го, причем $b \geqslant a$. Тогда для отображений из совокупности $\mathfrak{M}$, учитывая формулу для площади круга и теорему 4.1, получим

$$K_2(f) \geqslant \left[\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{a^2-1}}\right]^{1/3}.$$

Структура экстремального отображения задается формулой (4.4), где g_1 — тождественное отображение единичной окружности на себя, а g_2 — отображение неевклидова круга M_2 на неевклидов круг N_2 с постоянным якобианом и растяжениями $\lambda_2, \lambda_3 \leqslant 1$. Нетрудно проверить, что такое отображение существует, так что приведенная оценка точная. Тот же результат с помощью дополнительных конформных отображений получается отсюда для тороидальных областей евклидова пространства R^3 (ср. результаты Геринга [3]).

Литература

[1] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва 1966.
[2] F. W. Gehring and J. Väisälä, *The coefficients of quasiconformality of domains in space*, Acta Math. 114 (1965).
[3] Ф. В. Геринг, *Экстремальные отображения торов*, Сборн. *Некоторые проблемы математики и механики*, Наука, Москва 1970.
[4] H. Grötsch, *Über möglichst konforme Abbildungen von schlichten Bereichen*, Ber. Verh. sächs. Acad. Lpz. 84 (1932), 114–120.
[5] I. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396–414.
[6] В. В. Кривов, *Об экстремальных квазиконформных отображениях в пространстве*, Докл. АН СССР 145 (3) (1962), 516–518.
[7] —, *Наилучшие экстремальные отображения в пространстве*, ibid. 155 (1) (1964), 38–40.
[8] —, *О структуре диффеоморфизмов с минимальной промежуточной дилатацией*, ibid. 226 (1) (1976), 40–43.
[9] C. Loewner, *On the conformal capacity in space*, J. Math. Mech. 8 (1959), 411–414.

Presented to the Semester
COMPLEX ANALYSIS
February 15–May 30, 1979

COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

EINE EXTREMALCHARAKTERISIERUNG VON UNTERSCHALLGASSTRÖMUNGEN DURCH QUASIKONFORME ABBILDUNGEN

REINER KÜHNAU

Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität, Halle-Wittenberg
Universitätsplatz 6, 401 Halle an der Saale, DDR

1. Einleitung

Betrachtet werden in der x, y-Ebene stationäre, reibungs- und wirbelfreie Unterschallströmungen eines kompressiblen Gases ohne Zirkulation. Bekanntlich erfüllen dann das (eindeutige) Potential $u(x, y)$ und die (eindeutig vorausgesetzte) Stromfunktion $v(x, y)$ das System

(1) $$u_x = (\alpha/\varrho)v_y, \quad u_y = -(\alpha/\varrho)v_x.$$

Dabei bedeutet α eine vorgebbare positive Konstante, ϱ die örtliche Dichte. Es sei der Druck p eine reine Funktion von ϱ mit $dp/d\varrho = c^2 > 0$ (c = örtliche Schallgeschwindigkeit). $p(\varrho)$ sei analytisch (dies wird allerdings nur in § 2.b benötigt). Der Zusammenhang mit dem Geschwindigkeitsquadrat $V^2 = u_x^2+u_y^2$ sei wie üblich durch

(2) $$\tfrac{1}{2}dV^2 = -dp/\varrho \quad \text{(Bernoullische Gleichung)}$$

gegeben, so daß ϱ eine Funktion von V^2 wird. Wir setzen noch

(3) $$f = -(2/\alpha)(p+\tfrac{1}{2}\varrho V^2),$$

wodurch eine Funktion $f = f(\tau)$ mit $\tau = \alpha/\varrho$ definiert werde. Dabei ist bzw. sei für die τ eines gewissen Intervalles $\mathfrak{F}$

(4) $$f'(\tau) = (\varrho/\alpha)^2 V^2, \quad f''(\tau) = 2(\varrho/\alpha)^3(c^2-V^2) > 0,$$

d.h. im Unterschallbereich, auf den wir uns hier beschränken. Die komplexe Funktion $u+iv$ vermittelt eine quasikonforme Abbildung mit der Jacobischen Determinante

(5) $$J = (\varrho/\alpha)V^2$$

auf ein Parallelschlitzgebiet bei der Umströmung einer Kontur. Wir wollen diese Abbildung im folgenden im Anschluß an die Schlußbemerkung in [13] durch eine

Extremaleigenschaft in einer geeigneten Klasse von „im Mittel” quasikonformen Abbildungen charakterisieren. Dies verallgemeinert die bekannte klassische Extremaleigenschaft der konformen Parallelschlitzabbildungen, welche dem inkompressiblen Grenzfalle entsprechen. Dabei ergibt sich auch ein Zusammenhang mit der Theorie der extremalen Länge bzw. dem Modul einer Kurvenschar.

Die Existenz der auftretenden Unterschallströmungen bzw. der zugehörigen (1) erfüllenden quasikonformen Abbildungen wird hier jeweils vorausgesetzt — vgl. hierzu [3], [14], [15]. Die zugehörige Unität wird sich übrigens unten beiläufig mit ergeben.

Alle vorkommenden Größen seien hinreichend glatt, so daß die folgenden im Prinzip elementaren Überlegungen ohne Schwierigkeiten durchführbar sind.

2. Umströmung einer Kontur

(a) In der z-Ebene, $z = x+iy$, sei das Gebiet G mit $z = \infty$ als innerem Punkt gegeben. Der Rand C bestehe aus endlich vielen (z.B. stückweise analytischen) Kurven. $\mathfrak{n}$ bezeichne die Außennormale, dagegen bei dem hinreichend großen positiv orientierten Hilfskreis $\mathfrak{K} \equiv \{|z| = R\}$ die Innennormale. Das in $|z| < R$ gelegene Teilstück von G sei G_R. Wir wollen nun die zirkulationslose Umströmung von C bei der Anströmgeschwindigkeit V_∞ in Richtung der positiv reellen Achse betrachten.

