[8] M. A. Krasnoselskij, J. V. Rutickij, *Convex functions and Orlicz spaces*, Fyzmatgiz, Moscow.
[9] K. Kačur, *On existence of the weak solution for nonlinear partial differential equations of elliptic type*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 11, 1 (1970), 137–181.

Presented to the Semester
Partial Differential Equations
September 11–December 16, 1978

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 10
PWN – POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

Г. Д. КАРАТОПРАКЛИЕВ

Институт Математики Болгарской Академии Наук, София, Болгария

1

Пусть D — ограниченная область пространства E_{m-1}, $m \geqslant 2$, точек $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})$ с кусочно-гладкой границей ∂D. Обозначим $G = \{x = (x', x_m) \in E_m;\ x' \in D,\ \varphi_2(x') < x_m < \varphi_1(x')\}$, где $\varphi_i(x') \in C^2(\bar{D})$, $i = 1, 2$; Γ_i: $x_m = \varphi_i(x')$, $i = 1, 2$, $x' \in \bar{D}$; Γ_3 — боковая поверхность G (Γ_3 или некоторая ее часть может отсутствовать); $n = (n_1, n_2, \ldots, n_m)$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial G = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$. Будем предполагать, что $n_m > 0$ на Γ_1 и $n_m < 0$ на Γ_2.

Рассмотрим в области G уравнение

$$Lu \equiv a^{ij}(x)u_{x_ix_j} + k(x)u_{x_mx_m} + b^i(x)u_{x_i} + b^m(x)u_{x_m} + c(x)u = f(x), \tag{1}$$

где $a^{ij}(x) \in C^2(\bar{G})$, $a^{ij} = a^{ji}$, $a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda \sum_{i=1}^{m-1} \xi_i^2$ в $\bar{G}$, для любого вектора $(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$, $\lambda = \mathrm{const} > 0$; $k(x) \in C^2(\bar{G})$; $b_i(x) \in C^1(\bar{G})$, $i = 1, \ldots, m$; $c(x) \in C(\bar{G})$, $c_{x_m}(x) \in C(\bar{G})$ (по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до $m-1$). Будем предполагать, что $H = a^{ij}n_in_j + kn_m^2 = 0$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Уравнение (1) эллиптико-параболическое при $k(x) \geqslant 0$ в $\bar{G}$ и гиперболо-параболическое при $k(x) \leqslant 0$ в $\bar{G}$. Если функция $k(x)$ меняет знак в области $\bar{G}$, то уравнение (1) является уравнением смешанного типа.

Краевые задачи для некоторых уравнений смешанного типа вида (1) рассматривались в работах А. В. Бицадзе [1], [2], Г. Д. Каратопраклиева [3]–[6], Н. Г. Сорокиной [7], [8], В. Н. Врагова [9], [10], Г. Д. Дачева [11], [12] и других авторов.

В настоящей статье рассматриваются две краевые задачи для уравнения (1).

Задача 1. *Найти решение уравнения* (1) *в* G, *удовлетворяющее граничному условию*

(2) $$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_1 \cup \Gamma_3.$$

Обозначим через L^* оператор сопряженный к L

$$L^*v \equiv a^{ij}(x)v_{x_ix_j} + k(x)v_{x_mx_m} + b^{*i}(x)v_{x_i} + b^{*m}(x)v_{x_m} + c^*(x)v,$$

где $b^{*i} = 2a^{ij}_{x_j} - b^i$, $b^{*m} = 2k_{x_m} - b^m$, $c^* = c - b^i_{x_i} - b^m_{x_m} + a^{ij}_{x_ix_j} + k_{x_mx_m}$.

Сопряженная задача к задаче 1 имеет вид

(3) $$L^*v = g \quad \text{в } G,$$

(4) $$v = 0 \quad \text{на } \Gamma_2 \cup \Gamma_3.$$

Введем следующие обозначения: $\tilde{C}^2$ и $\tilde{C}^2_*$ — множества всех дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{G}$ функций, удовлетворяющих соответственно граничным условиям (2) и (4); $\tilde{W}^i_2$ и $\tilde{W}^i_{2,*}$ — замыкание соответственно $\tilde{C}^2$ и $\tilde{C}^2_*$ по норме пространства Соболева $W^i_2(G)$, $i = 1, 2$; $\tilde{W}^{-1}_2$ и $\tilde{W}^{-1}_{2,*}$ — негативные пространства, сопряженные пространствам $\tilde{W}^1_2$ и $\tilde{W}^1_{2,*}$ соответственно; $\|\cdot\|_l$ — норма в пространстве $W^i_2(G)$, $i = 1, 2$; $(\cdot,\cdot)_0$ и $\|\cdot\|_0$ — скалярное произведение и норма в пространстве $L_2(G)$. Пусть $f \in L_2(G)$.

