References

[1] J. P. A u b i n, *Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels*, Bull. Soc. Math. France Mém. 12 (1967), pp. 1–139.
[2] —, *Approximation of elliptic boundary-value problems*, Wiley-Interscience, New York 1972.
[3] H. B r e z i s, *Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 18 (1968), pp. 115–175.
[4] F. E. B r o w d e r, *On the unification of the calculus of variations and the theory of monotone nonlinear operators in Banach-spaces*, Proc. Nat. Acad. Scien. 56 (1966), pp. 419–425.
[5] P. H. H a r t m a n n, and G. S t a m p a c c h i a, *On some nonlinear elliptic differential functional equations*. Acta Math. 115 (1966), pp. 271–310.
[6] R. K l u g e, *Zur numerischen Approximation von Eigenfunktionen in nichtlinearen Eigenwertproblemen*, Mber. Dt. Akad. Wiss. 11 (1969), pp. 811–818.
[7] —, *Zur approximativen Lösung nichtlinearer Variationsungleichungen*, Mber. Dt. Akad. Wiss. 12 (1970), pp. 120–134.
[8] —, *Zur approximativen Lösung konvexer Minimumprobleme mit Nebenbedingungen und nichtlinearer Variationsungleichungen über Folgen linearer algebraischer Gleichungssysteme*, Math. Nachr. 48 (1971), pp. 341–352.
[9] R. K l u g e, *Näherungsverfahren zur approximativen Lösung nichtlinearer Variationsungleichungen*, Math. Nachr. 51 (1971), pp. 343–356.
[10] —, *Über eine Klasse abstrakter Differentialgleichungen beliebiger Ordnung im Banach-Raum*, Mber. Dt. Akad. Wiss. 14 (1972), pp. 731–740.
[11] —, *Näherungsverfahren für ein Problem der optimalen Steuerung mit abstrakten Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Nachr. 54 (1972), pp. 229–248.
[12] —, *Näherungsverfahren für einige nichtlineare Probleme*, Proc. of the Summer School on nonlinear operators, Neuendorf/Hiddensee (GDR) (1972), pp. 133–146.
[13] —, *Zur optimalen Steuerung mit parabolischen partiellen Differentialgleichungen*.
[14] —, *Variational inequalities on solution sets of variational inequalities*.
[15] —, *Optimal control with minimum problems and variational inequalities*, Lecture Notes in Computer Science No. 27, Springer-Verlag, 1975, pp. 377–382.
[16] —, *Nichtlineare Operatorungleichungen und Extremalaufgaben*. Theorie und Näherungsverfahren.
[17] —, and G. B r u c k n e r, *Iterationsverfahren bei Folgen von Abbildungen und nichtlineare Probleme mit monotonen Operatoren*, Math. Nachr. 54 (1972), pp. 335–353.
[18] —, —, *Iterationsverfahren für einige nichtlineare Probleme mit Nebenbedingungen*, ibid. 56 (1973), pp. 345–369.
[19] —, —, *Über einige Klassen nichtlinearer Differentialgleichungen und -ungleichungen im Hilbert-Raum*, Math. Nachr. 64 (1974), pp. 5–32.
[20] J. L. L i o n s, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod-Gauthier-Villars. Paris 1969.
[21] —, *О неравенствах в частных преизводных*, УМН XXVI (1971), pp. 205–263.
[22] U. M o s c o, *Convergence of convex sets and solutions of variational inequalities*, Advances in Mathematics 3 (1969), pp. 510–585.
[23] M. S i b o n y, *Sur l'approximation d'équations et inéquations aux derivées partielles non linéaires de type monotone*, J. Math. Anal. Appl. 34 (1971), pp. 502–564.
[24] R. T e m a m, *Analyse Numérique*, Presses Universitaires de France, 1970.