Zunächst sei $w = u+iv$ bzw. $\mathfrak{w} = \mathfrak{u}+i\mathfrak{v}$ eine schlichte quasikonforme Abbildung von G mit $\infty \to \infty$, die bei $0 < m \leqslant D(x, y) \leqslant M$, $0 < m \leqslant \mathfrak{d}(x, y) \leqslant M$ (mit gewissen Konstanten m, M)

(6) $$u_x = D \cdot v_y, \quad u_y = -D \cdot v_x$$

bzw.

(7) $$\mathfrak{u}_x = \mathfrak{d} \cdot \mathfrak{v}_y, \quad \mathfrak{u}_y = -\mathfrak{d} \cdot \mathfrak{v}_x$$

erfüllt und die Randkomponenten in Strecken parallel zur reellen Achse überführt. Dabei mögen D and $\mathfrak{d}$ für $z \to \infty$ den gleichen Grenzwert $D(\infty) = \mathfrak{d}(\infty) \neq 0$ besitzen. Ferner mögen mit $V_\infty > 0$ und daraus gebildetem

(8) $$w^*(z) = u^*+iv^* = V_\infty \left(x+i\frac{y}{D(\infty)}\right)$$

die Funktionen $w-w^*$ und $\mathfrak{w}-w^*$ für $z \to \infty$ von mindestens erster Ordnung abklingen und die partiellen Ableitungen von mindestens zweiter Ordnung; die Ableitungen von w selbst sollen dabei beschränkt sein. Dann muß übrigens $D-\mathfrak{d}$ von mindestens zweiter Ordnung abklingen, was man der Identität

$$(D-\mathfrak{d})\, V_\infty/D(\infty) = (u-u^*)_x-(\mathfrak{u}-u^*)_x-D \cdot (v-v^*)_y+\mathfrak{d} \cdot (\mathfrak{v}-v^*)_y$$

entnimmt. Schließlich mögen die Grenzwerte

(9) $$I(w) = \lim_{R\to\infty} \operatorname{Im} \int_{\mathfrak{K}} (w-w^*)dw^*, \quad I(\mathfrak{w}) = \lim_{R\to\infty} \operatorname{Im} \int_{\mathfrak{K}} (\mathfrak{w}-w^*)dw^*$$

existieren. Dann gilt mit der Jacobischen Determinante $J = D \cdot \operatorname{grad}^2 v$ von w der

Hilfssatz 1. *Es ist*

(10) $$I(w)-I(\mathfrak{w})+\iint_G (\mathfrak{d}-D)\frac{J}{D}\,dxdy \geqslant 0$$

mit Gleichheit genau für $\mathfrak{v} \equiv v$. *Das Doppelintegral in* (10) *existiert dabei unter den angegebenen Voraussetzungen im Sinne der Auschöpfung des nichtbeschränkten Gebietes* G *durch die* G_R.

Zum *Beweise*, der im wesentlichen in einer Anwendung des Gauß–Greenschen Satzes besteht, gehen wir aus von

$$\begin{aligned}
&-\int_{\mathfrak{K}+C} \mathfrak{d}\left(\mathfrak{v}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{n}}-v\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{n}}\right)ds+\iint_{G_R} v \operatorname{div}(\mathfrak{d}\operatorname{grad} v)dxdy\\
&= -2\iint_{G_R} \mathfrak{d}\operatorname{grad} v\cdot(\operatorname{grad} v-\operatorname{grad}\mathfrak{v})dxdy+\iint_{G_R} \mathfrak{d}\operatorname{grad}^2(v-\mathfrak{v})dxdy\\
&= 2\int_{\mathfrak{K}+C} \mathfrak{d}v\frac{\partial(v-\mathfrak{v})}{\partial \mathfrak{n}}ds+2\iint_{G_R} v\operatorname{div}(\mathfrak{d}\operatorname{grad} v)dxdy+\iint_{\mathfrak{K}} \mathfrak{d}\operatorname{grad}^2(v-\mathfrak{v})dxdy.
\end{aligned}$$

Dies liefert

(11 $$\begin{aligned}
&\int_{\mathfrak{K}} \mathfrak{d}\cdot(v-\mathfrak{v})\frac{\partial(v-\mathfrak{v})}{\partial \mathfrak{n}}ds+\int_{\mathfrak{K}} \mathfrak{d}\cdot\left(\mathfrak{v}\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{n}}-v\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{n}}\right)ds+\\
&\quad+\iint_{G_R} v\operatorname{div}(\mathfrak{d}\operatorname{grad} v)dxdy+\iint_{G_R} \mathfrak{d}\operatorname{grad}^2(v-\mathfrak{v})dxdy+\\
&\quad+\int_C \mathfrak{d}v\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{n}}ds+\int_C \mathfrak{d}\mathfrak{v}\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{n}}ds-2\int_C \mathfrak{d}v\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{n}}ds = 0.
\end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned}
\iint_{G_R} v\operatorname{div}(\mathfrak{d}\operatorname{grad} v)dxdy &= -\iint_{G_R} \mathfrak{d}\operatorname{grad}^2 v\,dxdy-\int_{\mathfrak{K}+C} \mathfrak{d}v\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{n}}ds\\
&= -\iint_{G_R} \mathfrak{d}\operatorname{grad}^2 v\,dxdy-\int_{\mathfrak{K}+C} Dv\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{n}}ds+\int_{\mathfrak{K}+C} (D-\mathfrak{d})\cdot v\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{n}}ds\\
&= -\iint_{G_R} (\mathfrak{d}-D)\cdot\operatorname{grad}^2 v\,dxdy+\int_{\mathfrak{K}+C} (D-\mathfrak{d})\cdot v\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{n}}ds.
\end{aligned}$$