Обобщенным решением задачи 1 будем называть функцию $u \in \tilde{W}^1_2$, удовлетворяющую интегральному тождеству

(5) $$F(u, v) = (f, v)_0, \quad \forall v \in \tilde{W}^1_{2,*},$$

где

$$F(u, v) = \int_G [-a^{ij}u_{x_i}v_{x_i} - ku_{x_m}v_{x_m} + (b^i - a^{ij}_{x_j})u_{x_i}v + (b^m - k_{x_m})u_{x_m}v + cuv]\,dx.$$

Теорема 1. *Если* $2b^m - k_{x_m} > 0$, $c \leqslant 0$, $c_{x_m} \leqslant 0$ *в* $\bar{G}$ *и* $|a^{ij}_{x_m}|$, $|a^{ij}_{x_j}|$, $|b^i|$ $i, j = 1, \ldots, m-1$, *достаточно малы в* $\bar{G}$, *то существует обобщенное решение задачи* 1 *для любой функции* $f \in L_2(G)$.

Доказательство. Достаточно показать, что имеет место неравенство

(6) $$\|L^*v\|_{\tilde{W}^{-1}_2} \geqslant C\|v\|_0, \quad \forall v \in \tilde{W}^2_{2,*}.$$

Отсюда, как известно [13], следует, что существует такая функция $u \in \tilde{W}^1_2$, что

$$(u, L^*v)_0 = (f, v)_0, \quad \forall v \in \tilde{W}^2_{2,*}.$$

Интегрируя по частям, получаем (5).

Докажем справедливость (6). Пусть $u \in \tilde{C}^2$ и $p(x_m)$ — пока произвольная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[h_1, h_2]$ ($h_1 = \inf_{x\in G} x_m$, $h_2 = \sup_{x\in G} x_m$) функция. Интегрируя по частям получаем

(7) $$2\int_G pu_{x_m}Lu\,dx = -\int_G (pc)_{x_m}u^2\,dx + \int_G A(u_x)\,dx + \int_{\partial G} pcn_m u^2\,ds + \int_{\partial G} B(u_x)\,ds,$$

где $u_x = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_m})$,

$$A(u_x) = (pa^{ii})_{x_m}u^2_{x_i} + [p(2b^m - k_{x_m}) - p'k]u^2_{x_m} + \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m-1}(pa^{ij})_{x_m}u_{x_i}u_{x_j} + 2p(b^i - a^{ij}_{x_j})u_{x_i x_m},$$

$$B(u_x) = -pa^{ii}n_m u^2_{x_i} + pkn_m u^2_{x_m} - p\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m-1}a^{ij}n_m u_{x_i}u_{x_j} + 2pa^{ij}n_i u_{x_j}u_{x_m}.$$

Функцию $p(x_m)$ можно выбрать так, что квадратичная форма $A(u_x)$ будет положительно определена в $\bar{G}$. Действительно, обозначим через A_ν, $\nu = 1, \ldots, m-1$, последовательные главные миноры матрицы $\|a^{ij}\|$ и рассмотрим последовательные главные миноры D_ν, $\nu = 1, \ldots, m$, матрицы квадратичной формы $A(u_x)$. Имеем

$$D_\nu = (p')^\nu A_\nu - \sum_{i=1}^{\nu}(p')^{\nu-i}F_{i\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, m-1,$$

где $F_{i\nu}$ — сумма членов, каждый из которых содержит некоторое $a^{ij}_{x_m}$, $i, j = 1, \ldots, m-1$. Выберем $p = \alpha x_m + \beta$, где $\alpha > 0$ — фиксированная постоянная, а $\beta > 0$ — столь большая постоянная, что $p > 0$ в $[h_1, h_2]$ и $2pb^m - (pk)_{x_m} = p(2b^m - k_{x_m}) - \alpha k \geqslant \delta = \text{const} > 0$ в $\bar{G}$. Принимая во внимание, что $A_\nu \geqslant a_\nu = \text{const} > 0$ в $\bar{G}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, заключаем, что $D_\nu \geqslant d_\nu = \text{const} > 0$ в $\bar{G}$, $\nu = 1, \ldots, m-1$, если $|a^{ij}_{x_m}|$ — достаточно малы в $\bar{G}$. D_m можно записать в виде

$$D_m = [p(2b^m - k_{x_m}) - \alpha k]D_{m-1} - pa^{ij}_{x_j}Q_i(x) - pb^iR_i(x),$$

