PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 10
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

К ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ОДНОЙ И ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ

М. С. САЛАХИТДИНОВ

АН УзССР, Институт Математики, Ташкент, С.С.С.Р.

Теория уравнений смешанного типа является одним из важных разделов общей теории дифференциальных уравнений с частными производными. Она берет свое начало от работ Ф. Трикоми, опубликованных в двадцатых годах нашего столетия. Для уравнений Трикоми

$$yu_{xx}+u_{yy} = 0,$$

Лаврентьева–Бицадзе

$$u_{xx}+\operatorname{sgn} y u_{yy} = 0$$

и Геллерстедта

$$y^m u_{xx}+u_{yy} = 0$$

которые являются самыми простыми и типичными представителями уравнений смешанного типа, в математической литературе имеются многочисленные работы, в которых ставятся и исследуются различные краевые задачи. Основными задачами в теории таких уравнений являются задачи Трикоми, Геллерстедта, Франкля и общая смешанная задача [1].

Начиная с середины шестидесятых годов начаты исследования по теории краевых задач для уравнений смешанного типа с двумя параболическими линиями вырождения, т.е. с негладкой линией вырождения. В этом направлении значительные результаты для модельного уравнения с двумя параллельными линиями вырождения

$$y(y-1)u_{xx}+u_{yy} = 0$$

получены А. М. Нахушевым, а для модельных уравнений с двумя перпендикулярными линиями вырождения

$$u_{xx}+\operatorname{sgn}(xy)u_{yy} = 0, \quad yu_{xx}+xu_{yy} = 0$$

М. Зайнулабидовым.

Ниже нами будут сформулированы ряд задач для общих уравнений смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями вырождения [2], [3].

I

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv u_{xx}+\operatorname{sgn}(xy)u_{yy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y+c(x,y)u = 0. \tag{1}$$

Пусть Ω — конечная односвязная область плоскости переменных xy, ограниченная линией Жордана σ с концами в точках $A(1,0)$ и $B(0,1)$, которая расположена в области $x>0$, $y>0$ и характеристиками BC: $x-y=-1$, CD: $x+y=0$, AD: $x-y=1$ уравнения (1).

Ω_1, Ω_2 — гиперболические части смешанной области Ω при $x>0$ и $x<0$ соответственно, а Ω_3 — эллиптическая часть области Ω, $c(x,y)\leqslant 0$ в Ω_3.

Задача Γ_α. Требуется определить функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1. $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_i)\cap C^1(\Omega_1\cup OA,\ \Omega_2\cup OB,\ \Omega_3\cup OA\cup OB)$, причем частные производные u_x, u_y могут обращаться в бесконечность порядка ниже единицы в точках A, B и O.

2. $u(x,y)$ в Ω_1, Ω_2 является обобщенным, а в Ω_3 регулярным решением уравнения (1).

3. На отрезках OA и OB выполняются условия склеивания

$$\begin{aligned} u(x,+0) &= \alpha_1(x)u(x,-0)+\gamma_1(x), \qquad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ u_y(x,+0) &= \beta_1(x)u_y(x,-0)+\delta_1(x), \qquad 0<x<1,\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} u(+0,y) &= \alpha_2(y)u(-0,y)+\gamma_2(y), \qquad 0\leqslant y\leqslant 1,\\ u_x(+0,y) &= \beta_2(y)u_x(-0,y)+\delta_2(y), \qquad 0<y<1,\end{aligned} \tag{3}$$

где α_i, β_i, γ_i и δ_i — заданные функции, причем

$$\alpha_i(t)\in C^2\ (0\leqslant t\leqslant 1),\qquad \beta_i(t)\in C^{(0,n_i)}\ (0\leqslant t\leqslant 1),$$

$$\gamma_i(t)\in C\ (0\leqslant t\leqslant 1)\cap C^{(1,p_i)}\ (0<t<1),\qquad \delta_i(t)\in C^{(0,q_i)}\ (0<t<1),$$

$\gamma_i(t)$, $\delta_i(t)$ могут иметь особенность порядка меньше единицы при $t\to 0$, $t\to 1$; $\alpha_i(t)\neq 0$, $\beta_i(t)\neq 0$, $0\leqslant t\leqslant 1$.

