COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

ПОНЯТИЕ ОБОБЩЕННОГО МОДУЛЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕОРИИ КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

В. В. КРИВОВ

Математический факультет Московского Государственного Университета
SU 117 234 Москва B-234, СССР

В теории квазиконформных отображений очень широко используется понятие модуля семейства кривых или семейства поверхностей, а также связанное с ним понятие конформной емкости. С помощью этих понятий решаются как качественные задачи теории, так и задачи, связанные с отысканием в некотором классе отображения, наиболее близкого к конформному. В этой заметке с помощью вводимого автором понятия обобщенного модуля решаются некоторые задачи второго из указанных типов, то есть так называемые экстремальные задачи теории. При этом мы ограничиваемся рассмотрением диффеоморфизмов, хотя дифференциальные свойства рассматриваемых отображений в ряде случаев без изменения формулировок окончательных результатов могут быть более общими.

1. Дифференциальные формы и нормы

Пусть M — ориентируемое риманово многообразие размерности n, T_x — касательное пространство к M в точке $x \in M$, а $\Lambda_n^l(T_x)$ — пространство антисимметрических полилинейных функций порядка $l \leqslant n$, определенных на декартовом произведении $T_x \times T_x \times \ldots \times T_x$, состоящем из l сомножителей.

Выбирая в каждой точке некоторый элемент $\omega(x) \in \Lambda_n^l(T_x)$, получим отображение $\omega\colon x \to \omega(x)$, задающее на M дифференциальную форму порядка l.

Выбирая в T_x ортонормированный базис $(e_1, \ldots, e_n)$, обозначим $(dx_1, \ldots \ldots, dx_n)$ дуальный базис сопряженного пространства T_x^*. Тогда

$$\omega(x) = \sum_{i_1 \ldots i_l} \omega_{i_1 \ldots i_l} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_l}, \tag{1.1}$$

где символ $\wedge$ обозначает внешнее умножение, а суммирование производится по всем наборам различных индексов, таких что $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots \ldots < i_l \leqslant n$.

Положим

$$(1.2)\qquad |\omega(x)| = \sqrt{\sum_{i_1\ldots i_l} \omega^2_{i_1\ldots i_l}}\,.$$

Если $x_1, \ldots, x_n$ — локальные координаты в некоторой окресности точки x, то выражение (1.1) можно рассматривать тоже в этой окресности, хотя (1.2) в окресности справедливо лишь для ортогональных координат.

Покажем, что значение $|\omega(x)|$ не зависит от выбора ортонормированного базиса в T_x. Пусть $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ — другой ортонормированный базис в T_x, а $(dy_1, \ldots, dy_n)$ — дуальный к нему базис в T^*_x. Тогда

$$(1.3)\qquad dx_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}dy_j,$$

где (a_{ij}), $i, j = 1, \ldots, n$ — ортогональная матрица. Обозначим через $A^{k_1\ldots k_l}_{i_1\ldots i_l}$ минор этой матрицы, образованный элементами, стоящими в строках с номерами $i_1, \ldots, i_l$ и столбцах с номерами $k_1, \ldots, k_l$, причем $1 \leqslant k_1 < \ldots$ $\ldots < k_l \leqslant n$. Будем иметь

$$(1.4)\qquad dx_{i_1}\wedge \ldots \wedge dx_{i_l} = \sum_{k_1\ldots k_l} A^{k_1\ldots k_l}_{i_1\ldots i_l} dy_{k_1}\wedge \ldots \wedge dy_{k_l}.$$

Поэтому

$$\sum_{i_1\ldots i_l} \omega_{i_1\ldots i_l} dx_{i_1}\wedge \ldots \wedge dx_{i_l} = \sum_{k_1\ldots k_l} \tilde{\omega}_{k_1\ldots k_l} dy_{k_1}\wedge \ldots \wedge dy_{k_l},$$

где положено

$$(1.5)\qquad \tilde{\omega}_{k_1\ldots k_l} = \sum_{i_1\ldots i_l} \omega_{i_1\ldots i_l} A^{k_1\ldots k_l}_{i_1\ldots i_l}.$$

Отсюда

$$\sum_{k_1\ldots k_l} \tilde{\omega}^2_{k_1\ldots k_l} = \sum_{i_1\ldots i_l} \omega^2_{i_1\ldots i_l} \sum_{k_1\ldots k_l} (A^{k_1\ldots k_l}_{i_1\ldots i_l})^2 + \sum_{\substack{i_1\ldots i_l\\ j_1\ldots j_l}}{}' 2\omega_{i_1\ldots i_l}\omega_{j_1\ldots j_l}\Big(\sum_{k_1\ldots k_l} A^{k_1\ldots k_l}_{i_1\ldots i_l} A^{k_1\ldots k_l}_{j_1\ldots j_l}\Big),$$

где штрих над знаком суммы означает, что суммирование производится по всем различным наборам индексов $i_1, \ldots, i_l$ и $j_1, \ldots, j_l$, то есть таким наборам, у которых различаются хотя бы по одному из входящих в них индексов.

Из формулы Бине–Коши (см. [1]) и ортогональности матрицы (a_{ij}) вытекает, что

$$\sum_{k_1\ldots k_l} (A^{k_1\ldots k_l}_{i_1\ldots i_l})^2 = 1; \qquad \sum_{k_1\ldots k_l} A^{k_1\ldots k_l}_{i_1\ldots i_l} A^{k_1\ldots k_l}_{j_1\ldots j_l} = 0,$$

где $(i_1, \ldots, i_l) \neq (j_1, \ldots, j_l)$. Следовательно

$$\sum_{k_1\ldots k_l} \tilde{\omega}^2_{k_1\ldots k_l} = \sum_{i_1\ldots i_l} \omega^2_{i_1\ldots i_l}$$

и независимость величины $|\omega(x)|$ от выбора ортогонального нормированного базиса в T_x установлена.

