Bibliographie

[1] L. Boutet de Monvel, A. Grigis, B. Helffer, *Paramétrixes d'opérateurs pseudo-différentiels à caractéristiques multiples*, Astérisque 34–35, 93–121.

[2] G. B. Folland, *Subelliptic estimates and function spaces in nilpotent Lie groups*, Ark. f. Mat. 13 (1975), 161–207.

[3] D. Geller, *Fourier analysis in the Heisenberg group*, J. Functional Analysis, Vol. 36, n° 2, April 1980.

[4] R. W. Goodman, *Elliptic and subelliptic estimates for operators in an enveloping algebra*, preprint, Juin 1978.

[5] V. V. Grušin, *On a class of elliptic pseudo-differential operators degenerate on a submanifold*, Mat. Sb. 84 (126) (1971) n° 2, Math. USSR Sb. 13 (1971) n° 2.

[6] B. Helffer, *Hypoellipticité pour des opérateurs différentiels sur des groupes de Lie nilpotents*, Editions du C.I.M.E., 1977.

[7] B. Helffer, J. Nourrigat, *Hypoellipticité pour des groupes nilpotents de rang de nilpotence* 3, Comm. in P. D. E. 3 (8) (1978), 643–743.

[8] —, —, *Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogènes invariants à gauche sur un groupe nilpotent gradué*, Comm. Partial Differential Equations 4 (1979), 899–958.

[9] —, —, *Approximation d'un système de champs de vecteurs et applications à l'hypoellipticité*, Arkir för Matematik 2 (1979), 237–254.

[10] C. Rockland, *Hypoellipticity on the Heisenberg group. Représentation theoretic criteria*, Trans. of the A. M. S., 240 (June 1978), 1–53.

[11] L. P. Rothschild, E. M. Stein, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math. 137 (1976), 248–315.

[12] L. P. Rothschild, *A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields*, Comm. in P.D.E. 4 (6) (1979), 645–699.

[13] J. Sjöstrand, *Parametrices for pseudo-differential operators with multiple characteristics*, Arkiv för Matematik 12 (1974), n°1.

Presented to the Semester
Partial Differential Equations
September 11–December 16, 1978

PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
BANACH CENTER PUBLICATIONS, VOLUME 10
PWN—POLISH SCIENTIFIC PUBLISHERS
WARSAW 1983

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ПО М. А. ЛАВРЕНТЬЕВУ ОТОБРАЖЕНИЯ

А. ЯНУШАУСКАС

СО АН СССР, Институт Математики, Новосибирск, С.С.С.Р.

Конформные отображения плоских областей характеризуются сохранением углов и тем, что коэффициент искажения масштаба не зависит от направления. Пусть конформное отображение области D плоскости переменных x, y на область G плоскости переменных u, v задается соотношениями $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$. Из сохранения углов при конформном отображении следует выполнение равенства

$$\varphi_x\psi_x + \varphi_y\psi_y = 0, \tag{1}$$

которое означает, что два ортогональных направления переходят снова в два ортогональных направления. В силу того, что искажение масштаба не зависит от направления, выполняется равенство

$$\varphi_x^2 + \varphi_y^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2, \tag{2}$$

которое означает равенство коэффициентов искажения масштаба в двух взаимно ортогональных направлениях.

Из равенства (1) следует

$$\varphi_x = \lambda\psi_y, \quad \varphi_y = -\lambda\psi_x, \tag{3}$$

где λ — некоторая функция переменных x и y. Далее в силу равенства (2) имеем $\psi_x^2 + \psi_y^2 = \lambda^2(\psi_x^2 + \psi_y^2)$, откуда следует $\lambda = \pm 1$, причем система (3) превращается в систему Коши–Римана, либо в систему, которая легко сводится к системе Коши–Римана. Следовательно, конформное отображение $w \equiv u + iv = \varphi + i\psi$ осуществляется либо голоморфной либо антиголоморфной функцией переменного $z = x + iy$. Поэтому в вещественной записи конформное отображение можно интерпретировать как отображение, осуществляемое градиентом гармонической функции.

Так как функции φ и ψ являются гармоническими, то в силу равенства (1) отображение $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$ переводит линии уровня гармонической функции φ в линии уровня гармонической функции $\omega(u, v) \equiv u$ переменных u и v, а ортогональные траектории линий уровня φ в ортогональные траектории линий уровня функции $\omega \equiv u$. Следовательно, конформное отображение χ области D плоскости переменных x и y на область G плоскости переменных u и v можно интерпретировать как такое отображение, которое линии уровня наперед заданной в области D гармонической функции переводит в линии уровня другой наперед заданной гармонической в области G функции, а ортогональные траектории линий уровня этих функций также переводит друг в друга. Эта интерпретация конформных отображений особенно важна в электростатических и гидродинамических приложениях теории конформных отображений.

Если конформное отображение $\xi = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$ интерпретировать как замену переменных в операторе Лапласа $\Delta u = u_{xx}+u_{yy}$, то эта замена оператор Δ преобразует в оператор

$$J(\xi, \eta)(u_{\eta\eta}+u_{\xi\xi}), \quad J = \varphi_x^2+\varphi_y^2.$$

Таким образом, конформное отображение с отличным от нуля якобианом можно интерпретировать еще и как такую замену переменных, которая уравнение Лапласа преобразует в уравнение Лапласа.

Рассмотрим отображение

$$(4) \qquad \xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z)$$

трехмерного пространства. Аналогами уравнения (1) для этого отображения являются уравнения

$$(5) \qquad \begin{gathered} \xi_x\eta_x+\xi_y\eta_y+\xi_z\eta_z = 0, \quad \xi_x\zeta_x+\xi_y\zeta_y+\xi_z\zeta_z = 0, \\ \eta_x\zeta_x+\eta_y\zeta_y+\eta_z\zeta_z = 0, \end{gathered}$$

а вместо равенства (2) имеем

$$(6) \qquad \xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2 = \eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2 = \zeta_x^2+\zeta_y^2+\zeta_z^2.$$

Совокупность уравнений (5) и (6) характеризует конформные отображения трехмерных областей. Выполнение этих соотношений также является необходимым и достаточным условием того, чтобы замена переменных (4) переводила уравнение Лапласа в уравнение Лапласа с младшими членами.

Вначале рассмотрим отображения (4), которые удовлетворяют только уравнениям (5). Эти отображения некоторые три семейства попарно ортогональных поверхностей переводят снова в три семейства попарно ортогональных поверхностей. В связи с исследованием систем криволинейных координат такие отображения хорошо изучены [1]. Из уравнений системы (5) следует, что существуют функции λ_1, λ_2, λ_3

такие, что

$$(7) \qquad \begin{aligned} \xi_x &= \lambda_1(\eta_y\zeta_z-\eta_z\zeta_y), & \xi_y &= \lambda_1(\eta_z\zeta_x-\eta_x\zeta_z), & \xi_z &= \lambda_1(\eta_x\zeta_y-\eta_y\zeta_x); \\ \eta_x &= \lambda_2(\xi_y\zeta_z-\xi_z\zeta_y), & \eta_y &= \lambda_2(\xi_z\zeta_x-\xi_x\zeta_z), & \eta_z &= \lambda_2(\xi_x\zeta_y-\xi_y\zeta_x); \\ \zeta_x &= \lambda_3(\xi_y\eta_z-\xi_z\eta_y), & \zeta_y &= \lambda_3(\xi_z\eta_x-\xi_x\eta_z), & \zeta_z &= \lambda_3(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x). \end{aligned}$$

Из первых трех уравнений системы (7) получаем

$$\begin{aligned} \xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2 &= \lambda_1[\xi_x(\eta_y\zeta_z-\eta_z\zeta_y)+\xi_y(\eta_z\zeta_x-\eta_x\zeta_z)+\xi_z(\eta_x\zeta_y-\eta_y\zeta_x)] = \\ &= \lambda_1[\eta_y(\xi_x\zeta_z-\xi_z\zeta_x)+\eta_z(\xi_y\zeta_x-\xi_x\zeta_y)+\eta_x(\xi_z\zeta_y-\xi_y\zeta_z)]. \end{aligned}$$

В силу второй тройки уравнений системы (7) из этого равенства находим

$$(8) \qquad \lambda_2(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2) = -\lambda_1(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2).$$

Анологично получаются равенства

$$(9) \qquad \begin{gathered} \lambda_3(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2) = -\lambda_2(\zeta_x^2+\zeta_y^2+\zeta_z^2), \\ \lambda_1(\zeta_x^2+\zeta_y^2+\zeta_z^2) = \lambda_3(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2). \end{gathered}$$

Из первой тройки уравнений (7) также имеем

$$\begin{aligned} \xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2 &= \lambda_1^2[(\eta_y\zeta_z-\eta_z\zeta_y)^2+(\eta_z\zeta_x-\eta_x\zeta_z)^2+(\eta_x\zeta_y-\eta_y\zeta_x)^2] = \\ &= \lambda_1^2[(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2)(\zeta_x^2+\zeta_y^2+\zeta_z^2)-(\eta_y\zeta_y+\eta_z\zeta_z+\eta_x\zeta_x)], \end{aligned}$$

откуда, учитывая третье уравнение (5), получаем

$$(10) \qquad \xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2 = \lambda_1^2(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2)(\zeta_x^2+\zeta_y^2+\zeta_z^2).$$

При помощи равенств (8), (9) и (10) легко получаются следующие соотношения:

$$(11) \qquad \begin{gathered} \lambda_2\lambda_3(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2) = -1, \quad \lambda_1\lambda_3(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2) = 1, \\ \lambda_1\lambda_2(\zeta_x^2+\zeta_y^2+\zeta_z^2) = -1, \end{gathered}$$

из которых следует

$$\lambda_1^{-2}\lambda_2^{-2}\lambda_3^{-2} = (\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2)(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2)(\zeta_x^2+\zeta_y^2+\zeta_z^2).$$