4. $u(x,y)$ удовлетворяет условиям

$$u|_\sigma = \varphi(\zeta),\qquad \zeta\in\sigma, \tag{4}$$

$$u|_{OD} = \psi_1(t),\qquad u|_{OC} = \psi_2(t),\qquad 0\leqslant t\leqslant 1/2, \tag{5}$$

где $\varphi(\zeta)$ непрерывна в замкнутой области определения, а

$$\psi_i(t)\in C\ (0\leqslant t\leqslant 1/2)\cap C^{(2,r_i)}\ (0<t<1/2),$$

$$\psi_i'(t) = t^{-\delta_i}(\tfrac{1}{2}-t)^{-\varepsilon_i}O(1),\qquad 0<\delta_i,\ \varepsilon_i,\ r_i<1.$$

Для доказательства единственности решения задачи Γ_α будем предполагать, что

$$\alpha_i(t)\beta_i(t)>0,\qquad 0\leqslant t\leqslant 1, \tag{6}$$

в Ω_1 выполнены неравенства

$$\begin{gathered} a+b-2\alpha_1'/\alpha_1>0,\\ 4(c-\alpha_1''/\alpha_1+2\alpha_1'^2/\alpha_1^2-a\alpha_1'/\alpha_1)-(a-2\alpha_1'/\alpha_1)^2+\\ +b^2-2\frac{\partial}{\partial x}(a-2\alpha_1'/\alpha_1)-2a_y+2b_x-2b_y\leqslant 0,\\ c-\alpha_1''/\alpha_1-2\alpha_1'^2/\alpha_1^2-a\alpha_1'/\alpha_1\geqslant 0,\end{gathered} \tag{7}$$

а в Ω_2 выполнены неравенства

$$\begin{gathered} a+b+2\alpha_2'/\alpha_2<0,\\ 4(c+\alpha_2''/\alpha_2-2\alpha_2'^2/\alpha_2^2-b\alpha_2'/\alpha_2)+(b+2\alpha_2'/\alpha_2)^2-\\ -a^2-2\frac{\partial}{\partial y}(b+2\alpha_2'/\alpha_2)-2a_x-2a_y-2b_x\leqslant 0,\\ c+\alpha_2''/\alpha_2-2\alpha_2'^2/\alpha_2^2-b\alpha_2'/\alpha_2\geqslant 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Пусть $\gamma_i=\delta_i=0$. Имеет место следующий принцип экстремума: если выполнены условия (6), (7) и (8), то решение $u(x,y)$ задачи Γ_α при $\psi_i(t)=0$ положительный максимум и отрицательный минимум в $\overline{\Omega}$ достигает на σ.

В самом деле, введем функцию $v(x,y)=u(x,y)$ в Ω_3, $v(x,y)=\alpha_1(x)u(x,y)$ в Ω_1 и $v(x,y)=\alpha_2(y)u(x,y)$ в Ω_2.

Функция $v(x,y)$ в Ω_1 и Ω_2 является решением уравнения

$$v_{xx}-v_{yy}+a_i(x,y)v_x+b_i(x,y)v_y+c_i(x,y)v=0,\qquad i=1,2, \tag{9}$$

где коэффициенты a_i, b_i и c_i выражаются через a, b, c, α_1 и α_2, а в Ω_3 уравнения (1) и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} v(x,+0),&=v(x,-0),\qquad v_y(x,+0)=\frac{\beta_1(x)}{\alpha_1(x)}v_y(x,-0),\\ v(+0,y)&=v(-0,y),\qquad v_x(+0,y)=\frac{\beta_2(y)}{\alpha_2(y)}v_x(-0,y),\end{aligned} \tag{10}$$

$$v|_\sigma=\varphi(\zeta),\qquad v|_{OD}=\alpha_1(x)\psi_1(x),\qquad v|_{OC}=\alpha_2(y)\psi_2(y). \tag{11}$$

icm©

В силу условий (7) и (8) функция $v(x,y)$ при $\psi_i = 0$ положительный максимум (отрицательный минимум) в Ω_1 (Ω_2) достигает на отрезке OA (OB), причем в точке максимума

$$v_y(x,-0) \geqslant 0 \quad (v_x(-0,y) \geqslant 0) \quad [4].$$

Тогда из (10) в силу (6) имеем, что

$$v_y(x,+0) \geqslant 0 \quad (v_x(+0,y) \geqslant 0).$$

Последнее неравенство противоречит известному свойству решений эллиптических уравнений.