Запишем $\omega(x)$ для фиксированного x в виде (1.1) и введем дифференциальную форму ω^* порядка $k-l$, полагая

$$(1.6)\qquad \omega^*(x) = \sum_{i_1\ldots i_l} \omega_{i_1\ldots i_l}\sigma(i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_m) dx_{j_1}\wedge \ldots \wedge dx_{j_m},$$

где в каждом слагаемом индексы $j_1, \ldots, j_m$ — это все те числа из набора $(1, \ldots, n)$, которых нет среди чисел $(i_1, \ldots, i_l)$, причем $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_m \leqslant n$, $m = n-l$, а $\sigma(i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_m)$ — сигнатура перестановки $(i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_m)$.

Поскольку многообразие ориентируемо, то (1.6) задает ω^* на всем многообразии. На самом деле, ω^* не зависит от выбора ортонормированного базиса (той же ориентации) в T_x, а при изменении ориентации базиса лишь меняет знак.

Из (1.1) и (1.6), обозначая через $dx = dx_1\wedge \ldots \wedge dx_n$ элемент объема в пространстве T_x, а затем рассматривая дифференциальную форму $dv(x) = dx$, получим

$$(1.7)\qquad \omega(x)\wedge\omega^*(x) = |\omega(x)|^2 dx.$$

Нетрудно проверить, что величина $|\omega(x)|$, определенная равенством (1.2), обладает всеми свойствами нормы в пространстве $\Lambda^l_n(T_x)$ и что операция $*$ линейна и $|\omega(x)| = |\omega^*(x)|$, то есть задает изоморфизм пространств $\Lambda^l_n(T_x)$ и $\Lambda^{n-l}_n(T_x)$ с сохранением нормы.

Если L — некоторое ориентируемое подмногообразие размерности l, содержащееся в M, функция ω — измерима и $|\omega|$ интегрируема на L, то справедливо неравенство

$$(1.8)\qquad \Big|\int_L \omega\Big| \leqslant \int_L |\omega| dv.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно рассмотреть параметризацию некоторой окрестности в L, воспользоваться неравенством Коши–Буняковского и разбиением единицы. Мы опускаем здесь это доказательство.

Обозначим через $L_p(M; l)$, где $p \geqslant 1$ — фиксированное число, совокупность всех дифференциальных форм порядка l $(l \leqslant n)$, определенных на многообразии M, имеющих измеримые коэффициенты, и таких, что функция $|\omega(x)|^p$ интегрируема на M. Условимся при этом отождествлять две формы, если они различаются лишь на множестве меры нуль.

Введем в $L_p(M; l)$ норму, полагая

$$(1.9)\qquad \|\omega\| = \Big(\int_M |\omega(x)|^p dv\Big)^{1/p}.$$

Убедимся в том, что это действительно норма. Ограничимся проверкой неравенства треугольника, так как другие свойства нормы, очевидно, выполняются. Пользуясь неравенством Минковского, получим

$$||\omega_1+\omega_2|| = \Big(\int\limits_M |(\omega_1+\omega_2)(x)|^p dv\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int\limits_M (|\omega_1(x)|+|\omega_2(x)|)^p dv\Big)^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\int\limits_M |\omega_1(x)|^p dv\Big)^{1/p} + \Big(\int\limits_M |\omega_2(x)|^p dv\Big)^{1/p} = ||\omega_1||+||\omega_2||.$$

Итак, $L_p(M; l)$ — полное нормированное пространство. Так как значения входящих в него функций лежат в $\Lambda_n^l(T_x)$, которое является нормированным пространством размерности $n!/l!(n-l)!$, то все результаты, относящиеся к пространствам векторнозначных интегрируемых функций, сохраняются. Справедливы, в частности, неравенства Кларксона (см. [5]):

$$\text{(a)} \quad 2(||\omega_1||^p+||\omega_2||^p) \leqslant ||\omega_1+\omega_2||^p+||\omega_1-\omega_2||^p \leqslant \leqslant 2^{p-1}(||\omega_1||^p+||\omega_2||^p),$$
$$\text{(1.10)} \quad \text{(b)} \quad 2(||\omega_1||^p+||\omega_2||^p)^{q-1} \leqslant ||\omega_1+\omega_2||^q+||\omega_1-\omega_2||^q,$$
$$\text{(c)} \quad ||\omega_1+\omega_2||^p+||\omega_1-\omega_2||^p \leqslant 2(||\omega_1||^q+||\omega_2||^q)^{p-1},$$

где $p \geqslant 2$, $q = p/(p-1)$, а если $1 < p \leqslant 2$, то эти неравенства меняются на противоположные.

2. Обобщенный модуль и экстремальная форма

Пусть F — некоторое подмножество пространства $L_p(M; l)$. Величина

$$\text{(2.1)} \qquad \mu(F; M) = \inf_{\omega \in F} ||\omega||$$

называется *обобщенным модулем* многообразия M по совокупности (см. также работу автора [8]).

Если для некоторой $\omega_0 \in F$ $\mu(F; M) = ||\omega_0||$, то форма ω_0 называется *экстремальной*.