где $Q_i(x)$ и $R_i(x)$ — ограниченные в $\bar{G}$ функции. Если $|a^{ij}_{x_j}|$ и $|b^i|$ ($i, j = 1, \ldots, m-1$) — достаточно малы в $\bar{G}$, то $D_m \geqslant d_m > 0$ в $\bar{G}$. Из $D_\nu \geqslant d_\nu > 0$, $\nu = 1, \ldots, m$, в $\bar{G}$, вытекает, что квадратичная форма $A(u_x)$ положительно определена в $\bar{G}$.

Квадратичную форму $B(u_x)$ можно записать в виде

$$B(u_x) = \begin{cases} -\dfrac{p}{n_m}[a^{ij}(n_i u_{x_m} - n_m u_{x_i})(n_j u_{x_m} - n_m u_{x_j}) - H u_{x_m}^2], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } n_m \neq 0, \\ \dfrac{p}{2}[(u_{x_m} + a^{ij} n_i u_{x_j})^2 - (u_{x_m} - a^{ij} n_i u_{x_j})^2], \qquad \text{при } n_m = 0, \end{cases}$$

где $H = a^{ij} n_i n_j + k n_m^2$. Отсюда следует, что $B(u_x) = 0$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$ и $B(u_x) \geqslant 0$ на Γ_2. Тогда из (7) получаем

$$\int_G p u_{x_m} Lu\, dx \geqslant C_3 \int_G \sum_{i=1}^{m} u_{x_i}^2\, dx.$$

Отсюда следует

(8) $$\int_G p u_{x_m} Lu\, dx \geqslant C_2 \|u\|_1^2, \qquad \forall u \in \tilde{C}^2,$$

так как нормы $(\int_G \sum_{i=1}^{m} u_{x_i}^2\, dx)^{1/2}$ и $\|\cdot\|_1$ эквивалентны.

Пусть $v \in \tilde{C}_*^2$. Рассмотрим задачу

$$p u_{x_m} = v \quad \text{в } G, \qquad u = 0 \quad \text{на } \Gamma_1.$$

Очевидно, эта задача имеет единственное решение $\hat{u} \in \tilde{C}^2$, которое дается формулой

$$\hat{u} = \int_{\varphi_1(x')}^{x_m} \frac{v(x', t)}{p(t)}\, dt.$$

Из (8) получаем

$$\|L^* v\|_{\tilde{W}_2^{-1}} \|\hat{u}\|_1 \geqslant (L^* v, \hat{u})_0 = (v, L\hat{u})_0 = (p\hat{u}_{x_m}, L\hat{u})_0 \geqslant C_2 \|\hat{u}\|_1^2.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $\|\hat{u}\|_1 \geqslant C_1 \|v\|_0$ получаем

$$\|L^* v\|_{\tilde{W}_2^{-1}} \geqslant C \|v\|_0, \qquad \forall v \in \tilde{C}_*^2.$$

Путем пополнения убеждаемся в справедливости этого неравенства для $v \in \tilde{W}_{2,*}^2$.

Отметим, что неравенство типа (6) получено в работе В. П. Диденко [14] для задачи Трикоми.

Теорема 2. *Пусть* $2b^m - 3k_{x_m} > 0$, $c^* \leqslant 0$, $c_{x_m}^* \geqslant 0$ *в* $\bar{G}$ *и* $|a_{x_m}^{ij}|$, $|a_{x_j}^{ij}|$, $|b^i|$, $i, j = 1, \ldots, m-1$, *достаточно малы в* $\bar{G}$. *Тогда задача* 1 *может иметь не более одного обобщенного решения.*

Доказательство. Пусть $v \in \tilde{C}_*^2$ и $q(x_m) \in C^1[h_1, h_2]$ — пока произвольная функция. Заменяя в формуле (7) b^i и c на b^{*i} и c^* и принимая во внимание, что $b^{*i} - a_{x_j}^{ij} = -(b^i - a_{x_j}^{ij})$ получаем