Существование решения задачи Γ_a нетрудно установить методом интегральных уравнений.

Следует отметить, что задача Γ_a при $a = b = c = 0$, $\alpha_i(t) = \beta_i(t) = 1$, $\gamma_i(t) = \delta_i(t) = 0$ была изучена в [5]. В задаче Γ_a в областях Ω_1 и Ω_2 в качестве носителей данных вместо характеристик OC и OD могут быть взяты характеристики BC и OD или OC и AD. И в этих случаях задача имеет единственное решение.

Условия (2) и (3) задачи Γ_a могут быть заменены более общими условиями, например

$$u(x,+0) = u(x,-0), \quad u(+0,y) = u(-0,y),$$

$$u_y(x,-0) = l_1 u_y(x,+0) + m_1(x) u(x,0) + n_1(x),$$

$$u_x(-0,y) = l_2 u_x(+0,y) + m_2(y) u(0,y) + n_2(y).$$

При $m_i(t) < 0$ имеет место вышеприведенный принцип экстремума и задача однозначно будет разрешима.

II

С конца шестидесятых годов появились новые корректно поставленные задачи в основу которых была положена работа А. В. Бицадзе и А. А. Самарского, в которой сформулирована новая задача для линейных эллиптических дифференциальных уравнений второго порядка. В случае двух независимых переменных задача ставилась следующим образом. Пусть D — область плоскости переменных x, y, ограниченная кусочно-гладкой кривой Жордана S; l — гладкая часть границы S, l_1 — принадлежащий области D образ l при диффеоморфном отображении T.

Задача. Найти функцию $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D)$, удовлетворяющую уравнению

$$\Delta u + a u_x + b u_y + c u = f$$

в области D и условиям

$$u|_{S-l} = \varphi, \quad u|_l = u|_{l_1}.$$

Эта задача вошла в математическую литературу под названием задачи Бицадзе–Самарского. При исследовании аналога задачи Бицадзе–Самарского для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического, эллиптико-параболического или гиперболо-параболического типа в смешанной области естественно ожидать, что корректность такой задачи будет зависеть от того к эллиптической, параболической или гиперболической части границы принадлежит кривая l и как расположена кривая l_1 в заданной области. Когда кривые l и l_1 принадлежат к области эллиптичности или параболичности смешанного уравнения, ряд краевых задач были сформулированы в работах [6], [7]. Приведем одну из задач такого типа.

Рассмотрим уравнение

$$\theta_0(x,y) u_{xx} + u_{yy} + a u_x + b u_y + c u = f(x,y), \tag{12}$$

где

$$\theta_0(x,y) = \begin{cases} \theta(y) & \text{если} \quad x \geqslant 0,\ y \leqslant 0; \\ 1 & \text{если} \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0; \\ 0 & \text{если} \quad x \leqslant 0,\ y \geqslant 0; \\ 1 & \text{если} \quad x \leqslant 0,\ y \leqslant 0; \end{cases}$$

$\theta(y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, причем $\theta(0) = 0$, $\theta(y) < 0$ при $y < 0$; $a(x,y) > 0$ при $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Пусть Ω_1 — область плоскости x и y, ограниченная отрезком I_1: $y = 0$, $0 < x < 1$ и характеристиками

$$\Gamma_1\colon\ x + \int_0^y \sqrt{-\theta(t)}\,dt = 0, \qquad \Gamma_2\colon\ x - \int_0^y \sqrt{-\theta(t)}\,dt = 1$$

уравнения (12); Ω_2 (Ω_3 и Ω_4) — прямоугольник $\{0 < x < 1,\ 0 < y < 1\}$ ($\{-1 < x < 0,\ 0 < y < 1\}$ и $\{-1 < x < 0,\ -1 < y < 0\}$)

$$\Omega = \Omega_1 \cup I_1 \cup \Omega_2 \cup I_2 \cup \Omega_3 \cup I_3 \cup \Omega_4,$$

где $I_2(I_3)$ — интервал $0 < y < 1$ $(-1 < x < 0)$ прямой $x = 0$ $(y = 0)$.

