, es ist $p(z) \equiv 1$ für $|z| > 1$ und $p(z) \equiv Q \geqslant 1$ für $|z| < 1$. Dann ist nämlich nach [6], (12), [11]

(5) $$[z, \zeta] = \frac{|z-\zeta|}{|1-\bar{z}^{-1}\zeta^{-1}|^{q}} \quad \text{für} \quad |z| > 1, |\zeta| > 1 \text{ mit } q = \frac{Q-1}{Q+1}.$$

Hier tritt mit wachsendem q eine Verkleinerung ein, falls $|1-\bar{z}^{-1}\zeta^{-1}| > 1$. Weitere konkrete Spezialfälle vgl. in [9], (24), [12], S. 176.

III

Es seien jetzt $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ zwei punktfremde Jordankurven, $\mathfrak{C}$ innerhalb $\mathfrak{C}^*$ gelegen. $\mathfrak{G}$ sei das Innere von $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{G}^*$ das Äußere von $\mathfrak{C}^*$. Wir setzen für diesen Fall

(6) $$p(z) \equiv 1 \quad \text{in } \mathfrak{G} \text{ und } \mathfrak{G}^*, \quad p(z) \equiv Q > 1 \quad \text{im Komplement}$$

und bezeichnen mit $\varrho_h(\zeta)$ die Dichte der hyperbolischen Metrik innerhalb $\mathfrak{G}$, mit $[z, \zeta]_h$ die zugehörige hyperbolische Pseudodistanz, so daß $\varrho_h(\zeta) \cdot |d\zeta|$ das hyperbolische Linienelement und $\mathfrak{Ar}\mathfrak{T}\mathfrak{g}[z, \zeta]_h$ der gewöhnliche hyperbolische Abstand von z und ζ ist [1]. R sei der konforme Radius von $\mathfrak{G}^*$ bezüglich $z = \infty$ (= transfiniter Durchmesser von $\mathfrak{C}^*$).

Dann gilt für diesen Fall für die Pseudodistanz $[z, \zeta]$ der

Satz 1. *Für $Q \to \infty$ strebt $[z, \zeta]$ zu festem z, $\zeta \in \mathfrak{G}$ gegen $R \cdot [z, \zeta]_h$, $\varrho(\zeta)$ sogar monoton steigend gegen $R \cdot \varrho_h(\zeta)$.*

Beweis (vgl. ein ähnliche Schlußweise in [6]). Wie oben bemerkt, ist $\varrho(\zeta)$ bei festem $\zeta \in \mathfrak{G}$ monoton steigend in Q. Ferner gilt

(7) $$\varrho(\zeta) \leqslant R \cdot \varrho_h(\zeta) \quad \text{für alle } Q.$$

Denn hat man (wie bei $\mathfrak{r}(z, \zeta)$) eine konforme Abbildung $w = f(z)$ von $\mathfrak{G}$ mit $\zeta \to 0$ und dazu eine konforme Abbildung von $\mathfrak{G}^*$ auf ein nicht überlappendes Gebiet mit dem Betrag 1 der Ableitung im unendlich fernen Punkte, dann ist bekanntlich $|f'(\zeta)| \leqslant R \cdot \varrho_h(\zeta)$. Das Gleichheitszeichen steht genau dann, wenn bei diesem Paar konformer Abbildungen $\mathfrak{G}$ in eine zu 0 konzentrische Kreisscheibe, $\mathfrak{G}^*$ ins Äußere übergeht. Diese bekannte Eigenschaft solcher Paare konformer Abbildungen ergibt sich unmittelbar mit der Grötzschschen Flächenstreifenmethode bzw. der Methode der extremalen Länge.