(9) $$2\int_G q v_{x_m} L^* v\, dx = -\int_G (qc^*)_{x_m} v^2\, dx + \int_G A^*(v_x)\, dx + \int_{\partial G} qc^* n_m v^2\, ds + \int_{\partial G} B(v_x)\, ds,$$

где

$$A^*(v_x) = (qa^{ii})_{x_m} v_{x_i}^2 - [q(2b^m - 3k_{x_m}) + q'k] v_{x_m}^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m-1} (qa^{ij})_{x_m} v_{x_i} v_{x_j} - 2q(b^i - a_{x_j}^{ij}) v_{x_i} v_{x_m}.$$

Выбираем $q = \alpha x_m - \gamma$, где $\alpha > 0$ это фиксированна постоянная, а $\gamma > 0$ столь большая постоянная, что $q < 0$ в $[h_1, h_2]$ и $q(2b^m - 3k_{x_m}) + \alpha k \leqslant -\delta_1 = \mathrm{const} < 0$ в $\bar{G}$. Тогда, также как и выше, из (9) получаем неравенство

(10) $$\|Lu\|_{\tilde{W}_{2,*}^{-1}} \geqslant C \|u\|_0, \qquad \forall u \in \tilde{W}_2^2.$$

Из этого неравенства вытекает единственность обобщенного решения. Действительно, оператор L ограничен из $\tilde{C}^2 \subset \tilde{W}_2^1$ в $\tilde{W}_{2,*}^{-1}$

$$\|Lu\|_{\tilde{W}_{2,*}^{-1}} = \sup_{\substack{v \in W_{2,*}^1 \\ v \neq 0}} \frac{|(Lu, v)_0|}{\|v\|_1} = \sup_{\substack{v \in W_{2,*}^1 \\ v \neq 0}} \frac{|F(u, v)|}{\|v\|_1} \leqslant C_4 \|u\|_1, \qquad \forall u \in \tilde{C}^2,$$

где постоянная C_4 не зависит от функции $u(x)$. Пусть u_0 — обобщенное решение задачи 1. Существует последовательность функций $u_n \in \tilde{C}^2$ таких, что $\|u_n - u_0\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Из $\|Lu_n - Lu_m\|_{\tilde{W}_{2,*}^{-1}} \leqslant C_4 \|u_n - u_m\|_1 \to 0$ при $n, m \to \infty$, следует, что последовательность Lu_n фундаментальна в $\tilde{W}_{2,*}^{-1}$. Так как пространство $\tilde{W}_{2,*}^{-1}$ полно, то существует элемент $h \in \tilde{W}_{2,*}^{-1}$ такой, что $\|Lu_n - h\|_{\tilde{W}_{2,*}^{-1}} \to 0$ при $n \to \infty$. Для $h \in \tilde{W}_{2,*}^{-1}$ и $v \in \tilde{W}_{2,*}^1$ определено скалярное произведение $\langle h, v\rangle = \lim_{n\to\infty} (Lu_n, v)_0$, совпадающее со скалярным произведением в $L_2(G)$, если $h \in L_2(G)$ (см. [13]). Принимая во внимание, что

$$|F(u_n, v) - F(u_0, v)| \leqslant C_4 \|u_n - u_0\|_1 \|v\|_1 \to 0$$

при $n \to \infty$, получаем

$$\langle h, v\rangle = \lim_{n\to\infty} (Lu_n, v)_0 = \lim_{n\to\infty} F(u_n, v) = F(u_0, v) = (f, v)_0 = \langle f, v\rangle,$$

для любой функции $v \in \tilde{W}^1_{2,*}$. Отсюда следует, что $h = f$. Для функций u_n справедливо неравенство (10), из которого при $n \to \infty$ получаем $\|f\|_{\tilde{W}^{-1}_{2,*}} \geqslant C\|u_0\|_0$, откуда следует утверждение теоремы.

Замечание 1. В работе автора [4] рассмотрен вопрос о существовании и единственности сильного решения задачи 1 в смысле следующего определения: функция $u \in L_2(G)$ называется *сильным решением* задачи 1, если существует последовательность функций $u_n \in \tilde{W}^2_2$ таких, что при $n \to \infty$, $\|u_n - u\|_0 \to 0$, $\|Lu_n - f\|_0 \to 0$. Справедлива следующая

Теорема. *Если поверхность Γ_3 дважды непрерывно дифференцируема и выполняются условия теоремы* 1, *то существует единственное сильное решение $u \in \tilde{W}^1_2$ задачи* 1 *для любой функции $f \in L_2(G)$.*