Теорема 2.1. *Если множество F замкнуто в $L_p(M, l)$, $(p > 1)$ и выпукло, то экстремальная дифференциальная форма для него существует и единственна.*

Доказательство. Пусть вначале $p \geqslant 2$. По определению нижней грани существует последовательность $\omega_\nu \in F$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, такая что

$$\text{(2.2)} \qquad \mu(F; M) = \lim_{\nu\to\infty} ||\omega_\nu||.$$

Фиксируя $\varepsilon > 0$, найдем номер ν_0, такой что для всех $\nu > \nu_0$ выполняется неравенство

$$\text{(2.3)} \qquad ||\omega_\nu||^p \leqslant \mu^p(F; M)+(\varepsilon/2)^p.$$

Тогда для любых двух номеров $\nu_1, \nu_2 > \nu_0$ в силу выпуклости F имеем: $(\omega_{\nu_1}+\omega_{\nu_2})/2 \in F$ и, следовательно,

$$\text{(2.4)} \qquad \mu^p(F; M) \leqslant \left\|\frac{\omega_{\nu_1}+\omega_{\nu_2}}{2}\right\|^p.$$

Вместе с неравенством Кларксона (1.10) (a) и (2.3) это дает:

$$\mu^p(F; M)+\left\|\frac{\omega_{\nu_1}-\omega_{\nu_2}}{2}\right\|^p \leqslant 2^{p-1}\left(\left\|\frac{\omega_{\nu_1}}{2}\right\|^p+\left\|\frac{\omega_{\nu_2}}{2}\right\|^p\right) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{p-1}\cdot 2^{-p+1}(\mu^p(F; M)+(\varepsilon/2)^p) = \mu^p(F; M)+(\varepsilon/2)^p,$$

так что

$$\text{(2.5)} \qquad ||\omega_{\nu_1}-\omega_{\nu_2}|| < \varepsilon.$$

Последовательность ω_ν оказывается фундаментальной, а поскольку пространство $L_p(M; l)$ полное, то существует предел $\omega_0 = \lim\limits_{\nu\to\infty} \omega_\nu$. Теперь из (2.2) и непрерывности нормы вытекает, что

$$\text{(2.6)} \qquad \mu(F; M) = ||\omega_0||,$$

и форма ω_0 оказывается экстремальной. Ее единственность следует из (2.5). В самом деле, если ω_{ν_1} и ω_{ν_2} в этом неравенстве считать экстремальными, то ε в этом случае, как это видно из рассуждения, можно считать произвольным, и, значит, эти две формы совпадают. При $1 < p \leqslant 2$ рассуждение то же самое, но использует (1.10)(c).

Теорема 2.2. *Предположим, что совокупность F вместе с любой дифференциальной формой $\omega \in F$ содержит дифференциальную форму $\omega+\varphi$, где φ — произвольная точная форма с компактным носителем в M, а экстремальная форма ω_0 непрерывно дифференцируема. Тогда ω_0 удовлетворяет уравнению*

$$\text{(2.7)} \qquad d(|\omega_0|^{p-2}\omega_0^*) = 0$$

где d — внешний дифференциал.

Доказательство. Пусть ψ — произвольная непрерывно-дифференцируемая форма порядка $l-1$, носитель которой содержится в достаточно малом открытом шаре $B \subset M$ и пусть $\varphi = d\psi$. Функция $g(t) = \int\limits_M |\omega_0+t\varphi|^p dv$ достигает минимума при $t = 0$. Поэтому с учетом (1.7)

$$\text{(2.8)} \quad g'(0) = \Big(\frac{d}{dt}\int\limits_M |\omega_0+t\varphi|^p dv\Big)_{t=0} =$$
$$= p\Big[\int\limits_M (|\omega_0+t\varphi|^2)^{p/2-1}\frac{d}{dt}(|\omega_0+t\varphi|^2 dv)\Big]_{t=0} = p\int\limits_M |\omega_0|^{p-2}\varphi\wedge\omega_0^* = 0.$$

Обозначим для краткости $\omega_1 = |\omega_0|^{p-2}\omega_0^*$ и проинтегрируем по B равенство $d(\omega_1\wedge\psi) = d\omega_1\wedge\psi+(-1)^m\omega_1\wedge d\psi$. Применяя формулу Стокса, получим

$$\text{(2.9)} \qquad 0 = \int\limits_{\partial B}\omega_1\wedge\psi = \int\limits_B d(\omega_1\wedge\psi) = \int\limits_B d\omega_1\wedge\psi+(-1)^m\int\limits_B \omega_1\wedge\psi.$$

Как видно из (2.8), второе слагаемое здесь обращается в нуль. Значит, равно нулю и первое слагаемое, откуда в силу произвольности ψ и вытекает (2.7).

Рассмотрим 2 примера.

1. Пусть M — кольцевая область в n-мерном евклидовом пространстве R^n, то есть такая область, дополнение которой до R^n содержит ровно две связные компоненты C_0 и C_1, а совокупность F состоит из всех точных дифференциальных форм ω первого порядка на M, таких что $\int_\gamma \omega = I$ для любого пути, соединяющего C_0 и C_1 в M. Тогда $[\mu(F;M)]^p$ есть модуль порядка p семейства всех таких путей или (при $p = n$) конформная емкость области M по Левнеру (см. [9]), ω можно задать в виде векторного поля ∇u, где функция u непрерывна в R^n, $u|_{C_0} = 0$, $u|_{C_1} = 1$, интеграл в (2.1) представляет собой интеграл Дирихле, а уравнение (2.7) принимает вид:

$$\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = 0. \tag{2.10}$$

В частности при $p = 2$ получается уравнение Лапласа, а при $p = n$ известное уравнение для экстремальной функции конформной емкости. Этот пример оправдывает название введенного понятия.

2. Вычислим модуль прямого произведения $M = M_1 \times M_2$ двух римановых многообразий размерностей l и m, соответственно, $l+m = n$, имеющих *конечные* объемы $v_i = \int_{M_i} dv_i$, $i = 1, 2$, причем метрику в M зададим формулой $ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2$, где ds_i — метрика в M_i. Предположим, что M_1 имеет гладкий край ∂M_1, а совокупность $F = F(M_1)$ состоит из всех непрерывных на $(M_1 \cup \partial M_1)\times M_2$, замкнутых в M дифференциальных форм порядка l, удовлетворяющих условиям:

1. $\int_{M_1\times x_2} \omega \geqslant 1$ для некоторой точки $x_2 \in M_2$ при фиксированной ориентации $M_1 \times x_2$;
2. $\omega(T_x^l(\partial M_1 \times M_2)) = 0$ для всех $x \in \partial M_1 \times M_2$.