Задача С. Найти функцию $u(x,y)$, обладающую следующими свойствами

1. $u(x,y) \in C(\bar{\Omega}_i) \cap C^1(\Omega_1 \cup I_1,\ \Omega_2 \cup I_1 \cup I_2,\ \Omega_3 \cup I_2 \cup I_3,\ \Omega_4 \cup I_3)$, $i = 1, 2, 3, 4$.

2. Частные производные u_x, u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы в точках $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$, $(0,0)$.

3. $u(x, y)$ является решением уравнения (12) в области Ω при $x \neq 0$, $y \neq 0$.

4. На отрезках I_j выполняются условия склеивания

$$(13)\quad \begin{aligned} u(x, +0) &= \alpha_1(x) u(x, -0) + \gamma_1(x), && 0 \leqslant x \leqslant 1,\\ u_y(x, +0) &= \beta_1(x) u_y(x, -0) + \delta_1(x), && 0 < x < 1; \end{aligned}$$

$$(14)\quad \begin{aligned} u(+0, y) &= \alpha_2(y) u(-0, y) + \gamma_2(y), && 0 \leqslant y \leqslant 1,\\ u_x(+0, y) &= \beta_2(y) u_x(-0, y) + \delta_2(y), && 0 < y < 1; \end{aligned}$$

$$(15)\quad \begin{aligned} u(x, +0) &= \alpha_3(x) u(x, -0) + \gamma_3(x), && -1 \leqslant x \leqslant 0,\\ u_y(x, +0) &= \beta_3(x) u_y(x, -0) + \delta_3(x), && -1 < x \leqslant 0, \end{aligned}$$

где α_i, β_i, γ_i, δ_i — заданные функции.

5. $u(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$(16)\quad u|_{\Gamma_1} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1/2,$$

$$(17)\quad \begin{gathered} u(1, y) = g_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,\\ u(-1, y) = g_2(y), \quad u(0, y) = g_3(y), \quad -1 \leqslant y \leqslant 0, \end{gathered}$$

$$(18)\quad u(x, 1) = u(x, l_1), \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \ 0 \leqslant l_1 < 1,$$

$$(19)\quad u(x, -1) = u(x, l_2), \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \ -1 < l_2 \leqslant 0.$$

В предположении, что коэффициенты уравнения (12) и заданные функции, входящие в условия склеивания (13)–(15) удовлетворяют условиям типа (7), (8), легко устанавливается принцип экстремума, аналогичный выше приведенного. Следовательно, задача C имеет единственное решение.

Доказательство существования решения задачи C можно проводить методом интегральных уравнений, предварительно исследовав ряд вспомогательных граничных задач в областях Ω_i, $i = 1, 2, 3, 4$.

Заметим, что в задаче C вместо условия (16) могут быть заданы значения искомого решения на кусках характеристик различного семейства, выходящих из произвольной точки $(x_0, 0)$ кроме того, третье из условий (17) может быть заменено условием

$$u_x(0, y) = g_3(y), \quad -1 \leqslant y \leqslant 0.$$

III

Как было отмечено выше корректность задач типа задачи Бицадзе–Самарского для уравнений смешанного типа существенно зависит от того, в какой части области расположены кривые l и l_1. Задача C и некоторые ее обобщения показывают, что в случае, когда l и l_1 принадлежит к области эллиптичности и параболичности рассматриваемого уравнения эти задачи являются корректно поставленными. Когда кривые l и l_1 принадлежат к области гиперболичности картина существенно меняется. Рассмотрим уравнение

$$(20)\quad \operatorname{sgn} y\, |y|^m u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad m = \mathrm{const} \geqslant 0,$$

в конечной односвязной области Ω, ограниченной кусочно-гладкой кривой σ, расположенной в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ и характеристиками AC, BC уравнения (20).

Пусть I — интервал $-1 < x < 1$ прямой $y = 0$, а $\theta(x)$ — аффикс точки пересечения характеристики уравнения (20), выходящей из точки $x \in I$ с характеристикой AC.