Damit wird (11) zu

(12) $$\int_{\mathfrak{K}} \mathfrak{d}\cdot(v-\mathfrak{v})\frac{\partial(v-\mathfrak{v})}{\partial \mathfrak{n}}ds+\int_{\mathfrak{K}} \mathfrak{d}\cdot\left(\mathfrak{v}\frac{\partial v}{\partial \mathfrak{n}}-v\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial \mathfrak{n}}\right)ds+\iint_{G_R} \mathfrak{d}\operatorname{grad}^2(v-\mathfrak{v})dxdy-$$

$$-\iint_{G_R}\left(\frac{\mathfrak{d}}{D}-1\right)J\,dx\,dy+\int_{\mathfrak{K}}(D-\mathfrak{d})v\frac{\partial v}{\partial\mathfrak{n}}\,ds+$$

$$+\int_C Dv\frac{\partial v}{\partial\mathfrak{n}}\,ds+\int_C\mathfrak{d}\mathfrak{v}\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial\mathfrak{n}}\,ds-2\int_C\mathfrak{d}v\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial\mathfrak{n}}\,ds=0.$$

Hier verschwinden die letzten drei Randintegrale wegen z.B. $D\partial v/\partial\mathfrak{n}=\partial u/\partial s$ (= Tangentialableitung). Ferner ist

$$\int_{\mathfrak{K}}\mathfrak{d}\cdot\left(\mathfrak{v}\frac{\partial v}{\partial\mathfrak{n}}-v\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial\mathfrak{n}}\right)ds+\int_{\mathfrak{K}}(D-\mathfrak{d})v\frac{\partial v}{\partial\mathfrak{n}}\,ds$$

$$=\int_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{d}-D)\mathfrak{v}\frac{\partial v}{\partial\mathfrak{n}}\,ds+\int_{\mathfrak{K}}\left(D\mathfrak{v}\frac{\partial v}{\partial\mathfrak{n}}-\mathfrak{d}v\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial\mathfrak{n}}\right)ds+\int_{\mathfrak{K}}(D-\mathfrak{d})v\frac{\partial v}{\partial\mathfrak{n}}\,ds$$

$$=\int_{\mathfrak{K}}(D-\mathfrak{d})(v-\mathfrak{v})\frac{\partial v}{\partial\mathfrak{n}}\,ds+\int_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{v}\,du-v\,d\mathfrak{u})=\int_{\mathfrak{K}}(D-\mathfrak{d})(v-\mathfrak{v})\frac{\partial v}{\partial\mathfrak{n}}\,ds+\operatorname{Im}\int_{\mathfrak{K}}\mathfrak{w}\,dw$$

$$=\int_{\mathfrak{K}}(D-\mathfrak{d})(v-\mathfrak{v})\frac{\partial v}{\partial\mathfrak{n}}\,ds+\operatorname{Im}\left\{\int_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{w}-w^*)\,d(w-w^*)+\right.$$

$$\left.+\int_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{w}-w^*)\,dw^*-\int_{\mathfrak{K}}(w-w^*)\,dw^*\right\}.$$

Somit haben wir abschließend

$$\operatorname{Im}\int_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{w}-w^*)\,dw^*-\operatorname{Im}\int_{\mathfrak{K}}(w-w^*)\,dw^*-\iint_{G_R}(\mathfrak{d}-D)\frac{J}{D}\,dx\,dy+$$
$$+\int_{\mathfrak{K}}\mathfrak{d}\cdot(v-\mathfrak{v})\frac{\partial(v-\mathfrak{v})}{\partial\mathfrak{n}}\,ds+\operatorname{Im}\int_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{w}-w^*)\,d(w-w^*)+$$
$$+\int_{\mathfrak{K}}(D-\mathfrak{d})(v-\mathfrak{v})\frac{\partial v}{\partial\mathfrak{n}}\,ds+\iint_{G_R}\mathfrak{d}\operatorname{grad}^2(v-\mathfrak{v})\,dx\,dy=0, \tag{13}$$

woraus die Behauptung des Hilfssatzes folgt.

(b) Nun identifizieren wir $w=u+iv$ mit dem komplexen Potential zur Anströmgeschwindigkeit V_∞ in Richtung der positiv reellen Achse. $w(z)$ ist dann Lösung von (1), d.h. von (6) mit $D=\alpha/\varrho$. Das nach (8) geforderte Abklingverhalten und die Existenz des Integrals $I(w)$ liegen dann bei $w(z)$ vor — vgl. [3], [14], [15] mit Hinweis auf Arbeiten von H. Lamb, H. Bateman und insbesondere G. S. S. Ludford; übrigens haben wir die Analytizität von $p(\varrho)$ nur vorausgesetzt, um dieses Abklingverhalten zu gewährleisten. $\mathfrak{w}(z)$ sei eine schlichte Lösung von (7), wobei die vorkommenden Werte von $\mathfrak{d}$ ebenso wie die von D im Intervall $\mathfrak{F}$ liegen, und mit dem nach (8) geforderten Abklingverhalten der Ableitungen und mit $\mathfrak{d}\to D(\infty)=\alpha/\varrho(\infty)$ (= bekannt). Mit der durch (3) definierten Funktion f wird dann der dritte Ausdruck in (13) nach (4) und (5) zu

$$\iint_G(\mathfrak{d}-D)\frac{J}{D}\,dx\,dy=\iint_G(\mathfrak{d}-D)f'(\alpha/\varrho)\,dx\,dy \tag{14}$$
$$=\iint_G[f(\mathfrak{d})-f(D)]\,dx\,dy-\frac{1}{2}\iint_G(\mathfrak{d}-D)^2f''(\ldots)\,dx\,dy\leqslant\iint_G[f(\mathfrak{d})-f(D)]\,dx\,dy,$$

wobei ... eine jeweils in $\mathfrak{F}$ liegende Zwischenstelle ist.