Пусть $\tilde{x}_2 \in M_2$ и γ — гладкий путь, соединяющий x_2 и $\tilde{x}_2$ в M_2. Тогда $M_1 \times \gamma$ есть сингулярная $(l+1)$-мерная цепь в $M_1 \times M_2$. Пользуясь формулой Стокса при соответствующем выборе ориентации в $M_1 \times \tilde{x}_2$ и учитывая условие 2, которому удовлетворяет совокупность F, получим:

$$0 = \int_{M_1\times\gamma} d\omega = \int_{\partial(M_1\times\gamma)} \omega = \int_{\partial M_1\times\gamma} \omega + \int_{M_1\times\tilde{x}_2} \omega - \int_{M_2\times x_2} \omega = \int_{M_1\times\tilde{x}_2} \omega - \int_{M_2\times x_2} \omega, \tag{2.11}$$

так что $|\int_{M_1\times x_2} \omega| \geqslant 1$ для всех $x_2 \in M_2$ и $\omega \in F(M_1)$.

Возьмем в (1.8) в качестве L многообразие $M_1 \times x_2$ и проинтегрируем это неравенство по M. Для $\omega \in F(M_1)$ после применения теоремы Фубини, получим:

$$v_2 \leqslant \int_{M_2} dx_2 \Big|\int_{M_1\times x_2} \omega\Big| \leqslant \int_{M_2} dx_2 \int_{M_1\times x_2} |\omega| dx_1 = \int_{M_1\times M_2} |\omega| dv.$$

Отсюда, пользуясь неравенством Гельдера, найдем:

$$v_2 \leqslant \int_M |\omega| dv \leqslant \Big(\int_M |\omega|^p dv\Big)^{1/p} \Big(\int_M dv\Big)^{(p-1)/p},$$

и, следовательно, поскольку $v = v_1 \cdot v_2$:

$$\|\omega\| \geqslant v_2^{1/p}/v_1^{(p-1)/p}. \tag{2.12}$$

Рассмотрим теперь на M_1 дифференциальную форму $\sigma_1 = dv_1$, задающую объем. Так как ее порядок равен l и совпадает с размерностью многообразия M_1, то $d\sigma_1 = 0$. Положим $p(x_1, x_2) = x_1$, где $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$. Отображение p проектирует M на M_1. Фиксируя ориентацию M_1, будем считать, что при этом проектировании $M_1 \times x_2$ на M_1 ориентация сохраняется.

Возьмем теперь произвольную точку $x \in M$ и векторы $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_l$ в T_x. Зададим на M дифференциальную форму $\omega_0 = \frac{1}{v_1} p^*\sigma_1$, полагая

$$p^*\sigma_1(x)(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_l) = \sigma_1(p'(\bar{a}_1), \ldots, p'(\bar{a}_l)), \tag{2.13}$$

где $p'(x)$ — производная p в точке x. Легко видеть, что:

$$d\omega_0 = \frac{1}{v_1} dp^*(\sigma_1) = \frac{1}{v_1} p^*(d\sigma_1) = 0, \tag{2.14}$$

так что дифференциальная форма ω_0 замкнута в M. Проверим, что $\omega_0 \in F(M_1)$. Поскольку p осуществляет взаимно-однозначное отображение $M_1 \times x_2$ на M_1 (если фиксировать x_2), то

$$\int_{M_1\times x_2} \omega_0 = \int_{M_1\times x_2} \frac{1}{v_1} p^*(\sigma_1) = \int_{p(M_1\times x_2)} \frac{1}{v_1} \sigma_1 = 1. \tag{2.15}$$

Кроме того, заметим, что касательное пространство к ∂M_1 имеет в каждой точке x размерность $l-1$, в силу чего для любых l векторов $\bar{b}_1, \ldots, \bar{b}_l \in T_x(\partial M_1)$ справедливо равенство $\sigma_1(b_1, \ldots, b_l) = 0$. Отсюда, если $(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_l) \in T_x^l(\partial M_1 \times M_2)$, то

$$\omega_0(x)(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_l) = \frac{1}{v_1} p_1^*(\sigma_1)(\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_l) = \tag{2.16}$$

$$= \frac{1}{v_1} \sigma_1(p'(\bar{a}_1), \ldots, p'(\bar{a}_l)) = 0,$$

то есть оба условия выполнены.

Если $x = (x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(l)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_2^{(m)}) \in M$, где $x_1^{(1)}, \ldots, x_1^{(l)}$ — ортогональные координаты в $T_{x_1}(M_1)$, а $x_2^{(1)}, \ldots, x_2^{(m)}$ — ортогональные координаты в $T_{x_2}(M_2)$, то $\sigma_1 = dx_1^{(1)} \wedge \ldots \wedge dx_2^{(l)}$ и

$$\omega_0 = \frac{1}{v_1} p^*(dx_1^{(1)} \wedge \ldots \wedge dx_1^{(l)}) = \frac{1}{v_1} dx_1^{(1)} \wedge \ldots \wedge dx_1^{(l)}, \tag{2.17}$$

откуда $|\omega_0(x)| = 1/v_1$ для всех $x \in M$. По теореме Фубини теперь получим:

$$\|\omega_0\| = \Big(\int_M |\omega_0|^p dv\Big)^{1/p} = \Big(\int_{M_2} dx_2 \int_{M_1\times x_2} v_1^{-p} dv\Big)^{1/p} = v_2^{1/p}/v_1^{(p-1)/p}. \tag{2.18}$$

Вместе с (2.12) это и дает искомую величину модуля

$$\mu\big(F(M_1);\, M_1\times M_2\big) = v_2^{1/p}/v_1^{(p-1)/p}, \tag{2.19}$$

причем формула, задающая ω_0, эффективно описывает экстремальную дифференциальную форму.