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 1

DEUX REMARQUES SUR LA COMMANDE BANG BANG DES SYSTÈMES SEMI LINÉAIRES

C. LOBRY

U.E.R. de Mathématiques, Université de Bordeaux, Talence, France

Le but de cette note est de faire quelques remarques sur la contrôlabilité Bang Bang des systèmes semi linéaires de la forme:

$$\frac{dx}{dt} = f^0(x) + \sum_{i=1}^{i=p} u_i f^i(x), \qquad x \in \boldsymbol{R}^n. \tag{1}$$

Nous appellerons *commande admissible* une application constante par morceaux d'un intervalle de R dans le cube unité de $\boldsymbol{R}^p$:

$$U = \{u_1, u_2, \ldots, u_p;\ |u_i| \leqslant 1\},$$

et une *commande Bang Bang* sera une fonction constante par morceaux prenant ses valeurs dans les sommets du cube unité, soit:

$$U_{\text{B.B.}} = \{(u_1, u_2, \ldots, u_p) \in U;\ u_i = +1 \text{ ou } -1\};$$

le fait de choisir pour commandes admissibles des commandes constantes par morceaux au lieu de commandes différentiables par morceaux comme il est plus fréquent de le faire, apporte une petite simplification à ce qui va suivre mais n'est pas une restriction essentielle. Si $t \to \mathscr{U}(t)$ est une commande admissible, on note sa réponse: $t \to x(t, x_0, \mathscr{U})$, c'est, par définition, la solution du problème de Cauchy:

$$\frac{dx}{dt} = f^0(x) + \sum_{i=1}^{i=p} u_i(t) f^i(x),$$

$$x(0) = x_0,$$

avec:

$$t \to \mathscr{U}(t) = \big(u_1(t), u_2(t), \ldots, u_p(t)\big).$$

L'ensemble des états accessibles à l'instant T noté $A(T, x_0, U)$ est défini par:

$$A(T, x_0, U) = \big\{x(T, x_0, \mathscr{U});\ \mathscr{U} \in \{\text{commandes admissibles}\}\big\}.$$

L'ensemble des états accessibles $A(x_0, U)$ est la réunion pour $T \geqslant 0$ des $A(T, x_0, U)$. On définit de la même manière les états accessibles par des commandes Bang Bang,

icm©

soit: $A(T, x_0, U_{\text{B.B.}})$, et $A(x_0, U_{\text{B.B.}})$, en remplaçant les commandes admissibles par les commandes Bang Bang.

Nous supposons naturellement que les fonctions f^0, f^i satisfont des hypothèses de régularité standard telles que les définitions précédentes aient un sens.

DEFINITION 0.1. Le système (1) est *Bang Bang contrôlable* si l'ensemble $A(x_0, U_{\text{B.B.}})$ est égal à l'ensemble $A(x_0, U)$.

Nous nous proposons de faire deux remarques (proposition 1.6 et paragraphe 3) sur des conditions de contrôlabilité Bang Bang. La méthode qui va être suivie était suggérée dans [6]. Elle repose sur des résultats de contrôlabilité des systèmes non linéaires qu'on trouvera dans [3], [4], [6], [7] et [8] et qui ont été résumés en 1.1 de ce papier. Lorsque ces remarques ont été soumises, j'ignorais un récent travail de Krener [5]. Les résultats contenus dans l'article de Krener doivent permettre d'améliorer considérablement ces remarques.

§ 1. Une condition suffisante de Bang Bang contrôlabilité

Nous supposons dans ce paragraphe que les fonctions f^0, f^i *sont analytiques*; alors les résultats de [3], [6] et le théorème 2 de [4] s'appliquent. Nous commençons par énoncer ceux de ces résultats qui nous seront utiles. Soit D la famille de champs de vecteurs:

$$D = \{f^0 \pm f^i;\ i = 1, 2, \ldots, p\},$$

notons:

$$D^0 = D,$$

$$D^1 = D^0 \cup [D^0, D^0],$$

$$D^n = D^{n-1} \cup [D^{n-1}, D^{n-1}],$$

$$D^\infty = \bigcup D^n,$$

où le crochet [,] est le crochet de Lie pour les champs de vecteurs. Le rang de la famille D au point x, noté $r(D)(x)$, est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les valeurs des éléments de D^∞ au point x.