Daß $\varrho(\zeta)$ nun für hinreichend großes Q beliebig nahe an $R \cdot \varrho_h(\zeta)$ herankommt, ergibt sich daraus, daß man diese extremalen Paare konformer Abbildungen jeweils beliebig gut durch eine quasikonforme Abbildung der Vollebene auf sich mit $\zeta \to 0$, $\infty \to \infty$ approximieren kann, die in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$ konform ist, dabei im unendlich fernen Punkte den Betrag 1 der Ableitung besitzt. Dazu konstruiert man zweckmäßig eine stückweise glatte Abbildung der Vollebene auf sich, die in $\mathfrak{G}^*$ und $\mathfrak{G}$ unter jeweiliger Hinzufügung eines schmalen (außer von $\mathfrak{C}^*$ bzw. $\mathfrak{C}$ von einer geschlossenen analytischen Jordankurve jeweils berandeten) Uferstreifens konform ist. Die dabei auftretenden beiden konformen Teilabbildungen mögen dabei aufs Äußere eines zu konzentrischen Kreises mit Normierung in ∞ bzw. aufs Innere eines etwas kleineren Kreises mit $\zeta \to 0$ erfolgen. Wegen der Analytizität dieser Abbildungen auf dem Rande([1]) kann man dann noch leicht eine glatte Abbildung des Komplementes einspannen. Der Betrag der Ableitung in ζ kann dabei beliebig nahe an $R \cdot \varrho_h(\zeta)$ gebracht werden. Ist die zugehörige Dilatation Q, dann wird für dieses Q für unser $\mathfrak{r}(z, \zeta)$ mit (6) die Größe $|\mathfrak{r}'(\zeta, \zeta)|$ wegen der Extremaleigenschaft von $\mathfrak{r}(z, \zeta)$ noch größer. Damit ist zunächst die monotone Konvergenz von $|\mathfrak{r}'(\zeta, \zeta)| = \varrho(\zeta)$ gegen $R \cdot \varrho_h(\zeta)$ für $Q \to \infty$ gezeigt.

Dabei muß nun aber auch $\log|\mathfrak{r}(z, \zeta)|$ selbst nach dem Maximumprinzip zu festem ζ für z in $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{G}^*$ (∞ und ζ ausgenommen) konvergieren gegen den Logarithmus des Betrages der Funktionswerte besagten extremalen Paares konformer Abbildungen, bei denen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}^*$ in einen zu 0 konzentrischen Kreis übergingen. Denn wenn im Komplement von $\mathfrak{G} \cup \mathfrak{G}^*$ die Schwankung von $\log|\mathfrak{r}(z, \zeta)|$ als Funktion von z eine positive Größe s übersteigt, dann übersteigt $R \cdot \varrho_h(\zeta) - |\mathfrak{r}'(\zeta, \zeta)|$ eine (zu gegebenem $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}^*$, ζ) nur von s abhängige explizit angebbare positive Mindestgröße. Dies liefert eine Standardschlußweise von H. Grötzsch (vgl. z.B. den Gleichmäßigkeitssatz in [2]) mit der Flächenstreifenmethode, angewandt auf das entstehende Paar konformer Abbildungen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^*$. Wer's nicht glaubt, kann auch mit dem Häufungsprinzip für analytische Funktionen die Existenz dieser Mindestgröße (wenn auch nicht in expliziter Form) beweisen. Damit ist Satz 1 gezeigt.

IV

Nun sei allein die geschlossene Jordankurve $\mathfrak{C}$ gegeben. $\mathfrak{G}$ sei das Innere, $\mathfrak{G}'$ das Äußere. Dazu setzen wir

(8) $$p(z) \equiv 1 \quad \text{in } \mathfrak{G}, \quad p(z) \equiv Q > 1 \quad \text{in } \mathfrak{G}'.$$

([1]) In dieser Weise läßt sich auch in [6] (Seite 5 Mitte) die Voraussetzung der Analytizität der Jordankurven streichen.

Sei $\mathfrak{r}_Q(z, \zeta)$ die dann jeweils entstehende Abbildung $\mathfrak{r}(z, \zeta)$. Wieder bezeichnen wir mit $\varrho_h(\zeta)$ die Dichte der hyperbolischen Metrik innerhalb $\mathfrak{G}$, mit $[z, \zeta]_h$ die zugehörige hyperbolische Pseudodistanz.

Jetzt gilt für die in $\mathfrak{G}$ erklärte und vom Parameter Q abhängende Pseudodistanz $[z, \zeta] = |\mathfrak{r}_Q(z, \zeta)|$ mit der Dichte $\varrho(\zeta) = |\mathfrak{r}'_Q(\zeta, \zeta)|$ der

SATZ 2. *Für $Q \to \infty$ strebt $[z, \zeta]$ zu festem z, $\zeta \in \mathfrak{G}$ gegen $[z, \zeta]_h$, $\varrho(\zeta)$ gegen $\varrho_h(\zeta)$.*

Für $\mathfrak{G} \equiv \{|z| < 1\}$ ist dies nach [11] evident.