Задача I [8]. Найти в области Ω регулярное $u(x, y)$ решение уравнения (20), удовлетворяющее условиям

$$u(z) = \varphi(z), \quad \forall z \in \sigma,$$

$$(21)\quad u[\theta(x)] = a(x) u(x, 0) + b(x), \quad \forall x \in I,$$

a, b, φ — известные функции.

Для задачи I при $b = 0$ и в предположении

$$a(x) \leqslant 0, \quad a'(x) \leqslant 0, \quad \forall x \in I$$

имеет место принцип экстремума А. В. Бицадзе, из которого сразу следует единственность решения задачи. Вопрос существования решения задачи I при $m = 1$ редуцируется к интегральному уравнению Фредгольма третьего рода

$$(22)\quad (1+x)^{p+2/3} \nu(x) + \int_{-1}^{1} \frac{K(x, t)}{|x-t|^{1/2}} \nu(t)\, dt = f(x)$$

где $\nu(x) = \lim\limits_{y \to 0} u_y(x, y)$, а $K(x, t) \in C(\bar{I} \times \bar{I})$ и $f(x) \in C(\bar{I})$ — известные функции. В уравнении (22) наряду с неподвижной особенностью, присутствует подвижная особенность, причем сумма порядков особенностей, вообще говоря, больше единицы. Такой же результат получается и при любом m. Следовательно, задача I в приведенной выше постановке, в целом не является корректной.

При $m = 0$ задача I оказывается однозначно разрешима.

icm©

Обозначим теперь через $D^l_{px}f$, $D^l_{xq}f$ операторы дробного интегрирования порядка l при $l<0$ и обобщенные производные в смысле Лиувилля порядка l при $l>0$, т.е.

$$D^l_{px}f=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-l)}\displaystyle\int_p^x\frac{f(t)}{(x-t)^{1+l}}\,dt, & l<0,\\ \dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}D^{l-(n+1)}_{px}f, & l>0;\end{cases}$$

$$D^l_{xq}f=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-l)}\displaystyle\int_x^q\frac{f(t)}{(t-x)^{1+l}}\,dt, & l<0,\\ -\dfrac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}D^{l-(n+1)}_{xq}f, & l>0,\end{cases}$$

где n — целая часть $l\geqslant n$.

Если в задаче I вместо условия (21) задавать условия вида

$$D^\beta_{-1x}x^{2\beta-1}u[\theta(x)]=a(x)u(x,0)+b(x),\qquad \forall x\in I, \tag{23}$$

где $\beta=m/2(m+2)$, то задача I однозначно разрешима [9]. Вместо условия (23) можно задавать условие

$$D^{1-\beta}_{-1x}u[\theta(x)]=a(x)u_y(x,0)+b(x).$$

И в этом случае задача будет корректно поставленной.

Известно, что в постановке задачи Трикоми характеристики как носители данных являются неравноправными. В начале 60-х годов А. В. Бицадзе был поставлен вопрос о том, что найти такие постановки задач в которых характеристики были равноправными. Ряд задач такого типа для модельных гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа сформулированы и исследованы в работах [10], [11] [12]. Такие задачи получили название задачи со смещением.

Рассмотрим одну из таких задач для уравнения (20). Обозначим через Ω_1 и Ω_2 части смешанной области Ω, в которых соответственно $y>0$, $y<0$. Возьмем произвольную точку $P(x_0,0)$ интервала I. Под PC_1 и PC_2 будем понимать характеристики

$$x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=x_0,\qquad x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}=x_0$$

уравнения (20), соединяющие точку $P(x_0,0)$ с точками

$$C_1\left\{\frac{x_0-1}{2},\ -\left[\frac{m+2}{4}(1+x_0)\right]^{2/(m+2)}\right\},$$

$$C_2\left\{\frac{x_0+1}{2},\ -\left[\frac{m+2}{4}(1-x_0)\right]^{2/(m+2)}\right\}.$$

Обозначим через Ω^* область, ограниченную контуром $PC_2B\sigma AC_1P$, через Ω_{21} и Ω_{22} — части области Ω_2 с границами AC_1PA и PC_2BP, $\theta_0(x)$, $\theta_0^*(x)$ — точки пересечения характеристик уравнения (20), выходящих из точки x $(-1\leqslant x\leqslant x_0)$ с характеристиками AC_1, PC_1, а $\theta_1^*(x)$, $\theta_1(x)$ с характеристиками PC_2, BC_2 при $x_0\leqslant x\leqslant 1$.