3. Квазиинвариантность обобщенного модуля

Пусть $f\colon M\to N$ — дифференцируемое отображение многообразия M в другое риманово многообразие N, размерность которого равна ν, и, вообще говоря, не совпадает с размерностью M. Для любой точки $x\in M$ возникает линейное отображение $f'(x)\colon T_x\to T_{f(x)}$, где $T_{f(x)}$ — касательное пространство к N в точке $f(x)$. Это линейное отображение естественным образом индуцирует линейное отображение $f_x^*\colon \Lambda_\nu^l(T_{f(x)})\to \Lambda_n^l(T_x)$, сопоставляющее форме ω порядка l на N форму $f^*\omega$ порядка l на M (сравни (2.16)). Положим $y=f(x)$.

Фиксируя y, введем норму $|f_y^*|$ по формуле:

$$|f_y^*| = \sup_{|\omega(y)|\neq 0} |f^*\omega(y)|/|\omega(y)|. \tag{3.1}$$

Например, пусть размерности M и N совпадают, $f'(x)$ имеет в надлежащим образом выбранных ортонормированных базисах вид $dy_i=\lambda_i dx_i$, $i=1,2,\ldots,n$, $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\ldots\geqslant\lambda_n$.

Тогда из (1.2) и (3.1) для любого $x\in M$ получим:

$$|f^*\omega(y)|/|\omega(y)| = \sqrt{\sum_{i_1\ldots i_l}(\omega_{i_1\ldots i_l}\lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_l})^2}\Bigg/\sqrt{\sum_{i_1\ldots i_l}\omega^2_{i_1\ldots i_l}} \leqslant \lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_l,$$

так что

$$|f_y^*|\leqslant \lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_l. \tag{3.2}$$

Если же взять $\omega(y)=dy_1\wedge\ldots\wedge dy_l$, то убедимся, что на самом деле в (3.2) стоит равенство, то есть

$$|f_y^*| = \lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_l. \tag{3.3}$$

Полезно заметить также, что $|f^*\omega(y)|\leqslant|f_y^*|\cdot|\omega(y)|$. Величина

$$K_l(f) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in M}\frac{(\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n)^{l/n}}{\lambda_{n-l+1}\cdot\ldots\cdot\lambda_n} \tag{3.4}$$

называется *l-ой дилатацией* дифференцируемого отображения f. Если $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n$ в каждой точке $x\in M$, то в правой части (3.4) получится 1. В этом случае отображение конформно.

Отметим еще, что

$$K_1(f) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in M}\frac{(\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n)^{1/n}}{\lambda_n};\quad K_{n-1}(f) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in M}\frac{\lambda_1}{(\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_n)^{1/n}}, \tag{3.5}$$

так что $K_1(f)$ есть внутренняя дилатация, а $K_{n-1}(f)$ — внешняя дилатация отображения f (по терминологии работы [2]).

Теорема 3.1. *Если $f\colon M\to f(M)$ диффеоморфизм, F — некоторая совокупность дифференциальных форм порядка l в $f(M)$, f^*F — совокупность всех дифференциальных форм в M, полученных из форм совокупности F с помощью f^*, то для обобщенного модуля при $p=n/l$ имеют место неравенства*

$$\frac{1}{K_l(f)}\mu\big(F;f(M)\big)\leqslant\mu(f^*F;M)\leqslant K_{n-l}(f)\mu\big(F;f(M)\big). \tag{3.6}$$

Доказательство. Поскольку для почти всех $x\in M$ имеем неравенство $|f_y^*|/|\det f'(x)|^{l/n}\leqslant K_{n-l}(f)$, то для любой $\omega\in F$:

$$\Big(\int_{f(M)}|\omega(y)|^{n/l}dy\Big)^{l/n}\geqslant\Big(\int_M\frac{|f^*\omega(y)|^{n/l}}{|f_y^*|^{n/l}}\,|\det f'(x)|\,dx\Big)^{l/n}\geqslant \tag{3.7}$$

$$\geqslant\frac{1}{K_{n-l}(f)}\,\|f^*\omega\|\geqslant\frac{1}{K_{n-l}(f)}\,\mu(f^*F;M).$$

Отсюда следует правое из неравенств (3.6). Левое неравенство получается тем же способом при рассмотрении обратного диффеоморфизма.

Следствие. *Если отображение f конформно, то*

$$\mu(f^*F;M)=\mu\big(F;f(M)\big), \tag{3.8}$$

то есть обобщенный модуль при $p=n/l$ является конформным инвариантом. Это сразу вытекает из (3.6), *так как для конформного отображения $K_l(f) = K_{n-l}(f)=1$.*

Рассмотрим 2 примера применения формулы (3.8).

1. Пусть M — область в R^3, заданная условиями

$$x_1^2+x_2^2<\alpha x_3^2;\quad x_3>0;\quad 0<a<|x|<b$$

где $x=(x_1,x_2,\ldots,x_3)$ декартовы прямоугольные координаты, α — положительное число.

Обозначим $p\colon x\to x/|x|$ проекцию пространства R^3 на сферу S^2 радиуса 1 и пусть $y_1\in R$, а $y_2\in S^2$.

Тогда $f\colon(x_1,x_2,x_3)\to(\ln|x|;\, x/|x|)=(y_1,y_2)$ есть отображение множества M в декартово произведение $R\times S^2$, причем $f(M)$ будет декартовым произведением интервала $(\ln a,\ln b)$ на сферическую шапочку $Q_\alpha=\{x\in S^2\colon x_1^2+x_2^2<\alpha x_3^2;\ x_3>0\}$.