Для якобиана J отображения (4) имеем

$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \\ \zeta_x & \zeta_y & \zeta_z \end{vmatrix} = \xi_x(\eta_y\zeta_z-\eta_z\zeta_y)+\xi_y(\eta_z\zeta_x-\eta_x\zeta_z)+\xi_z(\eta_x\zeta_y-\eta_y\zeta_x) = $$

$$= \frac{1}{\lambda_1}(\xi_x^2+\xi_y+\xi_z^2).$$

Точно так же получаются и следующие формулы:

$$J = -\frac{1}{\lambda_2}(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2), \qquad J = \frac{1}{\lambda_3}(\zeta_x^2+\zeta_y^2+\zeta_z^2).$$

Перемножив эти три выражения для J, получим

$$J^3 = -\frac{1}{\lambda_1\lambda_2\lambda_3}(\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2)(\eta_x^2+\eta_y^2+\eta_z^2)(\zeta_x^2+\zeta_y^2+\zeta_z^2),$$

или

$$J^3 = -\lambda_1^{-3}\lambda_2^{-3}\lambda_3^{-3}, \qquad J = -\lambda_1^{-1}\lambda_2^{-1}\lambda_3^{-1}.$$

Для того, чтобы оператор Лапласа преобразовать к независимым переменным ξ, η, ζ, необходимо вычислить выражения $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$. Из (7) непосредственным вычислением вторых производных находим

$$\Delta\xi = \frac{1}{\lambda_1}\left(\xi_x\frac{\partial\lambda_1}{\partial x}+\xi_y\frac{\partial\lambda_1}{\partial y}+\xi_z\frac{\partial\lambda_1}{\partial z}\right),$$

$$\Delta\eta = \frac{1}{\lambda_2}\left(\eta_x\frac{\partial\lambda_2}{\partial x}+\eta_y\frac{\partial\lambda_2}{\partial y}+\eta_z\frac{\partial\lambda_2}{\partial z}\right),$$

$$\Delta\zeta = \frac{1}{\lambda_3}\left(\zeta_x\frac{\partial\lambda_3}{\partial x}+\zeta_y\frac{\partial\lambda_3}{\partial y}+\zeta_z\frac{\partial\lambda_3}{\partial z}\right).$$

Если в правых частях этих равенств производные функций λ_j по переменным x, y, z заменить производными по ξ, η, ζ, то получим

$$\Delta\xi = J\frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi}, \qquad \Delta\eta = -J\frac{\partial\lambda_2}{\partial\eta}, \qquad \Delta\zeta = J\frac{\partial\lambda_3}{\partial\zeta}.$$

Следовательно, уравнение Лапласа $\Delta u = 0$ в переменных ξ, η, ζ запишется следующим образом:

$$J\left[\lambda_1 u_{\xi\xi}-\lambda_2 u_{\eta\eta}+\lambda_3 u_{\zeta\zeta}+\frac{\partial\lambda_1}{\partial\xi}u_\xi-\frac{\partial\lambda_2}{\partial\eta}u_\eta+\frac{\partial\lambda_3}{\partial\zeta}u_\zeta\right]=0.$$

Если отображение (4) является конформным, т.е. наряду с (5) удовлетворяет и (6), то из соотношений (9) имеем $\lambda_3 = -\lambda_2 = \lambda_1 = \lambda$, а из (11) получаем $\lambda^{-1} = \sqrt{\xi_x^2+\xi_y^2+\xi_z^2}$. Далее из первой тройки уравнений (7) получаем, что ξ является решением уравнения

$$(12) \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(u_x\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u_y\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u_z\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\right)=0.$$

Из остальных уравнений (7) следует, что и функции η, ζ также удовлетворяют этому уравнению.

Непосредственным подсчетом легко проверяется, что если имеем два решения $\xi_i(x,y,z)$, $\eta_i(x,y,z)$, $\zeta_i(x,y,z)$, $i=1,2$, системы (5) и (6), то этой же системе удовлетворяют и функции

$$\xi(x,y,z) = \xi_1\big(\xi_2(x,y,z),\eta_2(x,y,z),\zeta_2(x,y,z)\big),$$
$$\eta(x,y,z) = \eta_1\big(\xi_2(x,y,z),\eta_2(x,y,z),\zeta_2(x,y,z)\big),$$
$$\zeta(x,y,z) = \zeta_1\big(\xi_2(x,y,z),\eta_2(x,y,z),\zeta_2(x,y,z)\big).$$

Также легко проверяется, что системе уравнений (5) и (6) удовлетворяют функции

$$\xi = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \qquad \eta = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \qquad \zeta = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Отображение, задаваемое этими равенствами, является инверсией относительно единичной сферы [2].

Можно показать [2], что в трехмерном пространстве конформными отображениями являются только сдвиги, повороты, инверсии относительно произвольных сфер и различные композиции этих отображений. Одноточечную компактификацию трехмерного пространства всякое конформное отображение гомеоморфно отображает на себя. В этом смысле конформные отображения трехмерных областей являются более естественным аналогом дробно-линейных отображений плоских областей, а не общих конформных отображений. Таким образом, класс конформных отображений трехмерных областей является очень узким.

Конформное отображение (4) оператор Лапласа Δu преобразует в оператор

$$\lambda^{-2}[u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}+\nu_\xi u_\xi+\nu_\eta u_\eta+\nu_\zeta u_\zeta],$$

где $\nu = \ln\lambda$. Следовательно, в отличие от плоских конформных отображений, конформные отображения трехмерных областей преобразуют уравнение Лапласа в уравнение Лапласа с младшими членами.

На конформные отображения трехмерных областей не обобщаются и другие свойства конформных отображений плоских областей. В (4) функции ξ, η, ζ не являются гармоническими, а удовлетворяют уравнению (12). Кроме этого не для всякого наперед заданного решения ξ уравнения (12) можно подобрать η и ζ так, чтобы отображение (4) было конформным.

Уравнению (12) удовлетворяют функции x, y, z, поэтому отображение (4) переводит семейство поверхностей уровня решения уравнения (12) $\xi(x, y, z)$ в семейство поверхностей уровня решения ξ уравнения (12) в пространстве переменных ξ, η, ζ. При этом ортогональные траектории поверхностей уровня функции $\xi(x, y, z)$ переходят в ортогональные траектории семейства плоскостей $\xi = \mathrm{const}$. Однако далеко не для каждого решения уравнения (12) такие отображения будут конформными. Следовательно, если вместо уравнения Лапласа в основу построения теории конформных отображений трехмерных областей положить уравнение (12), то и теперь не будет полной аналогии с конформными отображениями плоских областей. Из-за этого приходится рассматривать другие классы отображений трехмерных областей, которые по тем или иным признакам естественно считать аналогами плоских конформных отображений. В частности, можно рассматривать различные классы отображений трехмерных областей, которые имеют те или иные важные для приложений свойства конформных отображений плоских областей. Наиболее перспективным в этом отношении является подход М. А. Лаврентьева к определению аналога плоских конформных отображений [3]. М. А. Лаврентьев исходил из гидродинамической интерпретации конформных отображений [4], [5]. Впервые отображения, типа отображений гармонических по М. А. Лаврентьеву, были рассмотрены в [6].

Здесь мы дадим определение гармонического по М. А. Лаврентьеву отображения в несколько более общем виде, чем это было первоначально сделано М. А. Лаврентьевым. Пусть u — вещественная функция, аналитическая в области D трехмерного евклидова пространства R^3 переменных x, y, z. Рассмотрим отображение χ области D в пространство переменных ξ, η, ζ. Пусть отображение χ переводит поверхности уровня функции u в плоскости $\zeta = \mathrm{const}$, а ортогональные траектории поверхностей уровня функции u пусть χ переводит в прямые, параллельные оси $O\zeta$. Обозначим через ψ_ν след χ на поверхности M_ν: $\{u = \nu\}$, а через K_ν — коэффициент растяжения вдоль нормали к M_ν при отображении χ.

Будем предполагать, что χ удовлетворяет соотношению

$$J(\psi_\nu) = f(K_\nu), \tag{13}$$

где $J(\psi_\nu)$ — якобиан отображения ψ_ν, а f — заданная функция, которая в общем случае может зависеть и от точки (x, y, z). Очевидно, что для якобиана $J(\chi)$ отображения χ имеем равенство

$$J(\chi) = K_\nu f(K_\nu) = \sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\cdot f(\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}). \tag{14}$$

Само отображение χ полностью определяется заданием функций u и f. Такое отображение χ будем называть квазиортогональным отображением, определяемым функцией u и нормированным функцией f.

Выше было дано геометрическое определение квазиортогональных отображений. Этим отображениям можно дать и аналитическую интерпретацию с точки зрения теории систем уравнений с частными производными. Пусть χ задается равенствами

$$\xi = u(x, y, z), \quad \eta = v(x, y, z), \quad \zeta = w(x, y, z). \tag{15}$$

Из определения квазиортогонального отображения следует, что функции u, v, w связаны соотношениями

$$\begin{aligned} u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z &= 0, \\ u_x w_x + u_y w_y + u_z w_z &= 0, \end{aligned} \tag{16}$$

из которых следует

$$\begin{aligned} u_x &= \lambda(v_y w_z - v_z w_y), \quad u_y = \lambda(v_z w_x - v_x w_z), \\ u_z &= \lambda(v_x w_y - v_y w_x), \end{aligned} \tag{17}$$

где $\lambda(x, y, z) \not\equiv 0$ — некоторая вещественная функция. При помощи соотношений (17) для якобиана отображения χ получаем равенство

$$J(\chi) = \lambda^{-1}(u_x^2+u_y^2+u_z^2). \tag{18}$$

Учитывая (14), из (18) находим

$$\lambda = \frac{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}}{f(\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2})} = g(\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}). \tag{19}$$

Таким образом, квазиортогональное отображение χ можно задавать соотношениями (15), где функции u, v, w удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} u_x &= g(|\mathrm{grad}\, u|)(v_y w_z - v_z w_y), \\ u_y &= g(|\mathrm{grad}\, u|)(v_z w_x - v_x w_z), \\ u_z &= g(|\mathrm{grad}\, u|)(v_x w_y - v_y w_x), \end{aligned} \tag{20}$$

причем $g(\tau)$ — заданная функция. Из системы (20) легко получается следующее уравнение для функции u:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{g(|\mathrm{grad}\, u|)}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{g(|\mathrm{grad}\, u|)}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{u_z}{g(|\mathrm{grad}\, u|)}\right) = 0. \tag{21}$$

Функцию f, фигурирующую в формуле (13) будем называть характеристикой квазиортогонального отображения χ. При выводе (20) предполагалось, что характеристика f зависит только от K_ν и не зависит от точки (x, y, z). В общем случае f может зависеть и от этой точки, тогда и λ в силу формулы (19) будет зависеть от этой точки, а система

(20) теперь примет вид

$$
\begin{aligned}
u_x &= \lambda(x, y, z, |\operatorname{grad} u|)(v_y w_z - v_z w_y),\\
u_y &= \lambda(x, y, z, |\operatorname{grad} u|)(v_z w_x - v_x w_z),\\
u_z &= \lambda(x, y, z, |\operatorname{grad} u|)(v_x w_y - v_y w_x).
\end{aligned} \tag{22}
$$

Таким образом, построение теории квазиортогональных отображений сводится к исследованию системы (22).