Die Konvergenz ergibt sich aus dem oben genannten Abklingverhalten von $\mathfrak{d}-D$. Das Gleichheitszeichen steht in (14) genau für $\mathfrak{d}\equiv D$ wegen unserer Voraussetzung $f''>0$. (Ohne diese Voraussetzung, d.h. bei $f''\geqslant 0$, würde die Diskussion des Gleichheitszeichens so nicht möglich sein.) Damit haben wir

Hilfssatz 2. *Es ist*

$$I(w)-I(\mathfrak{w})+\iint_G[f(\mathfrak{d})-f(D)]\,dx\,dy\geqslant 0 \tag{15}$$

mit Gleichheit genau für $\mathfrak{w}(z)\equiv w(z)$.

Bemerkung. Durch Hilfssatz 2 wird praktisch eine Extremalcharakterisierung des komplexen Strömungspotentials vorgenommen in einer Klasse von Lösungen von (7), wobei die variierende Funktion letztlich $\mathfrak{d}(x, y)$ ist. Im Unterschied hierzu ist beim Variationsprinzip von Bateman bekanntlich die variierende Funktion das Potential bzw. die Stromfunktion, und im Integranden tritt statt unseres f die Größe p bzw. $p+\varrho V^2$ auf — vgl. [3], [8], [14], [15] und dort gegebene Hinweise auf Arbeiten von M. Shiffman, P. E. Lush & T. M. Cherry u.a. Beiläufig bemerkt liefert Hilfssatz 2 einen Unitätsbeweis für das Umströmungsproblem zu gegebener Anströmgeschwindigkeit in $z=\infty$ (vgl. hierzu [14], [15] mit Hinweisen auf Arbeiten von R. Finn & D. Gilbarg sowie L. Bers). Wäre nämlich $\mathfrak{w}(z)$ ebenfalls ein komplexes Potential wie $w(z)$, dann ergibt (15) nach Vertauschung von w und $\mathfrak{w}$, daß dort das Gleichheitszeichen stehen muß.

(c) Im letzten Schritte nun setzen wir die Konstante α so groß voraus, daß überall in G stets $D=\alpha/\varrho\geqslant 1$ ist. Ferner führen wir noch die Klasse $\mathfrak{A}$ der schlichten quasikonformen Abbildungen $W(z)$ von G mit $W(\infty)=\infty$ und folgenden Eigenschaften ein. Die Dilatation $\mathfrak{d}(z)\geqslant 1$ liege mit ihren Werten in $\mathfrak{F}$, erfülle $\mathfrak{d}(\infty)=D(\infty)$ und sei nach Stürzung in Umgebung des Nullpunktes zweimal stetig differenzierbar, und die mit diesem $\mathfrak{d}$ gebildete und also $W(z)$ zuzuordnende Lösung $\mathfrak{w}(z)$ von (7) besitze in $z=\infty$ die nach (8) genannten Abklingeigenschaften. ($W(z)$ selbst braucht also nicht (7) zu erfüllen.) Dann haben wir

Satz 1. *Es gilt für alle* $W(z)\in\mathfrak{A}$

$$I(w)-I(W)+\iint_G[f(\mathfrak{d})-f(D)]\,dx\,dy\geqslant 0 \tag{16}$$

mit Gleichheit genau für $W(z)\equiv w(z)$.

Denn es ist nach [12], Satz 2, $I(W) \leqslant I(\mathfrak{w})$ für die analog zu (9) zu definierende Größe $I(W)$, wobei das links stehende Integral nach [12] konvergiert.

Folgerung. *Ist*

$$\iint_G [f(D)-f(\mathfrak{d})]\,dxdy \geqslant 0, \tag{17}$$

dann gilt $I(W) \leqslant I(w)$ mit Gleichheit genau für $W \equiv w$.

Damit ist $w(z)$ durch ein Extremalproblem charakterisiert in einer Klasse quasikonformer Abbildungen, deren Dilatation $\mathfrak{d}$ durch das Integral über $f(\mathfrak{d})$ beschränkt wird.

3. Durchströmung eines Vierecks

(a) Die in § 2 durchgeführte Betrachtung läßt sich natürlich analog für andere Strömungsgebiete durchführen. Es sei z.B. jetzt in der z-Ebene das beschränkte Gebiet G gegeben, welches außen von der doppelpunktfreien Kurve $\mathfrak{R}$ und innen von endlich vielen weiteren Randkurven, deren Gesamtheit C sei, berandet wird (C braucht nicht aufzutreten). G läßt sich als topologisches Viereck (genauer "gelöchertes" Viereck) auffassen. $\mathfrak{n}$ sei überall die ins Innere von G weisende Normale. Auf $\mathfrak{R}$ seien vier verschiedene Randpunkte markiert, so daß man $\mathfrak{R}$ zerlegen kann in die aufeinander folgenden Bögen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$. Wir wollen nun eine gasdynamische Durchströmung von G betrachten (zirkulationsfrei usw. — vgl. Anfang von § 1), bei der längs C, $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_4$ der Geschwindigkeitsvektor tangential liegt, während in $\mathfrak{R}_1$ bzw. $\mathfrak{R}_3$ ein Ein- bzw. Ausströmen in Richtung der Normalen erfolgt. Auf $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_3$ ist also $u = \text{const}$, auf $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_4$ und C jeweils $v = \text{const}$. Die Potentialdifferenz zwischen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_3$ sei $= a > 0$, die Differenz der v-Werte für $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_4$ (= Durchströmungsmenge pro Zeiteinheit) sei $= b > 0$. Das komplexe Potential $w = u+iv$ erfüllt dann wieder (6) mit einem gewissen $D > 0$ und vermittelt eine schlichte quasikonforme Abbildung von G auf ein horizontal geschlitztes Rechteck mit den Seitenlängen a und b.