Beweis. Sei $\zeta \in \mathfrak{G}$ und $\mathfrak{K}$ ein $\mathfrak{C}$ umschlingender Kreis und

$$\mathfrak{R}_Q(z, \zeta) = |\mathfrak{r}_Q(z, \zeta)|^{Q-1} \cdot \mathfrak{r}_Q(z, \zeta). \tag{9}$$

Letztere Abbildung ist dann in $\mathfrak{G}'$ konform und durch $z + \mathfrak{P}(1/z)$ in $z = \infty$ normiert — vgl. (2). Daher liegt das Bild von $\mathfrak{K}$ bei $\mathfrak{R}_Q(z, \zeta)$ nach bekannten Verzerrungssätzen bei konformen Abbildungen innerhalb eines (explizit angebbaren) zum Nullpunkt konzentrischen Kreisringes, dessen Radien nicht von Q abhängen. Damit liegt wegen $|\mathfrak{r}_Q(z, \zeta)| = |\mathfrak{R}_Q(z, \zeta)|^{1/Q}$ das Bild von $\mathfrak{K}$ innerhalb eines zum Nullpunkt konzentrischen Kreisringes, dessen Radien nach 1 streben für $Q \to \infty$; kurz: $\mathfrak{K}$ geht in einen „Fasteinheitskreis" über. Statt (7) können wir daher jetzt wenigstens sagen: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $Q_0(\varepsilon)$, so daß $|\mathfrak{r}'_Q(\zeta, \zeta)| < \varrho_h(\zeta) + \varepsilon$ für $Q > Q_0(\varepsilon)$.

Daß nun tatsächlich

$$\lim_{Q \to \infty} |\mathfrak{r}'_Q(\zeta, \zeta)| = \varrho_h(\zeta)$$

gilt, ergibt sich durch eine ähnliche Schlußweise wie beim Beweis von Satz 1 dadurch, daß man die konformen Abbildungen von $\mathfrak{G}$ auf die Einheitskreisscheibe mit $\zeta \to 0$ beliebig gut durch stückweise glatte Abbildungen des Innern von $\mathfrak{K}$ approximieren kann, bei denen $\mathfrak{G}$ mit Einschluß eines durch eine analytische Nachbarkurve entstehenden Uferstreifens konform abgebildet wird auf eine zum Nullpunkt konzentrische Kreisscheibe, deren Radius geringfügig < 1 ist. Das bringt nämlich bei Ausnutzung der Extremaleigenschaft der quasikonformen Abbildung $\mathfrak{r}_Q(z, \zeta)$, eingeschränkt auf das Innere von $\mathfrak{K}$ (vgl. z.B. [5], dort naheliegender Grenzfall von Satz 2) mit sich: Es existiert noch zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $Q_0^*(\varepsilon)$, so daß $|\mathfrak{r}'_Q(\zeta, \zeta)| > \varrho_h(\zeta) - \varepsilon$ für $Q > Q^*(\varepsilon)$.

Damit ist auch Satz 2 bewiesen, da der Rest der Behauptung, nämlich die Konvergenz von $[z, \zeta]$, entsprechend wie bei Satz 1 folgt.

V. Zusatzbemerkungen

(a) Man kann leicht entsprechende Grenzübergänge mit der Pseudodistanz $[z, \zeta]$ vornehmen, wenn man z.B. statt (8) $p(z) \equiv 1$ in einem mehrfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ setzt. Dann erhält man allerdings nicht die hyperbolische Pseudodistanz. Vielmehr tritt in diesem Falle eine Pseudodistanz auf, die induziert wird durch konforme Abbildung von $\mathfrak{G}$ auf eine Kreisscheibe, geschlitzt längs konzentrischer Kreisbogenschlitze.

(b) Satz 1 und 2 bleiben nicht richtig, wenn die Voraussetzung, der Rand $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{G}$ ist eine Jordankurve, fallen gelassen wird. Das erkennt man schon im Falle, $\mathfrak{G}$ ist eine radial eingeschlitzte Kreisscheibe. Die Einschlitzung hat dann keinen Einfluß auf $\mathfrak{r}(z, \zeta)$ und damit $[z, \zeta]$, wohl aber natürlich auf die hyperbolische Metrik in $\mathfrak{G}$.

(c) Ebenso wie sich die hyperbolische Metrik zu gegebenem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ durch die Bergmannsche Kernfunktion berechnen läßt (nämlich über die Berechnung der Riemannschen Abbildungsfunktion), läßt sich die Pseudometrik $[z, \zeta]$ bei (6) oder (8) über die verallgemeinerte Kernfunktion in [13] effektiv konstruieren.

Literaturverzeichnis

[1] C. Carathéodory, *Funktionentheorie I*, Basel 1950 (2.Auflage: Basel–Stuttgart 1960)

[2] H. Grötzsch, *Zur konformen Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche. (Iterationsverfahren)*, Berichte d. Math.-phys. Klasse d. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig 83 (1931), 67–76.

[3] S. Kirsch, *Ein verallgemeinerter transfiniter Durchmesser im Zusammenhang mit einer quasikonformen Normalabbildung*, Banach Center Publ., vol. 11, PWN, Warszawa 1983, 121–129.