1.1. RÉSULTATS. *Il existe une partition de R^n par des sous-variétés telles que si M_{x_0} est la sous-variété passant par x_0 alors*:

(i) $A(x_0, U) \subset M_{x_0}$;

(ii) *$A(x_0, U)$ est d'intérieur non vide pour la topologie de M_{x_0}*;

(iii) *$A(x_0, U_{\text{B.B.}})$ contient l'intérieur de $A(x_0, U)$, toujours pour la topologie de M_{x_0}*;

(iv) *pour tout point x_0 de R^n la dimension de M_{x_0} est égale au rang au point x_0 de la famille $D = \{f^0 \pm f^i;\ i = 1, 2, \ldots, p\}$.*

1.2. COROLLAIRE (trivial). *Une condition suffisante pour que (1) soit Bang Bang contrôlable est que la réponse à toute commande non Bang Bang, appartienne à l'intérieur de $A(x_0, U)$ (considéré comme partie de M_{x_0}).*

Nous allons maintenant déterminer une condition suffisante pour que les réponses aux commandes Bang Bang appartiennent à l'intérieur de $A(x_0, U)$; le calcul que nous allons faire est basé sur le Principe du Maximum, sans faire intervenir de commandes „spéciales” comme dans [4]. Il est classique dans les questions de „commandes singulières” (qui sont des questions très proches) d'entreprendre le calcul qui va suivre. Cependant, grâce aux résultats rappelés ci-dessus, les conclusions pourront aller plus loin. Sur la question des commandes singulières, on pourra consulter le „survey” [2].

Pour commencer, nous supposons que M_{x_0} est l'espace R^n tout entier. Soit $\mathscr{U}$ une commande admissible dont la réponse $x(t_1, \mathscr{U})$,(¹) appartient à l'instant t_1 à la frontière de $A(x_0, U)$. D'après le Principe du Maximum tel qu'il est énoncé dans [1], il existe une solution non triviale: $t \to \Psi(t)$, donc, jamais nulle de:

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big(f^0(x(t, \mathscr{U})) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t) f^i(x(t, \mathscr{U}))\Big)\Psi, \tag{2}$$

telle que:

$$\Big\langle \Psi(t), \sum_{i=1}^{p} u_i(t) f^i(x(t, \mathscr{U}))\Big\rangle = \operatorname*{Max}_{u \in U}\Big\langle \Psi(t), \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(x(t, \mathscr{U}))\Big\rangle = -\langle \Psi(t), f^0(x(t, \mathscr{U}))\rangle \tag{3}$$

en tout instant de continuité de $\mathscr{U}$. Supposons maintenant que sur un intervalle de temps ouvert non vide, la commande $\mathscr{U}$ prenne pour valeur un point de l'intérieur de U; cette commande n'est donc pas Bang Bang. (Mais, réciproquement, une commande non Bang Bang n'a pas forcément cette propriété, simplement une commande non Bang Bang prend, sur un intervalle de temps ouvert non vide, ses valeurs dans une des faces de dimension plus grande que 1 du cube unité U). De la relation (3) nous déduisons que sur l'intervalle où $\mathscr{U}(t)$ est intérieur à U on a les égalités:

$$\langle \Psi(t), f^j(x(t, \mathscr{U}))\rangle = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, p. \tag{4}$$

Dérivons, des relations (1) et (2), nous tirons:

$$\Big\langle \Psi(t), \frac{\partial}{\partial x} f^j(x(t, \mathscr{U}))\Big(f^0(x(t, \mathscr{U})) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t) f^i(x(t, \mathscr{U}))\Big)\Big\rangle -$$

$$-\Big\langle \Psi(t), \frac{\partial}{\partial x}\Big(f^0(x(t, \mathscr{U})) + \sum_{i=1}^{p} u_i(t) f^i(x(t, \mathscr{U}))\Big) f^j(x(t, \mathscr{U}))\Big\rangle = 0,$$

ce qui, après introduction du crochet de Lie, donne:

$$\Big\langle \Psi(t), \Big[f^0 + \sum_{i=1}^{p} u_i(t) f^i, f^j\Big](x(t, \mathscr{U}))\Big\rangle = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, p,$$