В любой точке $x\in M$:

$$\lambda_1=(\ln|x|)'=1/|x|;\quad \lambda_2=\lambda_3=1/|x|,$$

так что отображение f — конформное. Из (2.19) и (3.8), полагая $p=n/l$, где $l=1$, $n=3$, получим

$$\mu(f^*F;M)=v_2^{1/3}/v_1^{2/3}. \tag{3.9}$$

icm©

Но $v_1 = \ln b - \ln a = \ln\left(\dfrac{b}{a}\right)$, а v_2 представляет собой площадь сферической шапочки Q_α, так что

$$v_2 = 2\pi\left(\sqrt{1+\alpha}-1\right)/\sqrt{1+\alpha}. \tag{3.10}$$

Совокупность f^*F, где F описана в примере 2 раздела 2, состоит в этом случае из всех непрерывных на M вместе с частью границы $\{x \in \partial M;\ |x| = a$ или $|x| = b\}$ дифференциальных форм первого порядка вида $f^*\omega$, где $\omega \in F$. Так как ω — замкнута, то $f^*\omega$ тоже замкнута и, в силу односвязности области M, существует первообразная, то есть в нашем случае функция u, такая что $f^*\omega = du$; $u = \mathrm{const}$ при $|x| = a$ и $|x| = b$, и можно положить $u|_{|x|=a} = 0$, $u|_{|x|=b} = 1$. Уравнение (2.7) принимает вид (2.10), а из (3.9) и (3.10) получается величина модуля

$$\mu(f^*F; M) = \left(2\pi\left(\sqrt{1+\alpha}-1\right)/\sqrt{1+\alpha}\,\ln^2\frac{b}{a}\right)^{1/3}. \tag{3.11}$$

Это, естественно (после возведения в степень 3), совпадает с величиной конформной емкости по Лёвнеру (см. [2] и [9]), а также с величиной модуля семейства всех кривых, соединяющих $B_0 = \{x \in \partial M;\ |x| = a\}$ и $B_1 = \{x \in \partial M;\ |x| = b\}$ в M.

2. Пусть M — тороидальная область в R^3, полученная вращением круга $(x_2-a)^2+x_3^2 < 1$, $a > 1$, расположенного в плоскости (x_2, x_3) вокруг оси Ox_3. Полуплоскость $\{(x_1, x_2, x_3) \in R^3;\ x_1 = 0;\ x_2 > 0\}$ можно рассматривать как плоскость Лобачевского, вводя в ней метрику ds/x_2, где ds — обычная евклидова метрика. Упомянутый круг будет кругом B в этой плоскости, его неевклидов радиус равен $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a+1}{a-1}$, неевклидова длина окружности $l = 2\pi/\sqrt{a^2-1}$, а неевклидова площадь

$$v_2 = 2\pi/\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\sqrt{a^2-1}. \tag{3.12}$$

Обозначим $h\colon (x_1; x_2; x_3) \to \left(0; \sqrt{x_1^2+x_2^2}; x_3\right) = y_2$ отображение пространства с выброшенной осью Ox_3 на упомянутую выше плоскость Лобачевского, через y_2 будем обозначать точку этой плоскости, а через y_1 точку на окружности S^1 радиуса 1 в плоскости (x_2, x_3), заданной уравнением $x_1^2+x_2^2 = 1$.

Тогда

$$f\colon (x_1; x_2; x_3) \to \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}; \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}; h(x)\right) = (y_1, y_2)$$

определяет отображение области M на декартово произведение $S^1 \times B$, причем в любой фиксированной точке $x \in M$

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}};\quad \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}},$$

так что отображение f конформное. Из (2.19) и (3.8), полагая $p = n/l$, $l = 1$, $n = 3$, получим (3.9), но на этот раз $v_1 = 2\pi$; v_2 задается формулой (3.12). Совокупность f^*F состоит из всех непрерывных на M замкнутых дифференциальных форм 1-го порядка, таких что $\int_\gamma \omega = 1$ для любой окружности, гомотопной окружности: $x_1^2+x_2^2 = a^2$; $x_3 = 0$.

Поэтому величина модуля оказывается равной

$$\mu(f^*F; M) = \left[2\pi\left(a+\sqrt{a^2-1}\right)\sqrt{a^2-1}\right]^{-1/3} \tag{3.13}$$

а после возведения в куб совпадает с модулем семейства всех кривых, гомотопных упомянутой окружности.

Тем же способом можно подсчитать модули многих других областей, сводя их к случаю прямого произведения.

4. Структура экстремальных отображений

Пусть римановы многообразия M_1 и N_1 имеют размерность l, римановы многообразия M_2 и N_2 имеют размерность m, причем $l+m = n$, и пусть M_1 имеет гладкий край ∂M_1, а N_1 имеет гладкий край ∂N_1.

Рассмотрим прямое произведение $M = M_1 \times M_2$ и обозначим через $F(M_1)$ совокупность дифференциальных форм, описанную в примере 2 раздела 2, причем $p = n/l$. Аналогично определим $F(N_1)$.

Пусть теперь $\mathfrak{M}$ — совокупность диффеоморфизмов $(M_1 \cup \partial M_1) \times M_2$ на $(N_1 \cup \partial N_1) \times N_2$, обладающих свойствами:

1. Существуют $x_2 \in M_2$, $y_2 \in N_2$ и гладкое ориентируемое многообразие Q размерности $l+1$ в $N_1 \times N_2$ такие, что

$$\partial Q = f(M_1 \times x_2) - N_1 \times y_2 + \Sigma, \tag{4.1}$$

где $\Sigma \subset \partial N_1 \times N_2$.

2. Для любого $f \in \mathfrak{M}$: $f(\partial M_1 \times M_2) = \partial N_1 \times N_2$. В частности, если $\partial N_1 = \varnothing$, то свойство 1 означает, что $f(M_1 \times x_2)$ и $N_1 \times y_2$ гомологичны в $N_1 \times N_2$.

Сохраняя для v_i тот же смысл, что и в (2.19), обозначим через $\tilde v_i$ объем N_i $(i = 1, 2)$.