Задача P. Требуется найти в области Ω^* регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (20), удовлетворяющее краевым условиям

$$a(x,y)\frac{\partial u}{\partial N}+b(x,y)u=f(x,y),\qquad (x,y)\in\sigma, \tag{24}$$

$$\begin{aligned}a_i(x)D^\beta_{px}(x-p)^{2\beta-1}u[\theta_p(x)]+b_i(x)D^\beta_{xq}(q-x)^{2\beta-1}u[\theta_q(x)]={}\\ =c_i(x)\tau(x)+d_i(x)\nu(x)+e_i(x),\qquad p\leqslant x\leqslant q,\ i=1,2,\end{aligned} \tag{25}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial N}=y^m\frac{dy}{dS}\frac{\partial}{\partial x}-\frac{dx}{dS}\frac{\partial}{\partial y},$$

$$a^2+b^2\neq 0,\qquad a_i^2+b_i^2+d_i^2+c_i^2\neq 0,$$

$$\theta_p(x)=\begin{cases}\theta_0(x) & \text{при}\quad p=-1,\\ \theta_1^*(x) & \text{при}\quad p=x_0;\end{cases}\qquad \theta_q(x)=\begin{cases}\theta_0^*(x) & \text{при}\quad q=x_0,\\ \theta_1(x) & \text{при}\quad q=1;\end{cases}$$

$$p=\begin{cases}-1 & \text{при}\quad i=1,\\ x_0 & \text{при}\quad i=2;\end{cases}\qquad q=\begin{cases}x_0 & \text{при}\quad i=1,\\ 1 & \text{при}\quad i=2.\end{cases}$$

Единственность решения задачи P. Нетрудно установить справедливость следующих тождеств

$$D^\beta_{px}(x-p)^{2\beta-1}D^{\beta-1}_{px}(x-p)^{-\beta}\mu(x)=(x-p)^{\beta-1}D^{2\beta-1}_{px}\mu(x),$$

$$D^\beta_{xq}(q-x)^{2\beta-1}D^{\beta-1}_{xq}(q-x)^{-\beta}\mu(x)=(q-x)^{\beta-1}D^{2\beta-1}_{xq}\mu(x).$$

На основании этих тождеств и формулы Дарбу [1], которая дает решение задачи Коши для уравнения (20)

$$u(\xi,\eta)=\gamma_1\int_\xi^\eta\tau(t)\frac{(\eta-\xi)^{1-2\beta}}{[(\eta-t)(t-\xi)]^{1-\beta}}\,dt-\gamma_2\int_\xi^\eta\frac{\nu(t)}{[(\eta-t)(t-\xi)]^\beta}\,dt,$$

где

$$\gamma_1=\frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)},\qquad \gamma_2=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma(1-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)},$$

$$\xi=x-\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2},\qquad \eta=x+\frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2},$$

$$\tau(x)=u(x,0),\qquad \nu(x)=u_y(x,0),$$

находим

$$
(26)\quad \begin{aligned}
u[\theta_{px}(x)] &= \gamma_1 \Gamma(\beta)(x-p)^{1-2\beta} D_{px}^{-\beta}(x-p)^{\beta-1}\tau(x) - \\
&\quad - \gamma_2 \Gamma(1-\beta) D_{px}^{\beta-1}(x-p)^{-\beta}\nu(x), \\
u[\theta_{qx}(x)] &= \gamma_1 \Gamma(\beta)(q-x)^{1-2\beta} D_{xq}^{-\beta}(q-x)^{\beta-1}\tau(x) - \\
&\quad - \gamma_2 \Gamma(1-\beta) D_{xq}^{\beta-1}(q-x)^{-\beta}\nu(x).
\end{aligned}
$$

Подставляя (26) в условия (25) имеем

$$
(27)\quad \begin{aligned}
\tau(x) &= B_1(x) D_{px}^{2\beta-1}\nu(x) + B_2(x) D_{qx}^{2\beta-1}\nu(x) + \\
&\quad + B_3(x)\nu(x) + B_4(x) e_i(x),
\end{aligned}
$$