Если ввести обозначения

$$\Omega_0 = v_y w_z - v_z w_y, \quad \Omega_1 = v_z w_x - v_x w_z, \quad \Omega_2 = v_x w_y - v_y w_x,$$

то из (22) получаем соотношения

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\Omega_0) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda\Omega_1), \quad \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\Omega_0) = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda\Omega_2), \quad \frac{\partial}{\partial z}(\lambda\Omega_1) = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda\Omega_2),$$

из которых следуют равенства

$$
\begin{gathered}
\Omega_2\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x} - \frac{\partial\Omega_0}{\partial y}\right) - \Omega_1\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x} - \frac{\partial\Omega_0}{\partial z}\right) + \Omega_0\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial y} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial z}\right) = 0,\\
\frac{\partial\lambda}{\partial x}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial y} - \frac{\partial\Omega_1}{\partial z}\right) - \frac{\partial\lambda}{\partial y}\left(\frac{\partial\Omega_2}{\partial x} - \frac{\partial\Omega_0}{\partial z}\right) + \frac{\partial\lambda}{\partial z}\left(\frac{\partial\Omega_1}{\partial x} - \frac{\partial\Omega_0}{\partial y}\right) = 0.
\end{gathered}
$$

Важные классы квазиортогональных отображений трехмерных областей получаются в том случае, когда функция u, определяющая отображение является решением некоторого эллиптического уравнения второго порядка. В том случае, когда в (13) $f(t) \equiv t$, из (19) получаем $\lambda \equiv 1$, а уравнение (21) теперь превращается в уравнение Лапласа. Теперь функция u является гармонической, а квазиортогональное отображение χ, определяемое функцией u, М. А. Лаврентьев назвал гармоническим [3]. В дальнейшем будем гармонические отображения рассматривать несколько шире, чем это понималось в первоначальном определении М. А. Лаврентьева.

Определение 1. Пусть (u_1, v_1, w_1) и (u_2, v_2, w_2) два решения системы уравнений, которая получается из (17) при $\lambda \equiv 1$. Рассмотрим уравнения

$$
\begin{gathered}
u_1(X, Y, Z) = u_2(x, y, z), \quad v_1(X, Y, Z) = v_2(x, y, z),\\
w_1(X, Y, Z) = w_2(x, y, z).
\end{gathered} \tag{23}
$$

Будем говорить, что эти уравнения определяют гармоническое по М. А. Лаврентьеву отображение некоторой области из пространства переменных x, y, z в пространство переменных X, Y, Z, либо некоторой

области пространства переменных X, Y, Z в пространство переменных x, y, z в зависимости от того, относительно каких переменных разрешается система уравнений (23).

Из этого определения следует, что наряду с отображением χ гармоническим является и обратное отображение χ^{-1}. Очевидно также, что соотношения (15) являются частным случаем соотношений (23).

Фигурирующие в соотношениях (15) функции u, v, w, которые определяют гармоническое по М. А. Лаврентьеву отображение χ, удовлетворяют системе уравнений

$$u_x = v_y w_z - v_z w_y, \quad u_y = v_z w_x - v_x w_z, \quad u_z = v_x w_y - v_y w_x, \tag{24}$$

а из (14) для якобиана этого отображения имеем равенство $J(\chi) = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$. В теории гармонических по М. А. Лаврентьеву отображений трехмерных областей система (24) играет роль системы Коши–Римана. Однако эта система не является полным аналогом системы Коши–Римана. Для того, чтобы получить уравнения, более полно заменяющие систему Коши–Римана, наряду с системой (24) необходимо рассматривать еще одну систему, которая будет выведена ниже.

В системе (24) переменные x, y, z сделаем зависимыми, а переменные u, v, w — независимыми. В результате этой замены имеем

$$
\begin{aligned}
u_x &= \Delta^{-1}(y_v z_w - z_v y_w), \quad v_x = \Delta^{-1}(y_w z_u - y_u z_w),\\
&\qquad w_x = \Delta^{-1}(y_u z_v - y_v z_u),\\
u_y &= \Delta^{-1}(x_w z_v - x_v z_w), \quad v_y = \Delta^{-1}(x_u z_w - x_w z_u),\\
&\qquad w_y = \Delta^{-1}(x_v z_u - x_u z_v),\\
u_z &= \Delta^{-1}(x_v y_w - x_w y_v), \quad v_z = \Delta^{-1}(x_w y_u - x_u y_w),\\
&\qquad w_z = \Delta^{-1}(x_u y_v - x_v y_u),
\end{aligned}
$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix}.$$

При помощи этих формул непосредственным подсчетом находим

$$
\begin{gathered}
v_y w_z - v_z w_y = \frac{1}{\Delta} x_u, \quad v_z w_x - v_x w_z = \frac{1}{\Delta} y_u,\\
v_x w_y - v_y w_x = \frac{1}{\Delta} z_u.
\end{gathered} \tag{25}
$$

В новых независимых переменных система (24) принимает вид

$$x_u = y_v z_w - y_w z_v, \quad y_u = x_w z_v - x_v z_w, \quad z_u = x_v y_w - x_w y_v. \tag{26}$$

Из определения 1 следует, что всякое гармоническое по М. А. Лаврентьеву отображение χ можно представить в виде композиции двух гармонических отображений специального вида

$$(27)\qquad \chi_1:\quad u = u(x, y, z),\qquad v = v(x, y, z),\qquad w = w(x, y, z),$$

$$(28)\qquad \chi_2:\quad X = X(u, v, w),\qquad Y = Y(u, v, w),\qquad Z = Z(u, v, w),$$

где (u, v, w) — некоторое решение системы (24), а (X, Y, Z) — некоторое решение системы (26). Поэтому для построения теории гармонических по М. А. Лаврентьеву отображений достаточно построить теорию отображений вида (27) и вида (28). Исследование отображений вида (27) осуществляется проще, чем исследование отображений вида (28), так как для функции u, фигурирующей в (27), получается уравнение Лапласа, а для (28) такого упрощения не получается.

Пусть гармоническая функция $u(x, y, z)$ задана наперед. Покажем, что всегда можно подобрать функции $v(x, y, z)$ и $w(x, y, z)$ так, чтобы тройка функций u, v, w удовлетворяла системе (24) по крайней мере в тех точках, в которых $\operatorname{grad} u \neq 0$. Пусть в точке X_0, которую без ограничения общности можно считать началом координат в силу инвариантности системы (24) относительно параллельных переносов, имеем $\operatorname{grad} u \neq 0$. В окрестности этой точки уравнение

$$(29)\qquad u_x\eta_x + u_y\eta_y + u_z\eta_z = 0$$

имеет два голоморфных независимых интеграла $\xi(x, y, z)$, $\eta(x, y, z)$ [7]. Очевидно, что u, ξ, η удовлетворяют системе

$$u_x = \lambda(\xi_y\eta_z - \xi_z\eta_y),\qquad u_y = \lambda(\xi_z\eta_x - \xi_x\eta_z),\qquad u_z = \lambda(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x),$$

где λ — некоторая аналитическая функция переменных x, y, z.

В силу гармоничности функции u имеем

$$\begin{aligned} 0 &= u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \\ &= \lambda_x(\xi_y\eta_z - \xi_z\eta_y) + \lambda_y(\xi_z\eta_x - \xi_x\eta_z) + \lambda_z(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x) = \\ &= \frac{1}{\lambda}(\lambda_x u_x + \lambda_y u_y + \lambda_z u_z). \end{aligned}$$

Следовательно функция λ удовлетворяет уравнению (29), поэтому получаем, что $\lambda(\xi, \eta)$ является функцией только ξ и η [7]. Рассмотрим два новых интеграла $v = \Phi(\xi, \eta)$, $w = \Psi(\xi, \eta)$ уравнения (29) и попытаемся Φ и Ψ подобрать так, чтобы функции u, v, w удовлетворяли (24). Непосредственным подсчетом находим

$$\begin{aligned} v_y w_z - v_z w_y &= (\Phi_\eta\Psi_\xi - \Phi_\xi\Psi_\eta)(\eta_y\xi_z - \eta_z\xi_y), \\ v_z w_x - v_x w_z &= (\Phi_\eta\Psi_\xi - \Phi_\xi\Psi_\eta)(\eta_x\xi_z - \eta_z\xi_x), \\ v_x w_y - v_y w_x &= (\Phi_\eta\Psi_\xi - \Phi_\xi\Psi_\eta)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x). \end{aligned}$$

Для наших целей теперь достаточно Φ и Ψ подобрать так, чтобы $\lambda^{-1}(\Phi_\eta\Psi_\xi - \Phi_\xi\Psi_\eta) = 1$. Из-за того, что $\operatorname{grad} u \neq 0$, в окрестности точки X_0 имеем $\lambda \neq 0$. Теперь можно положить

$$\Phi(\xi, \eta) = \xi,\qquad \Psi(\xi, \eta) = -\int \lambda(\xi, \tau)\, d\tau.$$

Из проделанных выше построений следует, что если функции u, v, w удовлетворяют системе (14), то этой же системе удовлетворяют и функции u, $\Phi(v, w)$, $\Psi(v, w)$, где Φ и Ψ — произвольные функции, удовлетворяющие соотношению $\Phi_\eta\Psi_\xi - \Phi_\xi\Psi_\eta = 1$.