[4] S. L. Kruškal', *Quasikonforme Abbildungen und Riemannsche Flächen* (Russ.), Novosibirsk 1975; engl. Übers.: Washington–New York 1979.

[5] R. Kühnau, *Über gewisse Extremalprobleme der quasikonformen Abbildung*, Wiss. Z. d. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reihe 13 (1964), 35–40.

[6] —, *Wertannahmeprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit ortsabhängiger Dilatationsbeschränkung*, Math. Nachr. 40 (1969), 1–11.

[7] —, *Verzerrungssätze und Koeffizientenbedingungen vom Grunskyschen Typ für quasikonforme Abbildungen*, ibid. 48 (1971), 77–105.

[8] —, *Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen*, Ann. Polon. Math. 31 (1976), 269–289.

[9] —, *Extremalprobleme bei quasikonformen Abbildungen mit kreisringweise konstanter Dilatationsbeschrankung*, Math. Nachr. 66 (1975), 269–282.

[10] —, *Identitäten bei quasikonformen Normalabbildungen und eine hiermit zusammenhängende Kernfunktion*, ibid. 73 (1976), 73–106.

[11] —, *Gauss–Thomsonsches Prinzip minimaler Energie, verallgemeinerte transfinite Durchmesser und quasikonforme Abbildungen*, Proc. Romanian-Finnish Seminar on Complex Analysis, Bucharest 1976, Lecture Notes Math. 743, Springer, 1979, 140–164.

[12] —, *Schlichte konforme Abbildungen auf nichtüberlappende Gebiete mit gemeinsamer quasikonformer Fortsetzung*, Math. Nachr. 86 (1978), 175–180.

[13] —, *Eine Kernfunktion zur Konstruktion gewisser quasikonformer Normalabbildungen*, ibid. 95 (1980), 229–235.

[14] H. Renelt, *Modifizierung und Erweiterung einer Schifferschen Variationsmethode für quasikonforme Abbildungen*, ibid. 55 (1973), 353–379.
[15] M. Schiffer and G. Schober, *Representation of fundamental solutions for generalized Cauchy–Riemann equations by quasiconformal mappings*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A. I. Math. 2 (1976), 501–531.

Presented to the Semester
COMPLEX ANALYSIS
February 15–May 30, 1979

COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

ON BOUNDARY BEHAVIOUR OF BERGMAN KERNEL FUNCTION FOR PLANE DOMAINS AND THEIR CARTESIAN PRODUCTS

EWA LIGOCKA

Institute of Mathematics, Warsaw University, Warsaw, Poland

In [7] two conditions were stated concerning the Bergman kernel function $K_D(z, t)$ of a bounded domain $D \in C^n$, $n \geqslant 1$, and describing a good boundary behaviour of $K_D(z, t)$:

(A_k) The Bergman kernel function $K_D(z, t)$ can be extended to a C^k-function on $\overline{D} \times D$. This means that every derivative of $K_D(z, t)$ up to order k can be extended to $\overline{D} \times D$ to a continuous function ($1 \leqslant k \leqslant \infty$).

(B) For every $z_0 \in \overline{D}$ there exist $n+1$ points $t_0, \ldots, t_n \in D$ such that

$$\det \begin{bmatrix} K_D(z_0, t_j) \\ \dfrac{\partial K_D}{\partial t_i}(z_0, t_j) \end{bmatrix}_{\substack{j=0,\ldots,n,\\ i=1,\ldots,n}} \neq 0.$$

We shall also need the following

DEFINITION. We say that the boundary ∂D of a bounded domain D *satisfies minimal regularity conditions* iff it is locally the graph of a Lipschitzian function from R^{2n-1} into R. This means that for every $z \in \partial D$ there exist an open neighborhood U of z, a coordinate system $x_1, \ldots, x_{2n}$ in $C^n = R^{2n}$ and a Lipschitzian function φ: $R^{2n-1} \to R$ such that

$$U \cap D = U \cap \{x \in R^{2n}: x_{2n} > \varphi(x_1, \ldots, x_{2n-1})\}.$$

Conditions (A_k) and (B) are important in the theory of biholomorphic mappings because of the following fact, proved in [7].

THEOREM I. *Let D and G be bounded domains in C^n, whose boundaries ∂D and ∂G satisfy minimal regularity conditions. If the Bergman kernel functions $K_D(z, t)$ and $K_G(w, s)$ satisfy conditions* (A_k) *and* (B), *then every biholomorphic mapping between D and G extends to a diffeomorphism of class C^k between some open neighborhoods of $\overline{D}$ and $\overline{G}$.*