Вопрос о гладкости сильного решения задачи 1 рассмотрен в работах Г. Д. Дачева [11], [12] в случае, когда Γ_i: $x_m = l_i$, $l_i = \text{const}$, $i = 1, 2$, $l_2 < l_1$; a^{ij}, $i, j = 1, \ldots, m-1$, не зависят от x_m; $b^i = a^{ij}_{x_j}(x')$, $i, j = 1, \ldots, m-1$. Имеет место следующая

Теорема. *Пусть* $a^{ij}(x') \in C^{\max(2,l)}(\bar{D})$, $i, j = 1, \ldots, m-1$, $k(x) \in C^{\max(3,l)}(\bar{G})$, $b^m(x) \in C^{\max(2,l)}(\bar{G})$, $c(x) \in C^l(\bar{G})$, $\partial D \in C^{l+1}$, $l \geqslant 1$. *Пусть в $\bar{G}$ выполняются условия* $2b^m + (2r-1)k_{x_m} > 0$, $r = 0, 1, \ldots, l$; $c \leqslant 0$, $c_{x_m} \leqslant 0$ *а также* $c_1 \leqslant 0$, $c_{1x_m} \geqslant 0$, *где* $c_1 = c - b^m_{x_m} + (1-r)k_{x_m x_m}$, $r = 1, \ldots, l$. *Тогда сильное решение задачи* 1 *принадлежит к* $W^{l+1}_2(G)$.

Замечание 2. Если $k(x) \geqslant 0$ в $\bar{G}$ уравнение (1) является эллиптико-параболическим. В некоторых случаях задача 1 не совпадает с первой краевой задачей для эллиптико-параболических уравнений (см. работы Г. Фикера [15] и О. А. Олейник [16]). Действительно, если на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ имеем $b = (b^i - a^{ij}_{x_j})\nu_i + (b^m - k_{x_m})\nu_m < 0$, $\nu_i = -n_i$, $i = 1, \ldots, m$, то Γ_1 и Γ_2 являются множествами типа Σ_2, так как $H = 0$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Боковая поверхность Γ_3 является множеством типа Σ_3, так как $H \neq 0$ на Γ_3. Тогда первая краевая задача имеет вид

$$Lu = f \quad \text{в } G, \qquad u = 0 \quad \text{на } \partial G \tag{11}$$

и отличается от задачи 1. Если $b < 0$ на Γ_1 и $b \geqslant 0$ на Γ_2, то обе задачи совпадают.

Пример. Пусть $G = D \times (0, 1)$, а уравнение (1) имеет вид

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^{m-1} u_{x_i x_i} + x_m(1-x_m)u_{x_m x_m} + \left(\frac{1-2x_m}{2} + \mu\right)u_{x_m} = f(x),$$

где $0 < \mu = \text{const} < 1/2$. В этом случае $k = x_m(1-x_m) \geqslant 0$ в $\bar{G}$, $H = 0$, $b < 0$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ и следовательно первая краевая задача имеет вид (11).

Замечание 3. Теоремы 1, 2 справедливы также для сопряженной задачи (3), (4).

2

Пусть граница ∂D гладкая и Γ_i: $x_m = l_i$, $l_i = \text{const}$, $i = 1, 2$, $l_2 < l_1$. Рассмотрим в цилиндре $G_1 = D \times (l_2, l_1)$ уравнение вида (1)

$$Lu \equiv [a^{ij}(x')u_{x_i}]_{x_j} + k(x)u_{x_m x_m} + b(x)u_{x_m} + c(x)u = f(x), \tag{12}$$

где коэффициенты удовлетворяют те же условия как в п. 1, только $a^{ij}(x') \in C^1(\bar{D})$ (заметим, что в этом случае из условия $H = 0$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ следует, что $k(x) = 0$ на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$).

Задача 2. Найти решение уравнения (12) в G_1, удовлетворяющее граничным условиям

$$u = 0 \quad \text{на } \Gamma_1, \qquad a^{ij}(x')n_i u_{x_j} = 0 \quad \text{на } \Gamma_3. \tag{13}$$

Сопряженная задача к задаче 2 имеет вид

$$L^* v = g \quad \text{в } G, \tag{14}$$

$$v = 0 \quad \text{на } \Gamma_2, \qquad a^{ij}(x')n_i v_{x_j} = 0 \quad \text{на } \Gamma_3. \tag{15}$$

Обозначим через $\hat{C}^2$ и $\hat{C}^2_*$ множества всех дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{G}_1$ функции, удовлетворяющих соответственно условиям (13) и (15). Как в п. 1, вводятся пространства $\hat{W}^i_2$, $\hat{W}^i_{2,*}$, $i = 1, 2$, $\hat{W}^{-1}_2$ и $\hat{W}^{-1}_{2,*}$.