(b) Um wieder zu einer Extremalcharakterisierung von $w(z)$ zu kommen, betrachten wir zunächst neben $w(z)$ noch eine schlichte quasikonforme Abbildung $\mathfrak{w}(z)$ von G, die Lösung von (7) ist mit einem $\mathfrak{d} > 0$, wobei die Werte von $\mathfrak{d}$ wieder in $\mathfrak{F}$ liegen, und bei der G ebenfalls in gleicher Weise eckpunkttreu in ein achsenparalleles Rechteck der Seitenlängen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, geschlitzt längs Strecken parallel zur reellen Achse, übergeht. Dann folgt zunächst statt Hilfssatz 1, wenn man in (12) bzw. (13) einfach $\mathfrak{K}$ durch $\mathfrak{R}$ ersetzt,

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}-2\mathfrak{a}b+ab+\iint_G (\mathfrak{d}-D)\frac{J}{D}\,dxdy \geqslant 0, \tag{18}$$

mit Gleichheit genau für $\mathfrak{v} \equiv v+\text{const}$. Dabei wird natürlich das Verhalten von $\mathfrak{w}$ und w auf den $\mathfrak{R}_i$ benutzt.

Statt Hilfssatz 2 bekommen wir jetzt weiter

$$\mathfrak{a}\mathfrak{b}-2\mathfrak{a}b+ab+\iint_G [f(\mathfrak{d})-f(D)]\,dxdy \geqslant 0, \tag{19}$$

mit Gleichheit genau für $\mathfrak{d} \equiv D$ und $\mathfrak{v} \equiv v+\text{const}$, d.h. $\mathfrak{w} \equiv w+\text{const}$.

(c) Nun sei wie in § 2 (c) wieder α so groß, daß durchweg $D = \alpha/\varrho \geqslant 1$ ist. Dann bezeichne noch $\mathfrak{B}$ die Klasse der schlichten quasikonformen Abbildungen $W(z)$ von G, bei denen die Dilatation $\mathfrak{d} \geqslant 1$ ebenfalls in das Intervall $\mathfrak{F}$ fällt und $\mathfrak{R}$ unter analoger Zuordnung der vier ausgezeichneten Randpunkte wie oben in ein achsenparalleles Rechteck der Seitenlängen $\mathfrak{a}$ und b (diese zweite Größe wie bei $w(z)$) übergeht. Wir setzen also $\mathfrak{b} = b$. Dann gilt nach (19) und [9], Satz 1 (vgl. auch [1] und weitere in [2] zu diesem Problemkreis zitierte Arbeiten)

Satz 2. *Es gilt für $W(z) \in \mathfrak{B}$*

$$\mathfrak{a}-\frac{1}{b}\iint_G f(\mathfrak{d})\,dxdy \leqslant a-\frac{1}{b}\iint_G f(D)\,dxdy, \tag{20}$$

insbesondere

$$\mathfrak{a} \leqslant a, \tag{21}$$

flls

$$\iint_G f(\mathfrak{d})\,dxdy \leqslant \iint_G f(D)\,dxdy. \tag{22}$$

Das Gleichheitszeichen steht genau für $W(z) \equiv w(z)+\text{const}$.

(d) Daneben sei $\mathfrak{B}'$ die Klasse der schlichten quasikonformen Abbildungen $W(z)$ von G, bei denen analog das Bildrechteck von $\mathfrak{R}$ die Seitenlängen a (wie bei $w(z)$) und $\mathfrak{b}$ besitzt (bei sonst gleichen Eigenschaften wie bei den Abbildungen von $\mathfrak{B}$). Dann gilt für die jetzt variierenden Größen $\mathfrak{d}$ und $\mathfrak{b}$.

Satz 2′. *Es ist für $W(z) \in \mathfrak{B}'$*

$$\mathfrak{b}+\frac{1}{a}\iint_G f(\mathfrak{d})\,dxdy \geqslant b+\frac{1}{a}\iint_G f(D)\,dxdy, \tag{23}$$

insbesondere

$$\mathfrak{b} \geqslant b, \tag{24}$$

alls (22) erfüllt ist. Das Gleichheitszeichen steht genau für $W(z) \equiv w(z)+\text{const}$.

Damit hat man eine Charakterisierung des komplexen Potentials $w(z)$ in einer Klasse quasikonformer Abbildungen bei Vorgabe einer Schranke für das Integral über $f(\mathfrak{d})$. (Es wäre natürlich wünschenswert, zu wissen, welche Werte für diese Schranke vorgegeben werden können; in diesem Zusammenhang beachte man, daß neben z.B. der Größe b = Gesamtdurchflußmenge noch in der Bernoullischen Gleichung (2), d.h. in f eine Konstante vorgebbar ist.)

4. Zusammenhang mit der extremalen Länge einer Kurvenschar

Im folgenden geben wir noch eine andere Extremalcharakterisierung der Durchströmung des in § 3 betrachteten (gelöcherten) „Vierecks" G an, bei der der Modul (= reziproke extremale Länge) einer Kurvenschar eine Rolle spielt.