Теорема 4.1. *Предположим, что существуют диффеоморфизмы $g_1\colon M_1 \cup \partial M_1 \to N_1 \cup \partial N_1$ и $g_2\colon M_2 \to N_2$ с постоянными якобианами I_1 и I_2, соответственно, а v_i и $\tilde v_i$ отличны от 0 и ∞. Тогда для любого диффеоморфизма $f \in \mathfrak{M}$ справедливо неравенство:*

$$K_{n-l}(f) \geqslant (I_1^m/I_2^l)^{1/(l+m)}, \tag{4.2}$$

причем знак равенства может достигаться лишь для диффеоморфизмов, обладающих свойствами (в обозначениях раздела 3):

(a) $|f_y^*|/|\det f'(x)|^{l/n} = K_{n-l}(f) = \mathrm{const}$;

(b) *если* ω_0 — *экстремальная форма в* N, *то* $f^*\omega_0$ — *экстремальная форма в* M,

(c) $|f^*\omega_0(y)| = |f_y^*|\cdot|\omega_0(y)|$ *для всех* $y \in N$.

Доказательство. Вначале заметим, что имеет место включение $f^*F(N_1)\subset F(M_1)$. Действительно, для любой $\omega \in F(N_1)$ выберем x_2 и y_2 так, чтобы имело место (4.1). Применяя формулу Стокса и учитывая, что $\int_\Sigma \omega = 0$, получим

$$\int_{M_1\times x_2} f^*\omega = \int_{f(M_1\times x_2)} \omega = \int_{N_1\times y_2} \omega \geqslant 1.$$

Если еще учесть 2-е свойство отображения f и 2-е условие для $f^*\omega$, то получим $f^*\omega \in F(M_1)$, то есть справедливость упомянутого включения. Теперь из определения модуля и (2.19) при $p = n/l$ получаем:

(4.3) $$\mu(f^*F(N_1); M_1\times M_2) \geqslant \mu(F(M_1); M_1\times M_2) = v_2^{l/n}/v_1^{m/n}.$$

Кроме того,

$$\mu(F(N_1); N_1\times N_2) = \tilde{v}_2^{l/n}/\tilde{v}_1^{m/n}$$

откуда, пользуясь правым неравенством из (3.6), найдем:

$$K_{n-l}(f) \geqslant \frac{\mu(f^*F(N_1); M_1\times M_2)}{\mu(F(N_1); N_1\times N_2)} \geqslant \frac{\mu(F(M_1); M_1\times M_2)}{\mu(F(N_1); N_1\times N_2)} = (\tilde{v}_1/v_1)^{m/n}/(\tilde{v}_2/v_2)^{l/n} = (I_1^m/I_2^l)^{1/(l+m)},$$

и неравенство (4.2) установлено. Если же в (4.2) реализуется равенство, то оно будет в правом из неравенств (3.6), а значит, всюду в (3.7). Отсюда следует остальная часть утверждения теоремы.

Таким образом, реализация равенства в (4.2) возможна лишь для таких диффеоморфизмов, которые реализуют равенство в (3.6) (в одном из неравенств). Такие диффеоморфизмы будем называть *экстремальными*. Их структура, как видно из теоремы 4.1, наиболее близка к структуре конформных отображений. При этом условия (a), (b), (c) вытекают из (3.6) не только для прямых произведений.

Пусть теперь в условиях теоремы 4.1 растяжения $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ для g_1 в любой точке $x_1 \in M_1$ не меньше растяжений $\lambda_{l+1}, \ldots, \lambda_{l+m}$ в любой точке $x_2 \in M_2$ для g_2. Тогда диффеоморфизм, задаваемый формулой

(4.4) $$g(x_1; x_2) = (g_1(x_1); g_2(x_2)),$$

будет экстремальным в классе $\mathfrak{M}$. В самом деле,

(4.5) $$K_{n-l}(g) = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in M} \frac{(\lambda_1\cdot\ldots\cdot\lambda_{l+m})^{m/(l+m)}}{\lambda_{l+1}\cdot\ldots\cdot\lambda_{l+m}} = (I_1^m/I_2^l)^{1/(l+m)}.$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. M_1 — отрезок $[0, a]$, M_2 — отрезок $[0, b]$,
   N_1 — отрезок $[0, a_1]$, N_2 — отрезок $[0, b_1]$.

В этом случае $l = 1$, $m = 1$, совокупность $\mathfrak{M}$ состоит из всех диффеоморфизмов прямоугольника $M_1\times M_2$ на прямоугольник $N_1\times N_2$, переводящих вершины $(0; 0)$, $(a; 0)$, $(0; b)$ и $(a; b)$, соответственно, в вершины $(0; 0)$, $(a_1; 0)$, $(0; b_1)$ и $(a_1; b_1)$. Неравенство (4.2) принимает вид

$$K_1(f) \geqslant \left(\frac{a_1}{a}\cdot\frac{b}{b_1}\right)^{1/2}$$

причем, если $a_1/a \geqslant b_1/b$, то (4.4) будет аффинным отображением, реализующим равенство, а из теоремы 4.1 нетрудно вывести единственность этого экстремального отображения (известный результат Греча, см. [4]).

2. M_1 — область на плоскости R^2, M_2 — интервал $(0, h)$,
   N_1 — область на плоскости R^2, N_2 — интервал $(0, H)$.

Пусть существует аффинное отображение M_1 на N_1 с растяжениями λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant H/h$. Тогда в классе диффеоморфизмов $\mathfrak{M}$, переводящих основания цилиндра $M_1\times(0; h)$ в основания цилиндра $N_1\times(0; H)$, аффинное отображение будет экстремальным, а для любого отображения f из этого класса, полагая в (4.2) $l = 2$; $n = 3$, получим

$$K_1(f) \geqslant \left[\frac{\lambda_1\lambda_2}{(H/h)^2}\right]^{1/3}$$

(см. работу автора [6]). Из теоремы 4.1 вытекает также, что экстремальное отображение обязательно имеет в этом случае вид (4.4), где $g_1\colon M_1 \to N_1$ имеет постоянный якобиан, а g_2 — линейное.