Найдем те замены независимых переменных, которые не меняют вида системы (24). Пусть замена переменных имеет вид

$$(30)\qquad X = X(x, y, z),\qquad Y = Y(x, y, z),\qquad Z = Z(x, y, z).$$

Непосредственным подсчетом проверяется, что для того, чтобы система (24) не меняла вида, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{aligned} X_x &= Z_yY_z - Z_zY_y, & X_y &= Z_zY_x - Z_xY_z, & X_z &= Z_xY_y - Z_yY_x, \\ Z_x &= X_zY_y - X_yY_z, & Z_y &= X_xY_z - X_zY_x, & Z_z &= X_yY_x - X_xY_y, \\ Y_x &= Z_zX_y - Z_yX_z, & Y_y &= X_zZ_x - X_xZ_z, & Y_z &= Z_yX_x - Z_xX_y. \end{aligned}$$

Эти уравнения являются частным случаем уравнений (7) при $\lambda_1 = -\lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Поэтому замена переменных (30) осуществляет конформное отображение евклидова пространства с якобианом равным единице. Следовательно, вид системы (24) сохраняют только параллельные переносы, повороты и композиции этих отображений.

Рассмотрим линеаризацию систем (24) и (26) на решении $u = x$, $v = y$, $w = z$. Положим

$$\begin{aligned} u &= x + a(x, y, z), & v &= y + b(x, y, z), & w &= z + c(x, y, z); \\ x &= u + \alpha(u, v, w), & y &= v + \beta(u, v, w), & z &= w + \gamma(u, v, w), \end{aligned}$$

тогда получим

$$a_x - b_y - c_z = b_yc_z - b_zc_y,\qquad a_y + b_x = c_xb_z - c_zb_x,$$
$$a_z + c_x = b_xc_y - b_yc_x;$$
$$\beta_v + \gamma_w - \alpha_u = \beta_w\gamma_v - \beta_v\gamma_w,\qquad \alpha_v + \beta_u = \gamma_v\alpha_w - \alpha_v\gamma_w,$$
$$\alpha_w + \gamma_u = \alpha_v\beta_w - \alpha_w\beta_v.$$

Если в этих равенствах отбросить члены выше первой степени, то получаются системы, эквивалентные следующей системе:

$$(31)\qquad u_x + v_y + w_z = 0,\qquad u_y - v_x = 0,\qquad u_z - w_x = 0,$$

которая имеет семейство вещественных характеристик, параллельных оси Ox. Наличие вещественных характеристик у линеаризованной системы существенно затрудняет исследование исходных систем (24) и (26).

Система (24) является системой типа Коши–Ковалевской по всем переменным, а система (26) является системой такого типа только по переменной u, но не является системой Коши–Ковалевской ни по переменной v ни по w. Однако для системы (26) удается построить решения в виде рядов по степеням v илбо w.

Решение системы (26) будем искать в виде рядов по степеням

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} w^n x_n(u, v), \qquad y = \sum_{n=0}^{\infty} w^n y_n(u, v), \qquad z = \sum_{n=0}^{\infty} w^n z_n(u, v). \tag{32}$$

Подставив эти ряды в систему (26) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях w, получим соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_n}{\partial u} &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\left[z_{k+1}\frac{\partial y_{n-k}}{\partial v} - y_{k+1}\frac{\partial z_{n-k}}{\partial v}\right], \\ \frac{\partial y_n}{\partial u} &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\left[x_{k+1}\frac{\partial z_{n-k}}{\partial v} - z_{k+1}\frac{\partial x_{n-k}}{\partial v}\right], \\ \frac{\partial z_n}{\partial u} &= \sum_{k=0}^{n} (k+1)\left[y_{k+1}\frac{\partial x_{n-k}}{\partial v} - x_{k+1}\frac{\partial y_{n-k}}{\partial v}\right], \end{aligned} \tag{33}$$

которые перепишем так

$$\begin{aligned} &(n+1)\left(z_{n+1}\frac{\partial y_0}{\partial v} - y_{n+1}\frac{\partial z_0}{\partial v}\right) = \\ &\quad = \frac{\partial x_n}{\partial u} - \left(z_1\frac{\partial y_n}{\partial v} - y_1\frac{\partial z_n}{\partial v}\right) - n\left(z_n\frac{\partial y_1}{\partial v} - y_n\frac{\partial z_1}{\partial v}\right) - X_{n-1}, \\ &(n+1)\left(x_{n+1}\frac{\partial z_0}{\partial v} - z_{n+1}\frac{\partial x_0}{\partial v}\right) = \\ &\quad = \frac{\partial y_n}{\partial u} - \left(x_1\frac{\partial z_n}{\partial v} - z_1\frac{\partial x_n}{\partial v}\right) - n\left(x_n\frac{\partial z_1}{\partial v} - z_n\frac{\partial x_1}{\partial v}\right) - Y_{n-1}, \\ &(n+1)\left(y_{n+1}\frac{\partial x_0}{\partial v} - x_{n+1}\frac{\partial y_0}{\partial v}\right) = \\ &\quad = \frac{\partial z_n}{\partial u} - \left(y_1\frac{\partial x_n}{\partial v} - x_1\frac{\partial y_n}{\partial v}\right) - n\left(y_n\frac{\partial x_1}{\partial v} - x_n\frac{\partial y_1}{\partial v}\right) - Z_{n-1}, \end{aligned} \tag{34}$$

где

$$\begin{aligned} X_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-2} (k+1)\left(z_{k+1}\frac{\partial y_{n-k}}{\partial v} - y_{k+1}\frac{\partial z_{n-k}}{\partial v}\right), \\ Y_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-2} (k+1)\left(x_{k+1}\frac{\partial z_{n-k}}{\partial v} - z_{k+1}\frac{\partial x_{n-k}}{\partial v}\right), \\ Z_{n-1} &= \sum_{k=1}^{n-2} (k+1)\left(y_{k+1}\frac{\partial x_{n-k}}{\partial v} - x_{k+1}\frac{\partial y_{n-k}}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

Для того, чтобы из (34) можно было определить x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}, необходимо и достаточно выполнение равенства

$$\begin{aligned} &\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial x_n}{\partial u} + \frac{\partial y_0}{\partial v}\frac{\partial y_n}{\partial u} + \frac{\partial z_0}{\partial v}\frac{\partial z_n}{\partial u} = \\ &\quad = \frac{\partial y_n}{\partial v}\left(z_1\frac{\partial y_0}{\partial v} - y_1\frac{\partial z_0}{\partial v}\right) - \frac{\partial z_n}{\partial v}\left(y_1\frac{\partial x_0}{\partial v} - x_1\frac{\partial y_0}{\partial v}\right) - \\ &\quad - \frac{\partial x_n}{\partial v}\left(z_1\frac{\partial y_0}{\partial v} - y_1\frac{\partial z_0}{\partial v}\right) + \frac{\partial y_1}{\partial v}\left(z_n\frac{\partial x_0}{\partial v} - x_n\frac{\partial z_0}{\partial v}\right) - \\ &\quad - \frac{\partial z_1}{\partial v}\left(y_n\frac{\partial x_0}{\partial v} - x_n\frac{\partial y_0}{\partial v}\right) - \frac{\partial x_1}{\partial v}\left(z_n\frac{\partial y_0}{\partial v} - y_n\frac{\partial z_0}{\partial v}\right) + \\ &\quad + X_{n-1}\frac{\partial x_0}{\partial v} + Y_{n-1}\frac{\partial y_0}{\partial v} + Z_{n-1}\frac{\partial z_0}{\partial v}. \end{aligned} \tag{35}$$

Рассматривая (34) для $n-1$, получим

$$\begin{aligned} n\left(z_n\frac{\partial y_0}{\partial v} - y_n\frac{\partial z_0}{\partial v}\right) &= \frac{\partial x_{n-1}}{\partial u} + P_{n-1}, \\ n\left(x_n\frac{\partial z_0}{\partial v} - z_n\frac{\partial x_0}{\partial v}\right) &= \frac{\partial y_{n-1}}{\partial u} + Q_{n-1}, \\ n\left(y_n\frac{\partial x_0}{\partial v} - x_n\frac{\partial y_0}{\partial v}\right) &= \frac{\partial z_{n-1}}{\partial u} + R_{n-1}, \end{aligned} \tag{36}$$

где

$$\begin{aligned} P_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\left(z_{k+1}\frac{\partial y_{n-1-k}}{\partial v} - y_{k+1}\frac{\partial z_{n-1-k}}{\partial v}\right), \\ Q_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\left(x_{k+1}\frac{\partial z_{n-1-k}}{\partial v} - z_{k+1}\frac{\partial x_{n-1-k}}{\partial v}\right), \\ R_{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-2} (k+1)\left(y_{k+1}\frac{\partial x_{n-1-k}}{\partial v} - x_{k+1}\frac{\partial y_{n-1-k}}{\partial v}\right). \end{aligned}$$

С учетом (36) условие (35) принимает вид

$$\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial x_n}{\partial u}+\frac{\partial y_0}{\partial v}\frac{\partial y_n}{\partial u}+\frac{\partial z_0}{\partial v}\frac{\partial z_n}{\partial u}+\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_n}{\partial v}+\frac{\partial y_0}{\partial u}\frac{\partial y_n}{\partial v}+\frac{\partial z_0}{\partial u}\frac{\partial z_n}{\partial v}=T_{n-1}, \tag{37}$$

где

$$T_{n-1}=-\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial u}+\frac{\partial y_0}{\partial v}\frac{\partial y_{n-1}}{\partial u}+\frac{\partial z_0}{\partial v}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial u}\right)+\frac{\partial x_0}{\partial v}(X_{n-1}-P_{n-1})+\frac{\partial y_0}{\partial v}(Y_{n-1}-Q_{n-1})+\frac{\partial z_0}{\partial v}(Z_{n-1}-R_{n-1}).$$