Обобщенным решением задачи 2 будем называть функцию $u \in \hat{W}^1_2$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_{G_1} [-a^{ij}u_{x_i}v_{x_j} - ku_{x_m}v_{x_m} + (b - k_{x_m})u_{x_m}v + cuv]\,dx = \int_{G_1} fv\,dx,$$

для любой функции $v \in \hat{W}^1_{2,*}$.

Теорема 3. *Пусть в замкнутой области $\bar{G}_1$ выполняются условия* $2b - k_{x_m} > 0$, $2b - 3k_{x_m} > 0$, $c \leqslant 0$, $c_{x_m} \leqslant 0$, $c^* \leqslant 0$, $c^*_{x_m} \geqslant 0$, *где* $c^* = c - b_{x_m} + k_{x_m x_m}$. *Тогда существует единственное обобщенное решение задачи* 2.

Доказательство проводится также как доказательство теоремы 1 и 2. Заметим только, что для любой функции $v \in \hat{C}^2_*$, решение задачи

$$pu_{x_m} = v \quad \text{в } G_1, \qquad u = 0 \quad \text{на } \Gamma_1,$$

которое дается формулой

$$\hat{u} = \int_{l}^{x_m} \frac{v(x', t)}{p(t)}\, dt$$

удовлетворяет условие $a^{ij}(x') n_i \hat{u}_{x_j} = 0$ на Γ_3, так как

$$a^{ij}(x') n_i \hat{u}_{x_j} = \int_{l_1}^{x_m} \frac{a^{ij}(x') n_i v_{x_j}(x', t)}{p(t)}\, dt$$

и $a^{ij} n_i v_{x_j} = 0$ на Γ_3.

Вопрос о гладкости обобщенного решения задачи 2 остается открытым.

Литература

[1] А. В. Бицадзе, *Об уравнениях смешанного типа в трехмерных овластях*, ДАН СССР 143 (1962), 1017–1019.

[2] —, *Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми*, Сибирск. матем. ж. 3 (1962), 642–644.

[3] Г. Д. Каратопраклиев, *Существование слабых решений одной краевой задачи для уравнения смешанного типа в многомерных областях*, ДАН СССР 193 (1970), 1226–1229.

[4] —, *К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях*. I, Дифференц. уравн. 13 (1977), 64–75.

[5] —, *Об одной смешанной задаче для многомерных уравнений смешанного типа*, Докл. Болгарск. АН 30 (1977), 645–647.

[6] —, *О постановке и разрешимости краевых задач для уравнений смешанного типа в многомерных областях*, ДАН СССР 239 (1978), 257–260.

[7] Н. Г. Сорокина, *Энергетические соотношения для многомерных уравнений смешанного типа*, Дифференц. уравн. 9 (1973), 158–161.

[8] —, *Сильная разрешимость граничной задачи для уравнения смешанного типа в многомерных областях*, Укр. матем. ж. 26 (1974), 115–123.

[9] В. Н. Врагов, *О некоторых краевых задачах для одного класса уравнений смешанного типа в трехмерном случае*, Дифференц. уравн. 11 (1975), 27–32.

[10] —, *К теории краевых задач для уравнений смешанного типа в пространстве*, Дифференц. уравн. 13 (1977), 1098–1105.

[11] Г. Д. Дачев, *Гранични задачи за частни диференциални уравнения от смесен тип*, Канд. дис., София 1978.

[12] —, *О гладкости решений некоторых краевых задач для уравнений смешанного типа*, Докл. Болгарск. АН 32 (1979).

[13] Ю. М. Березанский, *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов*, Киев 1965.

[14] В. П. Диденко, *Об обобщенной разрешимости задачи Трикоми*, Укр. матем. ж. 25 (1973), 14–24.

[15] Г. Фикера, *К единной теории краевых задач для эллиптико-параболических уравнений второго порядка*, Математика 7 (1963), 99–121.

[16] О. А. Олейник, *О линейных уравнениях второго порядка с неотрицательной характеристической формой*, Математ. сб. 69 (1966), 111–140.

Presented to the Semester
Partial Differential Equations
September 11–December 16, 1978