3. В обозначениях примера 1 раздела 3 пусть $M = Q_\alpha\times(\ln a, \ln b)$, $N = Q_\beta\times(\ln a_1, \ln b_1)$, причем $\beta \geqslant \alpha$, $\ln\frac{b_1}{a_1}\Big/\ln\frac{b}{a} \leqslant 1$. Тогда из (3.10) имеем:

$$I_1 = \frac{\sqrt{1+\beta}-1}{\sqrt{1+\alpha}-1}\cdot\frac{\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{1+\beta}}$$

для отображения $g_1\colon Q_\alpha \to Q_\beta$, имеющего постоянный якобиан. Если для этого отображения растяжения в любой точке $\lambda_1, \lambda_2 \geqslant 1$, то экстремальное отображение в классе $\mathfrak{M}$ имеет вид (4.4), а для любого f из этого класса

$$K_2(f) \geqslant \left[\left(\frac{\sqrt{1+\beta}-1}{\sqrt{1+\alpha}-1}\right)^2\cdot\frac{\ln\frac{b}{a}}{\ln\frac{b_2}{a_2}}\cdot\frac{1+\alpha}{1+\beta}\right]^{1/3}.$$

Отсюда с помощью дополнительных конформных отображений получается тот же результат для областей из примера 1 раздела 3.

4. M_1 и N_1 окружности радиуса 1, M_2 — круг радиуса $\frac{1}{2}\ln\frac{a+1}{a-1}$ на плоскости Лобачевского, N_2 — круг радиуса $\frac{1}{2}\ln\frac{b+1}{b-1}$ на плоскости Лобачевско-

го, причем $b \geqslant a$. Тогда для отображений из совокупности $\mathfrak{M}$, учитывая формулу для площади круга и теорему 4.1, получим

$$K_2(f) \geqslant \left[\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}} \cdot \frac{\sqrt{b^2-1}}{\sqrt{a^2-1}}\right]^{1/3}.$$

Структура экстремального отображения задается формулой (4.4), где g_1 — тождественное отображение единичной окружности на себя, а g_2 — отображение неевклидова круга M_2 на неевклидов круг N_2 с постоянным якобианом и растяжениями $\lambda_2, \lambda_3 \leqslant 1$. Нетрудно проверить, что такое отображение существует, так что приведенная оценка точная. Тот же результат с помощью дополнительных конформных отображений получается отсюда для тороидальных областей евклидова пространства R^3 (ср. результаты Геринга [3]).

Литература

[1] Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Наука, Москва 1966.
[2] F. W. Gehring and J. Väisälä, *The coefficients of quasiconformality of domains in space*, Acta Math. 114 (1965).
[3] Ф. В. Геринг, *Экстремальные отображения торов*, Сборн. *Некоторые проблемы математики и механики*, Наука, Москва 1970.
[4] H. Grötsch, *Über möglichst konforme Abbildungen von schlichten Bereichen*, Ber. Verh. sächs. Acad. Lpz. 84 (1932), 114–120.
[5] I. A. Clarkson, *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 40 (1936), 396–414.
[6] В. В. Кривов, *Об экстремальных квазиконформных отображениях в пространстве*, Докл. АН СССР 145 (3) (1962), 516–518.
[7] —, *Наилучшие экстремальные отображения в пространстве*, ibid. 155 (1) (1964), 38–40.
[8] —, *О структуре диффеоморфизмов с минимальной промежуточной дилатацией*, ibid. 226 (1) (1976), 40–43.
[9] C. Loewner, *On the conformal capacity in space*, J. Math. Mech. 8 (1959), 411–414.

Presented to the Semester
COMPLEX ANALYSIS
February 15–May 30, 1979

COMPLEX ANALYSIS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 11
PWN–POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

EINE EXTREMALCHARAKTERISIERUNG VON UNTERSCHALLGASSTRÖMUNGEN DURCH QUASIKONFORME ABBILDUNGEN

REINER KÜHNAU

Sektion Mathematik der Martin-Luther-Universität, Halle-Wittenberg
Universitätsplatz 6, 401 Halle an der Saale, DDR

1. Einleitung

Betrachtet werden in der x, y-Ebene stationäre, reibungs- und wirbelfreie Unterschallströmungen eines kompressiblen Gases ohne Zirkulation. Bekanntlich erfüllen dann das (eindeutige) Potential $u(x, y)$ und die (eindeutig vorausgesetzte) Stromfunktion $v(x, y)$ das System

(1) $$u_x = (\alpha/\varrho)v_y, \quad u_y = -(\alpha/\varrho)v_x.$$

Dabei bedeutet α eine vorgebbare positive Konstante, ϱ die örtliche Dichte. Es sei der Druck p eine reine Funktion von ϱ mit $dp/d\varrho = c^2 > 0$ (c = örtliche Schallgeschwindigkeit). $p(\varrho)$ sei analytisch (dies wird allerdings nur in § 2.b benötigt). Der Zusammenhang mit dem Geschwindigkeitsquadrat $V^2 = u_x^2+u_y^2$ sei wie üblich durch

(2) $$\tfrac{1}{2}dV^2 = -dp/\varrho \quad \text{(Bernoullische Gleichung)}$$

gegeben, so daß ϱ eine Funktion von V^2 wird. Wir setzen noch

(3) $$f = -(2/\alpha)(p+\tfrac{1}{2}\varrho V^2),$$

wodurch eine Funktion $f = f(\tau)$ mit $\tau = \alpha/\varrho$ definiert werde. Dabei ist bzw. sei für die τ eines gewissen Intervalles $\mathfrak{J}$

(4) $$f'(\tau) = (\varrho/\alpha)^2 V^2, \quad f''(\tau) = 2(\varrho/\alpha)^3(c^2-V^2) > 0,$$

d.h. im Unterschallbereich, auf den wir uns hier beschränken. Die komplexe Funktion $u+iv$ vermittelt eine quasikonforme Abbildung mit der Jacobischen Determinante

(5) $$J = (\varrho/\alpha)V^2$$

auf ein Parallelschlitzgebiet bei der Umströmung einer Kontur. Wir wollen diese Abbildung im folgenden im Anschluß an die Schlußbemerkung in [13] durch eine