Из соотношений (36) и (37) можно определить функции x_n, y_n, z_n. Оставляя в стороне общий случай, ограничимся случаем

$$\frac{\partial z_0}{\partial u}=\frac{\partial z_0}{\partial v}=0,\qquad z|_{w=0}=-h\equiv \mathrm{const}. \tag{38}$$

При выполнении этого условия из (36) находим

$$z_n=\frac{1}{n}\left(\frac{\partial y_0}{\partial v}\right)^{-1}\left[\frac{\partial x_{n-1}}{\partial u}+P_{n-1}\right],\qquad x_n=\lambda y_n-\frac{1}{n}S_{n-1},$$

где

$$\lambda=\frac{\partial x_0}{\partial v}\left(\frac{\partial y_0}{\partial v}\right)^{-1},\qquad S_{n-1}=\left(\frac{\partial y_0}{\partial v}\right)^{-1}\left(\frac{\partial z_{n-1}}{\partial u}+R_{n-1}\right).$$

Подставив эти выражения в (37), получим

$$\frac{\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial v}\right)^2}{\frac{\partial y_0}{\partial v}}\frac{\partial y_n}{\partial u}+\frac{\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v}+\frac{\partial y_0}{\partial u}\frac{\partial y_0}{\partial v}}{\frac{\partial y_0}{\partial v}}\frac{\partial y_n}{\partial v}+\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial \lambda}{\partial u}+\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial \lambda}{\partial v}\right)y_n=\Omega_{n-1}, \tag{39}$$

где

$$\Omega_{n-1}=T_{n-1}+\frac{1}{n}\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial u}+\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial S_{n-1}}{\partial v}\right).$$

При $n=0$ из (32) получаем

$$\frac{\partial x_0}{\partial u}\frac{\partial x_0}{\partial v}+\frac{\partial y_0}{\partial u}\frac{\partial y_0}{\partial v}=0.$$

В силу этого равенства (39) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y_n}{\frac{\partial y_0}{\partial v}}\right)=\frac{\Omega}{\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial v}\right)^2}.$$

Теперь окончательно находим

$$\begin{aligned} x_n&=\frac{\partial x_0}{\partial v}\left\{\int_{u_0}^{u}\frac{\Omega_{n-1}}{\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial v}\right)^2}du+\tau_n(v)\right\}-\frac{1}{n}\left(\frac{\partial y_0}{\partial v}\right)^{-1}\left[\frac{\partial z_{n-1}}{\partial u}-R_{n-1}\right],\\ y_n&=\frac{\partial y_0}{\partial v}\left\{\int_{u_0}^{u}\frac{\Omega}{\left(\frac{\partial x_0}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y_0}{\partial v}\right)^2}du+\tau_n(v)\right\},\\ z_n&=\frac{1}{n}\left(\frac{\partial y_0}{\partial v}\right)^{-1}\left[\frac{\partial x_{n-1}}{\partial u}+P_{n-1}\right],\end{aligned} \tag{40}$$

где u_0 — некоторое фиксированное значение переменной u, $\tau_n(v)$ — произвольная аналитическая функция переменной v. При $n=1$ из (40) в частности получаем

$$x_1=\tau_1(v)\frac{\partial x_0}{\partial v},\qquad y_1=\tau_1(v)\frac{\partial y_0}{\partial v},\qquad z_1=\frac{\partial x_0}{\partial u}\left(\frac{\partial y_0}{\partial v}\right)^{-1}.$$

Соотношения (40) позволяют последовательно определить функции x_n, y_n, z_n. В эти формулы входят произвольные функции

$$\tau_n(v)=y_n\left(\frac{\partial y_0}{\partial v}\right)^{-1}\Bigg|_{u=u_0}.$$

Если x_n, y_n, z_n таковы, что ряды (32) сходятся в окрестности $u=u_0$, $w=0$, то имеем

$$y(u_0,v,w)=\frac{\partial y_0}{\partial v}\Bigg|_{u=u_0}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}w^n\tau_n(v),$$

или

$$\sum_{n=1}^{\infty}w^n\tau_n(v)=\left(\frac{\partial y}{\partial v}\Bigg|_{w=0,\,u=u_0}\right)^{-1}y(u_0,v,w). \tag{41}$$

Теперь займемся исследованием сходимости рядов (32). Для этого систему (26) заменим некоторой более удобной для исследования системой. Система (26) эквивалентна системе

$$x_u = y_v z_w - y_w z_v, \quad z_u = x_v y_w - x_w y_v, \quad x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = 0. \tag{42}$$

Продифференцировав третье уравнение системы (42) по w и умножив результат на y_v, получим

$$y_v x_v x_{uw} + y_v z_v z_{uw} + y_v x_u x_{vw} + y_v^2 y_{uw} + y_v y_u y_{vw} + y_v z_u z_{vw} = 0. \tag{43}$$

Из первых двух уравнений (42) находим

$$\begin{aligned}
x_{uu} &= y_{vu} z_w + y_v z_{wu} - y_{wu} z_u - y_w z_{vu},\\
z_{uu} &= x_{vu} y_w + x_v y_{wu} - x_{wu} y_v - x_w y_{vu},\\
x_{uv} &= y_{vv} z_w + y_v z_{wv} - y_{wv} z_v - y_w z_{vv},\\
z_{uv} &= x_{vv} y_w + x_v y_{wv} - x_{wv} y_v - x_w y_{vv}.
\end{aligned}$$

При помощи этих равенств находим

$$\begin{aligned}
y_v(z_u z_{wv} + x_u x_{vw}) &= z_u x_{uv} - x_u z_{uv} - z_u z_w y_{vv} -\\
&\quad - x_u x_w y_{vv} + z_u z_v y_{wv} + z_u y_w z_{vv} + x_u y_w x_{vv} + x_u x_v y_{wv},\\
y_v(z_v z_{uw} + x_v x_{uw}) &= z_v x_{uu} - x_v z_{uu} -\\
&\quad - z_v z_w y_{vu} - x_v x_w y_{vu} + z_v y_w z_{vu} + x_v y_w x_{vu} + (z_2^v + x_v^2) y_{wu}.
\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (43), получим

$$\begin{aligned}
&(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) y_{wu} - (z_v z_w + x_v x_w) y_{vu} + z_v x_{uu} - x_v z_{uu} +\\
&\quad + (z_v z_{vu} + x_v x_{vu} + y_u y_{vv} + z_u z_{vv} + x_u x_{vv}) y_w + z_u x_{uv} -\\
&\quad - x_u z_{uv} + y_{vw}(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v) = 0.
\end{aligned}$$

В силу третьего уравнения (42) это соотношение принимает вид

$$\begin{aligned}
&(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) y_{wu} - (z_v z_w + x_v x_w) y_{vu} +\\
&\quad + z_v x_{uu} - x_v z_{uu} - y_v y_w y_{uv} + z_u x_{uv} + x_u z_{uv} = 0.
\end{aligned} \tag{44}$$

При помощи первых уравнений системы (42) получаем

$$y_v(z_v z_w + y_v y_w + x_v x_w) y_{vu} = (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) y_w y_{vu} - (z_v x_u - z_u x_v) y_{vu}.$$

Следовательно, имеем

$$\begin{aligned}
&(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)(y_v y_{wu} - y_w y_{vu}) + z_v y_v x_{uu} -\\
&\quad - x_v y_v z_{uu} + y_v z_u x_{uv} - y_v x_u z_{uv} - z_v x_u y_{vu} + z_u x_v y_{vu} = 0,
\end{aligned}$$

или

$$(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) y_v^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y_w}{y_v}\right) - x_v^2 y_v^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{z_u}{x_v y_v}\right) + y_v^2 z_v^2 \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_u}{y_v z_v}\right) = 0,$$

откуда находим

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{y_w}{y_v}\right) = \frac{x_v^2}{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{z_u}{x_v y_v}\right) - \frac{z_v}{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_u}{y_v z_v}\right). \tag{45}$$

Проинтегрировав (45) по u и заменив третье уравнение системы (42) полученным соотношением, получим следующую систему

$$x_u = y_v z_w - y_w z_v, \quad z_u = x_v y_w - x_w y_v,$$

$$\frac{y_w}{y_v} = \int_{u_0}^{u} \left\{ \frac{x_v^2}{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{z_u}{x_v y_v}\right) - \frac{z_v^2}{x_v^2 + y_v^2 + z_v^2} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_u}{z_v y_v}\right) \right\} du + \psi(v, w), \tag{46}$$

где ψ — произвольная аналитическая функция переменных v и w.

Система уравнений (46) является следствием системы (42), однако она не эквивалентна системе (42) в том смысле, что каждое решение системы (42) при подходящем подборе функции ψ является решением системы (46), но не всякое решение системы (46) и не при любом выборе функции ψ должно удовлетворять системе (42). Преимуществом системы (46) является то, что при $y_v \neq 0$ ее можно разрешить относительно производных x_w, y_w, z_w, т.е. она является системой типа Коши–Ковалевской относительно переменной w. Этот факт позволяет строить решения системы (46) в виде рядов по степеням w, а сходимость этих рядов доказывать методом мажорант. Следовательно, при помощи системы (46) можно построить некоторую мажорантную систему, решения которой мажорируют ряды (32).