(¹) Le point x_0 étant fixé, nous notons $x(t, x_0, \mathscr{U}) = x(t, \mathscr{U})$.

icm©

et, par dérivations successives, on a: (car les fonctions $u_i(t)$ sont constantes)

$$\left\langle \Psi(t), \left[f^0+\sum_{i=1}^{p} u_i(t) f^i, f^j\right]^{(n)} (x(t, \mathscr{U}))\right\rangle = 0 \tag{4'}$$

où le symbole $[f, g]^{(n)}$ est défini par:

$$[f, g]^{(0)} = g; \quad [f, g]^{(1)} = [f, g]; \quad [f, g]^{(n+1)} = [f,[f, g]]^{(n)}.$$

Le calcul que nous venons de faire prouve que si pour tout x de $\boldsymbol{R}^n$ et tout point intérieur $u_1, u_2, \ldots, u_p$ de U le rang de la famille:

$$\left[f^0+\sum_{i=1}^{p} u_i f^i, f^j\right]^{(n)}(x); \qquad j = 0, 1, \ldots, p,\ n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{5}$$

est égal à n alors la réponse à une commande prenant sur un intervalle de temps ouvert non vide ses valeurs dans l'intérieur de U ne peut pas appartenir au bord de $A(x_0, U)$ et d'après le résultat (iii) une telle commande est donc équivalente à une commande Bang Bang. L'argument utilisé précédemment est purement local, (le principe du maximum ne fait intervenir dans sa démonstration que de petites variations au voisinage de la trajectoire de référence ; sur une variété sans autre structure, l'expression (3) utilisant un produit scalaire, n'a pas de sens globalement, mais nous ne l'utilisons que sur un petit intervalle de temps) ; on pourra donc l'appliquer „à l'intérieur" de M_{x_0} lorsque cette dernière n'est pas $\boldsymbol{R}^n$ tout entier. D'après le résultat (iv) la dimension de M_{x_0} est égale au rang du système en un quelconque de ses points. De là, nous déduisons le:

1.3. LEMME. *Supposons qu'en tout point x de $\boldsymbol{R}^n$, et pour tout point $u_1, u_2, \ldots, u_p$ intérieur au cube unité de $\boldsymbol{R}^p$, le rang du système de vecteurs* (5) *soit égal au rang $r(D)(x)$ de la famille $D = \{f^0 \pm f^i;\ i = 1, 2, \ldots, p\}$, alors, toute commande prenant, pendant un intervalle de temps ouvert $]\alpha, \beta[$ non vide, ses valeurs dans l'intérieur du cube unité U de $\boldsymbol{R}^p$ a même réponse à l'instant t_1 ($t_1 \geqslant \beta$) qu'une commande Bang Bang.*

Nous allons maintenant montrer que pour certains systèmes on peut appliquer le lemme 1.3. Pour cela, nous introduisons quelques définitions.

1.4. DÉFINITION. On appelle *sous système* du système (1) le système obtenu en imposant à la commande $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p)$ de prendre ses valeurs dans une face du cube unité. Le système (1) lui-même est un sous système particulier.

On remarque qu'un sous système d'un système semi linéaire est encore un système semi linéaire.

Soit le système semi linéaire (1), définissons:

$$f^{u_0} = f^0 + \sum_{i=1}^{p} u_{0i} f^i,$$
$$\Delta_{u_0}^1 = \{f^{u_0}, f^1, f^2, \ldots, f^p\},$$
$$\Delta_{u_0}^n = [f^{u_0}, \Delta^{n-1}],$$
$$D_{u_0}^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_{u_0}^n;$$

on a évidemment l'inclusion:

$$\Delta_{u_0}^\infty \subset \mathscr{L}(D^\infty)$$

où $\mathscr{L}(D^\infty)$ est l'espace vectoriel réel engendré par D^∞.