где

$$
B_1(x) = \frac{\gamma_2 \Gamma(1-\beta) a_i(x)(q-x)^{1-\beta}}{\gamma_1 \Gamma(\beta) A_i(x)}, \qquad B_2(x) = \frac{\gamma_2 \Gamma(1-\beta) b_i(x)(x-p)^{1-\beta}}{\gamma_1 \Gamma(\beta) A_i(x)},
$$

$$
B_3(x) = \frac{d_i(x)[(x-p)(q-x)]^{1-\beta}}{\gamma_1 \Gamma(\beta) A_i(x)}, \qquad B_4(x) = \frac{[(x-p)(q-x)]^{1-\beta}}{\gamma_1 \Gamma(\beta) A_i(x)},
$$

$$
A_i(x) = a_i(x)(q-x)^{1-\beta} + b_i(x)(x-p)^{1-\beta} - \frac{1}{\gamma_1 \Gamma(\beta)} c_i(x)(x-p)^{1-\beta}(q-x)^{1-\beta}.
$$

В дальнейшем для определенности будем считать, что функция $b(x, y)$ входящая в условие (24) не обращается в нуль ни в одной точке кривой σ.

Теорема. *Если выполнены условия*

$$
A_i(x) \neq 0, \quad \left[\frac{a_i(x)(q-x)^{1-\beta}}{A_i(x)}\right]' \leqslant 0, \quad \left[\frac{b_i(x)(x-p)^{1-\beta}}{A_i(x)}\right]' \geqslant 0,
$$

$$
ab \geqslant 0, \quad d_i(x) A_i(x) \geqslant 0,
$$

то в области Ω^* задача P *не может иметь более одного регулярного решения.*

Доказательство. Предварительно покажем, что

$$
(28)\qquad I = \int_p^q \tau(x)\nu(x)\,dx \geqslant 0.
$$

При $e_i(x) = 0$ значение $\tau(x)$ из (27) подставляем в интеграл I

$$
\begin{aligned}
I = \frac{1}{\Gamma(1-2\beta)} \Bigg[\int_p^q B_1(x)\nu(x)\,dx \int_p^x \frac{\nu(t)}{(x-t)^{2\beta}}\,dt + \\
+ \int_p^q B_2(x)\nu(x)\,dx \int_x^q \frac{\nu(t)}{(t-x)^{2\beta}}\,dt \Bigg] + \int_p^q B_3(x)\nu^2(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Пользуясь известной формулой

$$
\int_0^\infty y^{\mu-1}\cos ky\,dy = \frac{\Gamma(\mu)}{k^\mu}\cos\frac{\mu\pi}{2} \qquad (k > 0,\ 0 < \mu < 1)
$$

и полагая в ней $k = |x-t|$, $\mu = 2\beta$ получим

$$
\frac{1}{|x-t|^{2\beta}} = \frac{1}{\Gamma(2\beta)\cos\pi\beta} \int_0^\infty y^{2\beta-1}\cos y|x-t|\,dy.
$$

В силу этого равенства, в результате несложных преобразований интеграл I представим в виде

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{\sin\pi\beta} I = \int_0^\infty y^{2\beta-1} \Bigg\{ \int_p^q B_2'(x) \Bigg[\Bigg(\int_x^q \nu(t)\cos yt\,dt \Bigg)^2 + \\
+ \Bigg(\int_x^q \nu(t)\sin yt\,dt \Bigg)^2 \Bigg] dx - \int_p^q B_1'(x) \Bigg[\Bigg(\int_p^x \nu(t)\cos yt\,dt \Bigg)^2 + \\
+ \Bigg(\int_p^x \nu(t)\sin yt\,dt \Bigg)^2 \Bigg] dx \Bigg\} dy + \int_p^q B_3(x)\nu^2(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Учитывая условия теоремы сразу заключаем, что $I \geqslant 0$.