Будем доказывать сходимость рядов вида (32), удовлетворяющих системе (46) методом мажорант. Для этого два первых уравнения системы (46) разрешим относительно z_w и x_w

$$z_w = y_v^{-1}(x_u + y_w z_v), \quad x_w = y_v^{-1}(-z_u + x_v y_w).$$

Обозначив мажоранту y_v^{-1} через Ω, мажорантные уравнения для этих уравнений можно записать следующим образом:

$$z_w = \Omega(x_u + y_w z_v), \quad x_w = \Omega(z_u + y_w x_v).$$

Мажоранты функций x, y, z обозначим X, Y, Z соответственно. Очевидно, что можно считать $X = Z$. Теперь для последних уравнений имеем одно мажорантное уравнение

$$X_w = \Omega(X_u + Y_w X_v). \tag{47}$$

Построим далее мажорантное уравнение для третьего уравнения системы (46). Имеем

$$\frac{x_v^2}{x_v^2+y_v^2+z_v^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{z_u}{x_v y_v}\right) - \frac{z_v^2}{x_v^2+y_v^2+z_v^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{x_u}{y_v z_v}\right) =$$

$$= y_v^{-2}(x_v^2+y_v^2+z_v^2)^{-1}\left[z_{uu}x_v y_v - z_u\frac{\partial}{\partial u}(x_v y_v) - x_{uu}z_v y_v + x_u\frac{\partial}{\partial u}(z_v y_v)\right] \ll$$

$$\ll H\frac{\partial}{\partial u}(Z_u X_v Y_v + X_u Y_v Z_v),$$

где знак $\ll$ обозначает мажорирование, а H — мажоранту функции $y_v^{-2}(x_v^2+y_v^2+z_v^2)^{-1}$. Очевидно, что

$$H\frac{\partial}{\partial u}(Z_u X_v Y_v + X_u Z_v Y_v) \ll H\frac{\partial}{\partial u}(Z_u X_v Y_v + X_u Z_v Y_v) +$$

$$+(Z_u X_v Y_v + X_u Z_v Y_v)\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}[H(Z_u X_v Y_v + X_u Z_v Y_v)].$$

Следовательно, с учетом $X = Z$ для мажоранты подинтегрального выражения в третьем уравнении (46) имеем выражение $2\dfrac{\partial}{\partial u}(HX_u X_v Y_v)$.

Функции x, y, z, представленные рядами (32) будем рассматривать в окрестности точки $(u_0, v_0, 0)$, т.е. будем их представлять рядами по степеням $u-u_0$, $v-v_0$ и w. Теперь для интеграла, фигурирующего в третьем уравнении (46) имеем мажоранту

$$2HX_u X_v Y_v + [2HX_u X_v Y_v]|_{u=u_0} \ll 4HX_u X_v Y_v.$$

Последнее соотношение мажорирования получается в силу того, что выражение $HX_u X_v Y_v$ пердставляет собой ряд по степеням $u-u_0$, $v-v_0$ и w, поэтому имеет место очевидное соотношение мажорирования

$$[HX_u X_v Y_v]|_{u=u_0} \ll HX_u X_v Y_v.$$

Окончательно для системы (46) получаем мажорантную систему

$$X_w = \Omega(X_u + Y_w X_v), \qquad Y_w = 4HY_v^2 X_u X_v + \Psi(v, w), \tag{48}$$

где Ψ — мажоранта функции ψ.

Для того, чтобы исследовать систему (48), необходимо знать структуру функций Ω и H. Положим $Y = av + Q(u, v, w)$, где

$$a = |y_v|_{u=u_0,\, v=v_0,\, w=0}.$$

Теперь из системы (48) легко получаем

$$\begin{aligned} X_w &= (a-Q_v)^{-1}(X_u + Q_w X_v), \\ Q_w &= 4(a-Q_v)^{-2}[a^2 - X_v^2 - Q_v^2 - 2aQ_v]^{-1} X_u X_v (a+Q_v)^2 + \Psi(v, w). \end{aligned} \tag{49}$$

Система (49) является системой типа Коши–Ковалевской относительно переменной w, поэтому теорема Коши–Ковалевской гарантирует существование мажорант X и Q по крайней мере для достаточно малых $|v-v_0|$, $|u-u_0|$ и $|w|$. Из существования мажорант следует сходимость рядов (32) в окрестности точки $(u_0, v_0, 0)$.

При определении аналога конформных отображений плоских областей для трехмерного пространства М. А. Лаврентьев исходил из гидродинамического смысла конформных отображений [3]. Однако аналогия между конформными отображениями и гармоническими по М. А. Лаврентьеву отображениями оказывается гораздо глубже. Эти отображения являются довольно естественным аналогом плоских конформных отображений и с точки зрения действия их на линейные дифференциальные операторы с частными производными [8].

Рассмотрим эллиптическое уравнение

$$u_{zz} + au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + a_1 u_x + a_2 u_y + \beta u_z = 0, \tag{50}$$

коэффициенты которого являются аналитическими в некоторой области D функциями переменных x, y, z. Пусть замена переменных

$$\zeta = \zeta(x, y, z), \qquad \xi = \xi(x, y, z), \qquad \eta = \eta(x, y, z) \tag{51}$$

уравнение (50) преобразует в уравнение

$$Hu_{\zeta\zeta} + Au_{\xi\xi} + 2Bu_{\xi\eta} + Cu_{\eta\eta} + p_1 u_\xi + p_2 u_\eta + qu_\zeta = 0. \tag{52}$$

Непосредственным подсчетом проверяется, что для того, чтобы замена (51) переводила (50) в (52), функции ξ, η, ζ должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{aligned} \zeta_z &= \lambda(ac-b^2)(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x), \\ \zeta_x &= \lambda\{-b(\xi_z\eta_x - \eta_z\xi_x) + c(\xi_y\eta_z - \xi_z\eta_y)\}, \\ \zeta_y &= \lambda\{a(\xi_z\eta_x - \eta_z\xi_x) - b(\xi_y\eta_z - \xi_z\eta_y)\}, \end{aligned} \tag{53}$$

где λ — произвольная аналитическая в области D функция переменных x, y, z. Из системы (53) для функции ζ получается следующее уравнение:

(54) $$\frac{1}{\lambda\Delta}\{\zeta_{zz}+a\zeta_{xx}+2b\zeta_{xy}+c\zeta_{yy}\}+\gamma_1\zeta_x+\gamma_2\zeta_y+\delta\zeta_z=0,$$

где

$$\Delta=ac-b^2,\qquad \gamma_1=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b}{\lambda\Delta}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a}{\lambda\Delta}\right),$$

$$\gamma_2=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c}{\lambda\Delta}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b}{\lambda\Delta}\right),\qquad \delta=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\lambda\Delta}\right).$$

Непосредственным подсчетом находим

$$AC-B^2=(ac-b^2)(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x)^2+a(\xi_z\eta_x-\xi_x\eta_z)^2-$$
$$-2b(\xi_y\eta_z-\xi_z\eta_y)(\xi_z\eta_x-\xi_x\eta_z)+c(\xi_y\eta_z-\xi_z\eta_y)^2,$$
$$H=\lambda^2(ac-b^2)(AC-B^2),\qquad J=\lambda(AC-B^2),$$

где J — якобиан замены переменных (51). Из этих соотношений следует, что если положить

(55) $$\lambda(ac-b^2)=1,$$

то будет выполняться равенство $H=J$. При таком выборе λ система (53) принимает вид

(56) $$\begin{aligned}\zeta_z&=\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x,\\ \zeta_x&=-\frac{b}{ac-b^2}(\xi_z\eta_x-\eta_z\xi_x)+\frac{c}{ac-b^2}(\xi_y\eta_z-\xi_z\eta_y),\\ \zeta_y&=\frac{a}{ac-b^2}(\xi_z\eta_x-\eta_z\xi_x)-\frac{b}{ac-b^2}(\xi_y\eta_z-\xi_z\eta_y).\end{aligned}$$

Из равенства (55) также следует выполнение равенства

(57) $$H^{-1}(AC-B^2)=ac-b^2.$$

Если в уравнении (50) коэффициент при u_{zz} отличен от единицы и равен h, то, заменив в системе (56) первое уравнение уравнением

$$\zeta_z=h^{-1}(\xi_x\eta_y-\xi_y\eta_x),$$

получим систему уравнений, которая определяет замену переменных, преобразующую уравнение (50) в уравнение такого же вида (52), причем имеет место равенство

(58) $$h^{-1}(ac-b^2)=H^{-1}(AC-B^2).$$

В том случае, когда $a=c=1$, $b=0$, главная часть уравнения (50) совпадает с оператором Лапласа, а система (56) превращается в систему, описывающую гармонические по М. А. Лаврентьеву отображения. Из равенства (57) следует, что гармонические по М. А. Лаврентьеву отображения преобразуют уравнение второго порядка, главная часть которого совпадает с оператором Лапласа, в уравнение (52) так, что $AC-B^2=H$.

Отображение χ, задаваемое равенствами

$$\zeta=\zeta(x,y,z),\qquad \xi=\xi(x,y,z),\qquad \eta=\eta(x,y,z),$$

где функции ξ, η, ζ удовлетворяют системе (53), будем называть потенциальным отображением, соответствующим уравнению (50). Функцию ζ, которая теперь удовлетворяет уравнению

(59) $$\zeta_{zz}+a\zeta_{xx}+2b\zeta_{xy}+c\zeta_{yy}+(b_y+a_x)\zeta_x+(c_y+b_x)\zeta_y=0$$

будем называть потенциалом, соответствующим отображению χ. Функции ξ и η удовлетворяют уравнению

(60) $$\zeta_z w_z+(a\zeta_x+b\zeta_y)w_x+(b\zeta_x+c\zeta_y)w_y=0.$$

Требование того, чтобы уравнение (50) преобразовывалось в уравнение (52), и выполнение равенства (57) полностью характеризуют потенциальные отображения, соответствующие уравнению (50). В том случае, когда (50) является уравнением Лапласа, приведенная здесь интерпретация потенциальных отображений полностью эквивалентна интерпретации М. А. Лаврентьева. Таким образом подход к теории отображений трехмерных областей с точки зрения действия этих отображений на эллиптические операторы приводит к не менее естественному аналогу конформных отображений плоских областей, чем обобщение гидродинамической интерпретации. Примечательно то, что оба эти подхода приводят к одному и тому же классу отображений трехмерных областей.

Рассмотрим некоторые классы гармонических по М. А. Лаврентьеву отображений, связанных с функциями Грина и Неймана простых областей. Такие отображения можно интерпретировать как некоторые аналоги дробно-линейных отображений плоских областей. Дробно-линейные отображения плоских областей можно определить следующим образом. Рассмотрим конформное отображение круга K_1 на другой круг K_2, а затем это отображение конформно продолжим на всю плоскость. Очевидно, что в плоском случае такое построение всегда осуществимо и таким способом можно получить все дробно-линейные отображения. Такой способ определения дробно-линейных отображений можно обобщить на трехмерный случай.