Notons $\varrho_{u_0}(\Delta)(x)$ la dimension de l'espace vectoriel engendré par les valeurs en x des éléments de Δ^∞. En raison de l'inclusion précédente, en général, $\varrho_{u_0}(\Delta)(x)$ est plus petit que $r(D)(x)$, d'où la

1.5. DÉFINITION. Le système (1) satisfait la condition du rang si pour tout $u_0 \in \operatorname{Int} U$ et tout x de $\boldsymbol{R}^n$ on a: $\varrho_{u_0}(\Delta)(x) = r(D)(x)$; où:

$$D = \{f^0 \pm f^i;\ i = 1, 2, \ldots, p\}, \quad \Delta = \{f^0, f^1, \ldots, f^p\}.$$

Nous pouvons maintenant énoncer la

1.6. PROPOSITION. *Soit un système semilinéaire* (1), *si tout sous système de* (1) *satisfait la condition du rang, alors il est Bang Bang contrôlable.*

Démonstration. Soit x_0 une condition initiale M_{x_0} la sous-variété issue de M_{x_0} (cf. 1.1); l'hypothèse du rang pour le système (1) nous permet d'appliquer le lemme 1.2, donc toute commande qui prendrait pour valeur un point intérieur de U pendant un intervalle de temps non nul peut être remplacée par une commande Bang Bang. Si maintenant une commande prend une valeur dans l'intérieur d'une face de dimension $P-1$ du cube unité, le même lemme s'applique au sous-système défini par cette face, et de proche en proche on voit que toute commande peut être remplacée par une commande prenant ses valeurs dans les faces de dimensions 0, c'est-à-dire les commandes Bang Bang.

1.7. *Remarque.* La condition du rang est une condition *suffisante* qui est certainement très loin d'etre nécessaire; grâce au principe du maximum énoncé dans [5] il est très certainement possible d'établir une condition (plus compliquée) qui serait beaucoup plus proche d'une condition suffisante.

§ 2. Applications

La condition du rang est satisfaite pour les familles:

$$D = \{f^0 \pm f^i;\ i = 1, 2, \ldots, p\}$$

qui satisfont la condition suivante quel que soit n:

$$[f^i, \Delta^n] \subset \mathscr{M}(\Delta^1 \cup \Delta^2 \cup \ldots \cup \Delta^n), \quad i = 1, 2, \ldots, p,$$

$\mathscr{M}(\Delta^1 \cup \Delta^2 \cup \ldots \cup \Delta^n)$ désignant le module (sur l'anneau des fonctions différentiables) engendré par: $\Delta^1 \cup \Delta^2 \cup \ldots \cup \Delta^n$. On vérifie aisément dans ce cas que $[\Delta^p, \Delta^q] \subset \mathscr{L}(\Delta^1 \cup \Delta^2 \cup \ldots \cup \Delta^{p+q})$ (par récurrence à partir de l'identité de Jacobi), d'où on déduit que D^n est contenu dans $\mathscr{L}(\Delta^1 \cup \Delta^2 \cup \ldots \cup \Delta^{2n})$. Cette dernière condition est vérifiée (un calcul direct le montre) dans les deux cas suivants:

2.1. *Première application.* (Krener [4].)

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt} = A(y)x + \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(y), \qquad x \in \mathbf{R}^{n_1},$$
$$\frac{dy}{dt} = g(y), \qquad y \in \mathbf{R}^{n_2}.$$

Dans le cas particulier où $n_2 = 1$ et $g(y) = 1$ on obtient le système:

$$\frac{dx}{dt} = A(y)x + \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(y), \qquad x \in \mathbf{R}^{n_1},$$
$$\frac{dy}{dt} = 1,$$

qui est équivalent au système:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \sum_{i=1}^{p} u_i f^i(t), \qquad x \in \mathbf{R}^{n_1},$$

et on retrouve ainsi le théorème de contrôlabilité Bang Bang classique pour les systèmes linéaires (La Salle–Halkin–Levinson).