В области Ω_1 имеет место равенство

$$
\int_{\Omega_1} (y^m u_x^2 + u_y^2)\,dx\,dy - \int_\sigma u\frac{\partial u}{\partial N}\,ds + \int_{-1}^1 \tau(x)\nu(x)\,dx = 0.
$$

Из этого равенства при $f = 0$ в силу условия $ab \geqslant 0$ и неравенства (28) получим, что $u(x, y) = \text{const}$ в области Ω_1. В силу условия (25), в случае $e_i(x) = 0$, заключаем, что $\text{const} \equiv 0$, т.е. $u(x, y) \equiv 0$ в Ω_1. Формула Дарбу показывает, что $u(x, y)$ равна нулю также в Ω_2.

Существование решения задачи P можно проводить методом интегральных уравнений [13].

Пусть кривая σ совпадает с нормальной кривой

$$
\sigma_0:\ x^2 + \frac{4}{(m+2)^2} y^{m+2} = 1
$$

а точка $P(x_0, 0)$ с началом координат $O(0, 0)$. Для простоты положим

$$
f(x, y) = 0, \qquad a(x, y) = 0.
$$

В области Ω_1 решая задачу N для уравнения (20) с краевыми условиями

$$u|_\sigma = 0, \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_y = \nu(x)$$

получим соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$

(29) $$\tau(x) = -k_1 \int_{-1}^{1} \nu(t)[|x-t|^{-2\beta} - (1-xt)^{-2\beta}]dt,$$

где

$$k_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{2\beta}\frac{\Gamma^2(\beta)}{\Gamma(2\beta)}.$$

Исключая функцию $\tau(x)$ из соотношений (27) и (29) для определения неизвестной функции $\nu(x)$ получим сингулярное интегральное уравнение нормального типа для которого существует регуляризатор, приводяшего его к интегральному уравнению Фредгольма второго рода. Из возможности приведения задачи к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма второго рода и единственности решения задачи следует существование решения исследуемой задачи. Задача типа P также будет однозначно разрешима для уравнения смешанного типа с негладкой линией параболического вырождения

(30) $$|y|^\varkappa u_{xx} + \operatorname{sgn}(xy)|x|^\varkappa u_{yy} = 0, \qquad \varkappa > 0$$

в области Ω, ограниченной гладкой кривой σ с концами в точках $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, расположенной в первом квадранте $x > 0$, $y > 0$, и характеристиками

$$BC\colon (-x)^p + y^p = 1, \qquad CD\colon x+y = 0, \qquad AD\colon x^p + (-y)^p = 1$$

уравнения (30), где $2p = \varkappa + 2$.

Только в этом случае условия типа (25) следует задавать в каждой гиперболической части смешанной области Ω [14].

Литература

[1] А. В. Бицадзе, *Уравнения смешанного типа*, Изд. АН СССР, Москва 1959.
[2] Б. Т. Монов, Доклады Болг. АН 23 (1970).
[3] М. С. Салахитдинов, Ю. У. Ташмирзаев, Сб. *Дифференциальные уравнения с частными производными и их приложения*, Изд-во „Фан" УзССР, Ташкент 1977.
[4] S. Agmon, L. Nirenberg, M. Protter, Commun. Pure and Appl. Math. 6 (1953).
[5] М. М. Зайнулабидов, Дифференциальные уравнения 5 (1969).
[6] М. С. Салахитдинов, А. Толипов, Дифференциальные уравнения 8 (1972).

[7] М. С. Салахитдинов, А. Толипов, Дифференциальные уравнения 9 (1973).
[8] М. Х. Абрегов, Дифференциальные уравнения 9 (1973).
[9] —, Дифференциальные уравнения 10 (1974).
[10] А. М. Нахушев, Дифференциальные уравнения 5 (1969).
[11] А. В. Бицадзе, *Механика сплошной среды и некоторые родственные проблемы анализа (к 80-летию И. И. Мусхелишвили)*, Москва 1972.
[12] С. Х. Кумыкова, Дифференциальные уравнения 10 (1974).
[13] М. С. Салахитдинов, А. Хасанов, *О некоторых краевых задачах со смещением для одного класса уравнений смешанного типа*, Известия АН УзССР, серия физ.-мат. наук, 5 (1977).
[14] М. С. Салахитдинов, Б. Менгзияев, Дифференциальные уравнения 13 (1977).

Presented to the Semester
Partial Differential Equations
September 11–December 16, 1978