В формулах (23) в качестве функции u_1 возьмем функцию Грина $G_0 = (x^2+y^2+z^2)^{-1/2}-1$ единичного шара Σ с полюсом в начале координат, а в качестве u_2 возьмем функцию Грина

$$G_1 = \left[x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{\nu}R\right)^2\right]^{-1/2} - \nu[x^2+y^2+(z-\nu R)^2]^{-1/2}$$

шара $\Sigma(R)$: $\{x^2+y^2+z^2 < R^2\}$ с полюсом в точке $\zeta = (0, 0, \nu^{-1}R)$, $\nu > 1$. В качестве функций v_1 и v_2 возьмем функцию $\operatorname{arctg}(y/x)$. Из системы (24) теперь имеем

$$w_1 = z(x^2+y^2+z^2)^{-1/2},$$

$$w_2 = \frac{z-\nu^{-1}R}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\nu^{-1}R)^2}} - \frac{\nu(z-\nu R)}{\sqrt{x^2+y^2+(z-\nu R)^2}}.$$

Отображение χ, которое задается соотношениями (23) при таком подборе функций будем называть гриновским. Это отображение переводит поверхности уровня функции Грина G_0 в поверхности уровня функции Грина G_1, а ортогональные траектории поверхностей уровня G_0 переводит в ортогональные траектории поверхностей уровня G_1.

Функция G_1 симметрична относительно оси Oz и непосредственным подсчетом проверяется, что она имеет критическую точку $Y = (0, 0, -(\sqrt{\nu}+1+\sqrt{\nu^{-1}})R)$, т.е. в этой точке $\operatorname{grad} G_1 = 0$. Точка Y лежит вне шара $\Sigma(R)$, а функция G_1 в этой точке принимает значение

$$\gamma = -\frac{\nu}{R}\cdot\frac{\sqrt{\nu}-1}{\nu\sqrt{\nu}+\nu+\sqrt{\nu}+1}.$$

Непосредственным подсчетом находим, что в точке Y выполняются соотношения

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 G_1}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 G_1}{\partial y\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial^2 G_1}{\partial z^2} > 0, \qquad \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2} < 0,$$

из которых следует, что точка Y является невырожденной критической точкой для G_1, причем траектории поля $\operatorname{grad} G_1$, выходящие из точки Y составляют гладкую линию, а входящие в Y заполняют некоторую гладкую двумерную поверхность W. Касательная к W в точке Y плоскость перпендикулярна оси Oz. Эта поверхность проходит через точку $(0, 0, \nu R)$.

Отображение χ гомеоморфно продолжается лишь на область, ограничиваемую поверхностью $G_1 = \gamma$ и содержащуюся в ограниченной боласти, ограничиваемой поверхностью W. В частности, если выполняется неравенство

(61)
$$R \leqslant \frac{\nu(\sqrt{\nu}-1)}{\nu\sqrt{\nu}+\nu+\sqrt{\nu}+1},$$

то χ гомеоморфно отображает все пространство R^3 на некоторую его часть, причем образы бесконечно удаленых точек заполняют двумерную поверхность $G_1 = -1$, $\gamma \geqslant -1$.

Если вместо функции G_0 рассмотреть функцию

$$G_\lambda = \left[x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{\lambda}\right)^2\right]^{-1/2} - \lambda[x^2+y^2+(z-\lambda)^2]^{-1/2}, \qquad \lambda > 1,$$

и рассматривать гармоническое по М. А. Лаврентьеву отображение χ единичного шара Σ на шар $\Sigma(R)$, определяемое функциями G_1 и G_λ, то необходимым условием продолжимости этого отображения до гармонического по М. А. Лаврентьеву гомеоморфизма всего пространства является совпадение критических значений G_1 и G_λ, т.е. выполнение равенства

(62)
$$R = \frac{\nu}{\lambda}\cdot\frac{\sqrt{\nu}-1}{\sqrt{\lambda}-1}\cdot\frac{\lambda\sqrt{\lambda}+\lambda+\sqrt{\lambda}+1}{\nu\sqrt{\nu}+\nu+\sqrt{\nu}+1}.$$

Более детальный анализ поведения векторных полей $\operatorname{grad} G_1$ и $\operatorname{grad} G_\lambda$ в окрестностях соответствующих критических точек G_1 и G_λ показывает, что (62) является и достаточным условием гомеоморфной продолжимости гриновского отображения χ.

В плоском случае как внутренность односвязной области, так и ее внешность всегда можно конформно отобразить на внутренность единичного круга так, чтобы любая наперед заданная точка перешла в центр круга, а всякое конформное отображение единичного круга на себя продолжается до конформного гомеоморфизма всей плоскости на себя. Для гармонических по М. А. Лаврентьеву отображений трехмерных областей все эти факты могут нарушаться [9].

Покажем, что внешность Ω единичного шара Σ не может быть гомеоморфно отображена гриновским отображением на внутренность Σ так, чтобы заданная точка $X_0 \in \Omega$ перешла в центр O шара Σ. Без ущерба для общности можно считать $X_0 = (0, 0, \lambda)$, $\lambda > 1$. Функция Грина области Ω с полюсом X_0 имеет вид

$$g = [x^2+y^2+(z-\lambda)^2]^{-1/2} - \frac{1}{\lambda}\left[x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{\lambda}\right)^2\right]^{-1/2}.$$

Функция g имеет невырожденную критическую точку $Y_0 = (0, 0, -1-\sqrt{\lambda}-\lambda)$, в которую входят две траектории поля $\operatorname{grad} G$, а траектории, выходящие из этой точки, заполняют двумерную осесимметричную поверхность N, проходящую через X_0. В критической точке g принимает значение $(\sqrt{\lambda}-1)(\lambda\sqrt{\lambda}+\lambda+\sqrt{\lambda}+1)^{-1}$. Функция Грина G_0 единичного шара Σ с полюсом в начале координат не имеет критических точек, поэтому гриновское отображение, определяемое функциями g и G_0 не может быть гомеоморфизмом.

Функция Грина внешности $\Omega(R)$ шара радиуса R с полюсом в точке $x=y=0$, $z=\nu R$, $\nu>1$,

$$G=[x^2+y^2+(z-R\nu)^2]^{-1/2}-\frac{1}{\nu}\left[x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{\nu}R\right)^2\right]^{-1/2}$$

имеет критическую точку $Y=\left(0,0,-R(\sqrt{\nu}+1+\sqrt{\nu^{-1}})\right)$ и в этой точке принимает значение

$$G_k=\frac{1}{R}\cdot\frac{\sqrt{\nu}-1}{\nu\sqrt{\nu}+\nu+\sqrt{\nu}+1}.$$

Характер этой критической точки такой же, как и критической точки функции G_1.

Очевидно, что гриновское отображение внешностей $\Omega(R_1)$ и $\Omega(R_2)$ двух шаров, определяемое функциями Грина этих областей будет гомеоморфизмом только в том случае, когда совпадают критические значения соответствующих функций Грина. Следовательно, должно выполняться равенство

$$\frac{R_2}{R_1}=\frac{\sqrt{\nu_2}-1}{\sqrt{\nu_1}-1}\cdot\frac{\nu_1\sqrt{\nu_1}+\nu_1+\sqrt{\nu_1}+1}{\nu_2\sqrt{\nu_2}+\nu_2+\sqrt{\nu_2}+1}, \tag{63}$$

где $X_1=(0,0,\nu_1R_1)$ и $X_2=(0,0,\nu_2R_2)$ — полюсы функций Грина, определяющих отображение. Из-за того, что поля градиентов функций G_1 и G_2, определяющих отображение, в окрестности критических точек имеют одинаковую структуру, условие (63) является и достаточным условием гомеоморфности рассматриваемого гриновского отображения.

Теперь рассмотрим некоторые вопросы, связанные с гармоническими по М. А. Лаврентьеву отображениями, определяемыми функциями Неймана некоторых областей. Рассмотрим гармоническое по М. А. Лаврентьеву отображение полупространства $z>0$ с выброшенным полушаром, т.е. области $H(R)$: $\{z>0,\ x^2+y^2+z^2>R^2\}$, на полупространство H: $\{z>0\}$, определяемое функциями Неймана этих областей.

Функция Неймана области $H(R)$ с полюсом в точке $(0,0,z_0)$, $z_0>R$, имеет вид

$$\begin{aligned}N_1(x,y,z;\ z_0,R)&=[x^2+y^2+(z-z_0)^2]^{-1/2}+[x^2+y^2+(z+z_0)^2]^{-1/2}+\\&+\frac{R}{z_0}\left\{\left[x^2+y^2+\left(z-\frac{R^2}{z_0}\right)^2\right]^{-1/2}-\left[x^2+y^2+\left(z+\frac{R^2}{z_0}\right)^2\right]^{-1/2}\right\}+\frac{1}{R}\times\\&\times\ln\frac{(z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})^2}{\left[z-\frac{R^2}{z_0}+\sqrt{x^2+y^2+\left(\frac{R^2}{z_0}-z\right)^2}\right]\cdot\left[z+\frac{R^2}{z_0}+\sqrt{x^2+y^2+\left(\frac{R^2}{z_0}+z\right)^2}\right]},\end{aligned}$$

а функция Неймана полупространства H с полюсом в точке $(0,0,z_1)$ $z_1>0$, имеет вид

$$N_0(x,y,z;\ z_1)=[x^2+y^2+(z-z_1)^2]^{-1/2}+[x^2+y^2+(z+z_1)^2]^{-1/2}.$$

Рассмотрим следы этих функций на границах соответствующих областей. Имеем

$$\nu_0(x,y,z_1)=N_0|_{z=0}=2(x^2+y^2+z^2)^{-1/2},$$

$$\nu_1(x,y,z;\ z_0,R)=\begin{cases}2(R^2-2zz_0+z_0^2)^{-1/2}+\dfrac{1}{R}\Bigl\{2\ln(z+R)-\\ -\ln\left[z-\dfrac{R^2}{z_0}+\dfrac{R}{z_0}\sqrt{z_0^2-2z_0z+R^2}\right]-\\ -\ln\left[z+\dfrac{R^2}{z_0}+\dfrac{R}{z_0}\sqrt{z_0^2+2z_0z+R^2}\right]\Bigr\}, & x^2+y^2\leqslant R^2,\\ 2(x^2+y^2+z_0^2)^{-1/2}, \quad x^2+y^2\geqslant R^2, & z=0.\end{cases}$$

Функция ν_0 достигает максимума в точке $(0,0)$ равного $\gamma(H)=2z_1^{-1}$, а функция ν_1 достигает максимума, равного

$$\gamma\bigl(H(R)\bigr)=\frac{2}{z_0-R}+\frac{1}{R}\ln\left(1+\frac{R^2}{z_0^2-R^2}\right)$$

в точке $(0,0,R)$. Обе эти функции положительны и на бесконечности стремятся к нулю, т.е. можно считать, что минимума, равного нулю, они достигают на бесконечности.