(a) Zunächst sei wie in § 3 (b) $\mathfrak{w}(z) = \mathfrak{u}+i\mathfrak{v}$ eine schlichte quasikonforme Abbildung von G, die Lösung von (7) mit einem $\mathfrak{d} > 0$, bei der G eckpunkttreu in ein achsenparalleles Rechteck der Seitenlängen $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$, geschlitzt längs Strecken parallel zur reellen Achse, übergeht. Γ sei die folgende Gesamtheit rektifizierbarer „Kurven" γ. Jedes γ bestehe aus einer gewissen Anzahl $n \geqslant 1$ in einer gewissen Reihenfolge gegebenen Jordankurvenbögen, die bis auf ihre Endpunkte in G liegen, wobei der erste Bogen auf $\mathfrak{R}_2$ beginnt und auf $\mathfrak{R}_4$ (im Falle $n = 1$) oder auf einer Komponente von C endet. Im letzteren Falle beginne der nächste Bogen auf der gleichen Komponente von C und ende auf $\mathfrak{R}_4$ (im Falle $n = 2$) oder einer anderen Komponente von C. Im letzten Falle beginne auf dieser Komponente der nächste Bogen usw., so daß jedenfalls der letzte Bogen auf $\mathfrak{R}_4$ endet. (Derartige unterbrochene Kurven kommen bei Extremalbeweisen in der geometrischen Funktionentheorie wohl zuerst bei H. Grötzsch im Zusammenhang mit seinen verhefteten Streifen vor). Eine in G erklärte stetige Funktion $\sigma(x, y) \geqslant 0$ definiere eine „zulässige" Metrik, falls

$$\int_{\gamma} \sigma|dz| \geqslant 1 \quad \text{für alle } \gamma \in \Gamma. \tag{25}$$

Dann heiße

$$\inf_{\sigma} \iint_{G} \mathfrak{d}\sigma^2 dx dy = M_{\mathfrak{d}}\{\Gamma\} \tag{26}$$

der $\mathfrak{d}$-*Modul* von G, eine das Infimum realisierende Metrik σ eine *Extremalmetrik*. Auf die Bedeutung dieses formal auf M. Ohtsuka zurückgehenden Begriffs für die Differentialgleichung (7) hat zuerst R. J. Duffin [6] und für die Theorie der quasikonformen Abbildungen zuerst C. Andreian Cazacu hingewiesen [1], [2] — vgl. auch [10].

Es gilt nun

SATZ 3. *Es ist*

$$M_{\mathfrak{d}}\{\Gamma\} = \mathfrak{a}/\mathfrak{b} \tag{27}$$

bei der einzigen Extremalmetrik

$$\sigma = \sqrt{J_{\mathfrak{w}/z}/\mathfrak{d}}\,/\mathfrak{b} \tag{28}$$

mit der Jacobischen Determinante $J_{\mathfrak{w}/z}$.

Zum *Beweise* können wir offenbar über eine Hilfsaffinität (= Streckung in Richtung der reellen Achse) o.E.d.A. $\mathfrak{d} \geqslant 1$ annehmen. Es sei dann σ eine bezüglich Γ zulässige Metrik. Dann definieren wir im Bilde in der $\mathfrak{w}$-Ebene die Funktion

$$\sigma^* = \sigma/\sqrt{J_{\mathfrak{w}/z}/\mathfrak{d}}\,.$$

Es ist wegen $|d\mathfrak{w}/dz| \geqslant \sqrt{J_{\mathfrak{w}/z}/\mathfrak{d}}$, falls jeweils γ^* Bild von γ ist,

$$\int_{\gamma^*} \sigma^*|d\mathfrak{w}| \geqslant \int_{\gamma} \sigma|dz| \geqslant 1,$$

d.h., es ist σ^* analog im Bilde zulässig. Damit wird wegen

$$\iint_G \mathfrak{d}\sigma^2 dx dy = \iint_G \sigma^{*2} d\mathfrak{u} d\mathfrak{v} \geqslant \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$$

fürs erste

$$M_{\mathfrak{d}}\{\Gamma\} \geqslant \mathfrak{a}/\mathfrak{b}. \tag{29}$$

Daß hier sogar das Gleichheitszeichen steht, folgt anschließend noch einfach daraus, daß (28) für Γ zulässig ist.

(b) Sei nun wieder die in § 3 (a) beschriebene gasdynamische Durchströmung von G in Form ihres komplexen Potentials $w(z)$ gegeben, welches (6) mit einem gewissen $D > 0$ erfüllt, wobei auf ein geschlitztes Rechteck der Seitenlängen a und b abgebildet wird. Die in G erklärte Funktion $\mathfrak{d} > 0$ — jetzt „Gewichtsfunktion" genannt — heiße zulässig, wenn ihre Werte in $\mathfrak{F}$ fallen und wenn (22) erfüllt ist. Dann gilt nach (19) $M_{\mathfrak{d}}\{\Gamma\} \leqslant M_D\{\Gamma\}$ mit Gleichheit genau für $\mathfrak{d} \equiv D$.

Damit gleiten wir hinüber zu

SATZ 4. *Es seien σ gemäß (25) die bezüglich Γ zulässigen Metriken, $\mathfrak{d}$ die gemäß (22) zulässigen Gewichtsfunktionen. Dann gilt*

$$\sup_{\mathfrak{d}} \Big\{\inf_{\sigma} \iint_G \mathfrak{d}\sigma^2 dx dy\Big\} = a/b. \tag{30}$$

Dabei ist das hier stehende Infimum genau dann $= a/b$, wenn $\mathfrak{d} \equiv D$, und dann weiter genau dann $\iint D\sigma^2 dx dy = a/b$, wenn $\sigma \equiv \sqrt{J_{w/z}/D}\,/b$.

Das bedeutet, im „Extremalfalle" ist $\mathfrak{d} \equiv \alpha/\varrho$, $\sigma \equiv \frac{\varrho}{\alpha} V/b$ (vgl. (5)), so daß man aus dem „Extremalgewicht" $\mathfrak{d}$ und der „Extremalmetrik" σ die Dichte ϱ und die Geschwindigkeit V entnehmen kann. Diese Funktionen sind damit durch Satz 4 durch ein ableitungsfreies Variationsprinzip charakterisiert. Der Zusammenhang zwischen ϱ und V bedingt übrigens einen Zusammenhang zwischen $\mathfrak{d}$ und σ.

In dieser Betrachtung um Satz 4 kann natürlich $\alpha = 1$ gesetzt werden.

5. Bemerkung zur Minimalflächengleichung

Geht man speziell aus von der Druck-Dichte-Beziehung

$$p = A - 1/\varrho \quad \text{mit} \quad V^2 = \varrho^{-2} - 1 \tag{31}$$

(dies bedeutet die Wahl einer speziellen Konstanten in der Bernoullischen Gleichung) so landet man bei derartigen „Kármán–Tsien–Gasen" (vgl. z. B. [3], [8]) bekanntlich bei der Minimalflächengleichung

$$u_{xx}(1+u_y^2)-2u_{xy}u_xu_y+u_{yy}(1+u_x^2) = 0 \tag{32}$$

(zurückgehend auf Tschaplygin). Für diesen Fall errechnet man

$$f = \frac{1}{\alpha}\left(\varrho+\frac{1}{\varrho}-2A\right), \qquad f(\tau) = \frac{1}{\tau}+\frac{\tau}{\alpha^2}-2\frac{A}{\alpha}. \tag{33}$$

Mit dieser Funktion f liefert also Satz 2 bzw. 2′ bzw. 4 eine neue Extremalcharakterisierung einer solchen Lösung u der Minimalflächengleichung in G, die auf $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_3$ konstante Werte und auf dem übrigen Rand von G verschwindende Normalableitung besitzt. Entsprechendes läßt sich natürlich mit einer Lösung der Minimalflächengleichung anstellen, die in einem zweifach zusammenhängenden Gebiet erklärt ist und auf den beiden Randkomponenten jeweils einen konstanten Wert besitzt.

Man kann natürlich allgemeiner bei gegebener Funktion f rückwärts eine zugehörige Druck-Dichte-Beziehung $p(\varrho)$ durch Auflösung von (2) und (3) nach p bestimmen gemäß

$$p = \frac{\alpha}{2}\left(\varrho\frac{df}{d\varrho}-f\right). \tag{34}$$

Wenn f als Funktion von τ monoton steigend und konvex, dann wird $p(\varrho)$ monoton steigend.

6. Zusatzbemerkungen

(a) Es sei auf Übertragungen der obigen Betrachtungen (ausgenommen diejenigen, bei denen quasikonforme Abbildungen vorkommen) auf den dreidimensionalen Raum hingewiesen; bezüglich § 4 vgl. hierzu [10]. Speziell im rotationssymmetrischen bzw. schraubungssymmetrischen Falle [7], [11] existiert auch eine Stromfunktion, und entsprechende Betrachtungen bei quasikonformen Abbildungen können Platz greifen.

(b) Man kann die ganzen obigen Betrachtungen auch auffassen als Studium von Extremalproblemen bei Abbildungen, die „im Mittel" quasikonform sind, wobei die Beschränkung der Dilatation $\mathfrak{d}$ durch Vorgabe einer Schranke für

$$\iint f(\mathfrak{d})\,dx\,dy \tag{35}$$

erfolgt. Derartige Extremalprobleme wurden wohl zuerst von P. A. Biluta in den interessanten Arbeiten [4], [5] betrachtet. Und zwar wird dort im wesentlichen (für andere Extremalprobleme) unter Voraussetzung der Existenz einer Extremalabbildung eine notwendige Bedingung für dieselbe durch Variationsbetrachtungen hergeleitet — vgl. (5) in [5]. Diese Bedingung (eine einfache Beziehung zwischen Jacobischer Determinante, der Ableitung $f'(\mathfrak{d})$ und der Dilatation) entspricht im

wesentlichen unserer Beziehung $f'(\mathfrak{d}) = J/\mathfrak{d}$ — vgl. (14) bzw. (4) und (5). Dies bedeutet: Mit der dem Hilfssatz 1, d.h. dem Beweis von (12) bzw. (13) zugrunde liegenden Methode läßt sich die Hinlänglichkeit dieser Bedingung nachweisen, also daß eine vorliegende Abbildung im gegebenen Falle tatsächlich extremal ist, wenn sie bewußte Bedingung erfüllt. Die Existenz einer solchen Abbildung nachzuweisen, bedeutet allemal, einen Existenzbeweis analog wie bei der gasdynamischen Umströmung zu führen, wenn man nicht zufällig diese Abbildung explizit anschreiben kann, wie z. B. in Satz 2 in [5].