Гармоническое по М. А. Лаврентьеву отображение χ области $H(R)$ иа H, определяемое функциями N_0 и N_1 является гомеоморфизмом лишь при выполнении условия

$$\gamma(H)=\gamma\bigl(H(R)\bigr) \tag{64}$$

по тем же причинам, что и в случае гриновских отображений. Если же $\gamma(H)<\gamma\bigl(H(R)\bigr)$, то χ отображает область $H(R)$ на полупространство

H с выброшенным отрезком $x = y = 0$, $0 < z \leqslant l$, $l = \gamma(H(R)) - \gamma(H)$. Следовательно, если полюсы функций N_0 и N_1 совпадают, то определяемое ими отображение χ, не может быть гомеоморфизмом $H(R)$ на H, так как

$$\frac{1}{z_0} < \frac{1}{z_0 - R} + \frac{1}{2R} \ln\left(1 + \frac{R^2}{z_0^2 - R^2}\right) \quad \text{при } z_0 > R.$$

Пусть $z_1 = \mu R$, $z_0 = \lambda R$, тогда для гомеоморфности χ из (64) получаем условие

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{\lambda - 1} + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda^2 - 1}\right), \tag{65}$$

определяющее величину μ. Из (65) следует неравенство

$$\mu < \lambda - 1 \tag{66}$$

которое означает, что $z_1 < z_0 - R$, т.е. для того, чтобы отображение χ было гомеоморфизмом, полюс функции Неймана N_0 области H необходимо брать ближе к границе области чем полюс функции Неймана N_1 области $H(R)$.

Рассмотрим теперь более общую ситуацию. Пусть D — область, гомеоморфная либо полупространству либо внешности шара, с границей Γ, кривизна которой непрерывна. Пусть $N(X, X_0)$ — функция Неймана области D с полюсом $X_0 \in D$. Функция N имеет вид [10]

$$N(X, X_0) = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2} + h(X, X_0), \tag{67}$$

где $h(X, X_0)$ — регулярная в области D гармоническая функция, удовлетворяющая условию

$$\left.\frac{\partial h}{\partial n}\right|_{\Gamma} = -\frac{\partial}{\partial n} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2},$$

где n — внутренняя по отношению к D нормаль поверхности Γ.

Функцию $N(X, X_0)$ будем называть *невырожденной*, если все ее критические точки в $D \cup \Gamma$ являются невырожденными.

Функция $N(X, X_0)$ неотрицательна в замкнутой области $D \cup \Gamma$, причем она положительна во всех конечных точках $D \cup \Gamma$, а

$$\lim_{X \to \infty} N(X, X_0) = 0.$$

То что этот предел равен нулю очевидно в силу (67) и регулярности h в D. Из-за

$$\frac{\partial N}{\partial n} = 0 \quad \text{на } \Gamma$$

функция N не может достигать отрицательного минимума на Γ в силу принципа Заремба–Жиро. В силу принципа максимума для гармонических функций и того, что $N(X_0, X_0) = +\infty$, эта функция не может достигать отрицательного минимума и внутри D.

Обозначим через $\nu(Y, X_0)$ след функции $N(X, X_0)$ на поверхности Γ. В силу сказанного выше функция $\nu(Y, X_0)$ достигает положительного максимума $\tau(D, X_0)$ в некоторой конечной точке $Y_0 \in \Gamma$.

Будем считать, что поверхность Γ является вещественно-аналитической. Теперь функция $N(X, X_0)$ аналитически продолжается через поверхность Γ в некоторую полную окрестность $U(Y_0)$ точки Y_0. Если функция $N(X, X_0)$ является невырожденной, то критическая точка Y_0 является невырожденной критической точкой функции $N(X, X_0)$. Функцию N в окрестности точки Y_0, которую без ограничения общности можно считать началом координат, можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд [11]

$$N(X, X_0) = \tau(D, X_0) + p_2(X) + \sum_{k=3}^{\infty} p_k(X) \tag{68}$$

по однородным гармоническим полиномам $p_k(X)$. Так как критическая точка Y_0 является невырожденной для $N(X, X_0)$, то линейной заменой переменных x, y, z однородный гармонический полином $p_2(X)$ можно привести к виду

$$p_2(X) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) z^2, \quad \lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0.$$

Следовательно, после подходящей линейной замены переменных разложение (68) можно привести к виду

$$N(X, X_0) = \tau(D, X_0) + \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) z^2 + \sum_{k=3}^{\infty} p_k(X),$$
$$\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0.$$

Очевидно, что в окрестности начала координат имеем $\sum_{k=3}^{\infty} p_k(X) = O(r^3)$, где r — расстояние от начала координат до точки X.

Из представления (69) следует [12], что поверхности

$$P\colon \{N(X, X_0) = \tau(D, X_0)\}, \qquad Q\colon \left\{x\frac{\partial N}{\partial x} + y\frac{\partial N}{\partial y} + z\frac{\partial N}{\partial z} = 0\right\}$$

проходят через начало координат, а конус $K\colon \{\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) z^2 = 0\}$ состоит из прямых, проходящих через начало координат и касательных к этим поверхностям в начале координат.

Рассмотрим сферу $S(\varrho)\colon \{x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2\}$. Обозначим через $D(\varrho)$ пересечение области D с областью $x^2 + y^2 + z^2 > \varrho^2$, т.е. область D, из которой выброшен кусок шара. Через $S^{-}(\varrho)$ обозначим часть этой сферы, лежащую в области D. Пусть

$$\gamma = P \cap S^{-}(\varrho), \quad \delta = Q \cap S^{-}(\varrho), \quad a = K \cap S^{-}(\varrho).$$

Очевидно, что кривые γ и δ лежат в окрестности окружности a. Из представления (69) также следует, что на сферической шапочке $S_0(\varrho)$, ограничиваемой окружностью a, найдется хотя бы одна точка Z такая, что в этой точке $N > \tau(D, X_0)$ и $\operatorname{grad} N$ в этой точке направлен по внутренней относительно области $D(\varrho)$ нормали к $S^{-}(\varrho)$.

Обозначим через $N_\varrho(X, X_0)$ функцию Неймана области $D(\varrho)$ с полюсом X_0. Очевидно, что функция $\omega(X, X_0) = N(X, X_0) - N_\varrho(X, X_0)$ является регулярной в области $D(\varrho)$ гармонической функцией и стремится к нулю на бесконечности, причем всюду на границе $D(\varrho)$, кроме $S^{-}(\varrho)$, имеем $\dfrac{\partial \omega}{\partial n} = 0$. Поэтому положительного максимума и отрицательного минимума ω может достигать только на $S^{-}(\varrho)$.

Из представления (69) для N следует, что в точке Z отрицательного минимума функции ω при достаточно малом ϱ имеем $N > \tau(D, X_0)$, поэтому $\tau(D, X_0) < N_\varrho(Z, X) \leqslant \tau(D(\varrho), X_0)$. Если бы минимум функции ω был положительным и равнялся бы $\sigma > 0$, то поверхность уровня $\omega = \sigma$ ограничивала бы некоторую подобласть в области $D(\varrho)$ и $\omega \equiv \sigma$. Следовательно, минимум ω отрицателен. Отсюда следует справедливость следующего утверждения.

При любой бесконечно малой внутренней вариации области D, гомеоморфной внешности шара или полупространству, либо

$$\tau(D, X_0) < \tau(D_\delta, X_0),$$

где D_δ — проварьированная область, либо всюду в D_δ выполняется неравенство

$$N(X, X_0) > N_\delta(X; X_0),$$

где N_δ — функция Неймана области D_δ.

В связи с этим утверждением и рассмотренными выше простыми примерами встает вопрос, существуют ли бесконечно малые внутренние вариации области D, для которых выполняется последнее неравенство. Отрицательный ответ на этот вопрос давал бы некоторый вариационный принцип для функции Неймана.

Литература

[1] G. Darboux, *Leçons sur les systemès orthogonaux et les coordonnes curvilignes*, Gauthier-Villars, Paris 1898.

[2] П. К. Рашевский, *Введение в Риманову геометрию и тензорный анализ*, М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1936.

[3] М. А. Лаврентьев, *Теория квазиконформных отображений*, Труды 3-го Всесоюзн. матем. съезда т. 3, 198–208.

[4] —, *О некоторых краевых задачах для систем эллиптического типа*, Сиб. матем. журн. 3 (1962), 715–728.

[5] —, *О некоторых задачах движения жидкости при наличии свободных поверхностей*, ПММ 30 (1966), 177–182.

[6] J. J. Gergen, *Mapping of a general type of three-dimensional region on a sphere*, Amer. Journ. Math. 52 (1930), 197–224.

[7] С. Лефшец, *Геометрическая теория дифференциальных уравнений*, Москва 1961.

[8] А. Янушаускас, *Об одном трехмерном аналоге системы Бельтрами*, Докл. Акад. Наук СССР 243 (1978), 592–594.

[9] —, *Гармонические отображения областей, ограничиваемых сферами*, Докл. Акад. Наук СССР 205 (1972), 1313–1315.

[10] P. R. Garabedian, *Partial differential equations*, Wiley, New York–London–Sydney 1964.

[11] Р. Курант, *Уравнения с частными производными*, „Мир", Москва 1965.

[12] O. D. Kellogg, *Foundations of potential theory*, Dover, New York 1953.

Presented to the Semester
Partial Differential Equations
September 11–December 16, 1978