Unsere oben dargestellte Methode zum Beweis der Hinlänglichkeit läßt sich unmittelbar übertragen auf den Fall eines Extremalproblems mit einem quadratischen Differential, welches ein vollständiges Quadrat ist. Man kann dabei übrigens die Aufgabe noch so modifizieren, daß in (35) nur über ein Teilstück des abzubildenden Gebietes integriert wird, wobei im Reste eine ortsabhängige Dilatationsbeschränkung oder speziell auch Konformität vorgegeben wird. So kann man z.B. außerhalb einer Kurve Konformität verlangen und innerhalb derselben eine Beschränkung von (35). Dies vereinfacht gegenüber Satz 1 die Situation im unendlich fernen Punkte. Man kann dann z.B. auch das den Grunskyschen Koeffizientenbedingungen zugrunde liegende Funktional studieren. Die auftretenden Extremalfunktionen lassen sich deuten als komplexe Potentiale der Elektro- bzw. Magnetostatik in Ferroelektrika bzw. -magnetika, bei denen Dielektrizitäts- bzw. Permeabilitätskonstante von der Feldstärke abhängig ist, ähnlich wie in der Gasdynamik die Dichte von der Geschwindigkeit abhängt.

Literaturverzeichnis

[1] C. Andreian Cazacu, *Sur un problème de L. I. Volkovyski*, Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 10 (1965), 43–63.
[2] —, *Some formulae on the extremal length in n-dimensional case*, Proc. Romanian-Finnish Sem. on Teichmüller Spaces and Quasiconformal Mappings (Braşov/Kronstadt 1969), (1971), 87–102.
[3] L. Bers, *Mathematical aspects of subsonic and transonic gas dynamics*, New York/London 1958 (Russ. Übers.: Moskau 1961).
[4] P. A. Biluta, *Einige Extremalaufgaben in der Klasse im Mittel quasikonformer Abbildungen* [Russ.], Dokl. Akad. Nauk SSSR 155 (1964), 503–505.
[5] —, *Einige Extremalaufgaben für im Mittel quasikonforme Abbildungen* [Russ.], Sibirsk. Mat. Žurn. 6 (1965), 717–726.
[6] R. J. Duffin, *The extremal length of a network*, J. Math. Anal. and Appl. 5 (1962), 200–215.
[7] W. Haack, *Über Schraubenpotentiale und eine Klasseneinteilung der Potentialfunktionen*, Jahresber. d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung 49 (1939), 20–37.
[8] C. Jacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest/Paris 1959.
[9] R. Kühnau, *Über gewisse Extremalprobleme der quasikonformen Abbildung*, Wiss. Z.d. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Nat. Reihe 13 (1964), 35–40.
[10] —, *Der Modul von Kurven- und Flächenscharen und räumliche Felder in inhomogenen Medien*, J. Reine Angew. Math. 243 (1970), 184–191.
[11] —, *Über schraubungssymmetrische Potentialfelder*, Math. Nachr. 45 (1970), 345–351.
[12] —, *Zur Methode der Randintegration bei quasikonformen Abbildungen*, Ann. Polon. Math. 31(1976), 269–289.

[13] R. Kühnau, *Einige Verzerrungsaussagen bei quasikonformen Abbildungen endlich vielfach zusammenhängender Gebiete*, L'Enseign. Math. 24 (1978), 189–201; auch in *Contributions to Analysis*, Monographie No 27 de L'Enseign. Math., Genève 1979, hier Seiten 59–71.
[14] M. Schiffer, *Analytical theory of subsonic and supersonic flows*; Im *Handbuch der Physik*, Band 9, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1960.
[15] J. Serrin, *Mathematical principles of classical fluid mechanics*; Im *Handbuch der Physik*, Band 8, 1. Teil, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1959.

Presented to the Semester
COMPLEX ANALYSIS
February 15–May 30, 1979

COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

DIE HYPERBOLISCHE METRIK ALS GRENZFALL EINER DURCH QUASIKONFORME ABBILDUNGEN DEFINIERTEN METRIK

REINER KÜHNAU

Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität, Halle-Wittenberg
Universitätsplatz 6, 401 Halle an der Saale, DDR

I

In [11], [3] wurde eine Charakterisierung der Kapazität eines Kondensators bzw. verwandter Größen für den Fall eines ortsabhängigen Dielektrikums gegeben in Analogie zum klassischen Gaußschen Prinzip minimaler Energie für den Fall konstanter Dielektrizitätskonstanten. Dabei spielte eine gewisse Metrik bzw. Halbmetrik eine wichtige Rolle. Im folgenden soll für diese gezeigt werden, daß sie bei gewissen Grenzübergängen in die hyperbolische Metrik bzw. Halbmetrik übergeht, was in [11] nur in einem Spezialfall evident war.

II

Die Funktion $p(z) \geqslant 1$ sei für alle z erklärt und — das genügt hier für unsere Zwecke — stückweise konstant; unten folgt hierzu Konkreteres. Wir setzen

$$\nu(z) = \frac{p(z)-1}{p(z)+1}.$$

Mit $\mathfrak{r}(z, \zeta)$ bezeichnen wir jeweils bei festem ζ wie in [11] diejenige stetige schlichte Abbildung der z-Vollkugel auf sich mit $\mathfrak{r}(\infty, \zeta) = \infty$, $\mathfrak{r}(\zeta, \zeta) = 0$, für die $f = \log \mathfrak{r}(z, \zeta)$ (bei festem ζ) die Differentialgleichung

$$f_{\bar{z}} = -\nu \overline{f_z} \tag{1}$$

erfüllt, wobei der Entwicklungstypus ist

$$f = (1+\nu(\infty))^{-1}[\log z - \nu(\infty)\overline{\log z}] + \varepsilon(z) \quad \text{in } z = \infty, \tag{2}$$

$$f = (1+\nu(\zeta))^{-1}[\log(z-\zeta) - \nu(\zeta)\overline{\log(z-\zeta)}] + \text{const} + \varepsilon(z) \quad \text{in } z = \zeta. \tag{3}$$

Dabei sei $\varepsilon(z)$ irgendeine nach 0 strebende Funktion, für die im Falle (2) noch