2.2. *Deuxième application.*

$$\frac{dx^n}{dt^n} = g\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}}\right) + \sum_{i=1}^{p} u_i b^i\left(x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{dx^{n-1}}{dt^{n-1}}\right), \qquad x \in \mathbf{R},$$

lorsque les fonctions b^i ne s'annulent pas toutes simultanément.

§ 3. Remarque dans un cas particulier

3.1. Nous supposons maintenant que $n = 2$ et $p = 1$, *mais nous ne supposons plus que le système est analytique*. Dans ces conditions, il n'est plus possible d'obtenir de résultats globaux comme la contrôlabilité Bang Bang par des arguments à caractère local comme ceux développés plus haut. Nous pouvons par contre essayer de décrire la situation générique (si une telle situation existe !), c'est-à-dire la situation à laquelle on peut toujours se ramener par de petites perturbations. Le développement qui va suivre n'est pas rédigé avec rigueur, il n'est cependant pas difficile de préciser les détails.

3.2. Soit:

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt} = f^0(x) + u_1 f^1(x); \qquad x \in \mathbf{R}^2,\ |u_1| \leqslant 1.$$

Si la réponse à une commande $t \to \mathcal{U}(t)$, telle que sur un intervalle ouvert non vide $\mathcal{U}(t)$ soit strictement plus petit que 1 en valeur absolue, appartient au bord de $A(x_0, U)$; on a, en particularisant (4') de § 1:

$$(2)\qquad \langle \Psi(t), [f^0 + \mathcal{U}(t) f^1, f^1]^{(n)}(x(t, u))\rangle = 0, \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

ce qui prouve que la trajectoire en question doit être tracée sur le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ défini par la relation:

$$(3)\qquad \det(f^1(x), [f^0, f^1](x)) = 0$$

qui, génériquement, est une sous-variété de dimension 1 dont l'espace tangent au point x est le vecteur:

$$(4)\qquad \operatorname{grad}(\det(f^1, [f^0, f^1]))(x).$$

On sait, d'après le Principe du Maximum, que le vecteur $\Psi(t)$ est orthogonal à $f^0(x(t, \mathcal{U})) + \mathcal{U}(t) f^1(x(t, \mathcal{U}))$ et puisque la trajectoire est tracée sur la sous-variété définie par (3), $\Psi(t)$ est proportionnel au vecteur (4). La trajectoire est donc tracée sur le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ où les deux équations en u:

$$(5)\qquad \langle \operatorname{grad}(\det(f^1, [f^0, f^1]))(x), f^0(x) + u f^1(x)\rangle = 0,$$

$$(6)\qquad \langle \operatorname{grad}(\det(f^1, [f^0, f^1]))(x), ([f^0, [f^0, f^1]] + u[f^1, [f^0, f^1]])(x)\rangle = 0$$

sont solubles simultanément. Ceci impose à nouveau une relation entre, cette fois ci: f^0, f^1, $[f^0, f^1]$, $[f^0, [f^0, f^1]]$ et $[f^1, [f^0, f^1]]$; cette dernière relation est certainement indépendante de la relation (3) car elle fait intervenir des crochets d'ordre supérieur. Génériquement, l'ensemble des points qui satisfont deux relations est une sous-variété de codimension 2, donc un ensemble de points isolés. La trajectoire considérée qui est tracée sur cet ensemble est donc stationnaire, ce qui veut dire que $f^0 + u f^1$ est nul, donc que:

$$\det(f^0, f^1) = 0;$$

il y a donc une troisième relation à satisfaire, ce qui est génériquement impossible. Donc, pour les systèmes (1), génériquement, il n'existe pas de commande satisfaisant le principe du Maximum qui ne soient des commandes Bang Bang. Ceci peut être rapproché du fait que pour les systèmes linéaires [8], génériquement, les commandes qui satisfont le principe du Maximum sont Bang Bang.

3.3. Le traitement qui vient d'être fait ne s'étend pas de manière immédiate au cas général car il n'est plus alors aussi facile d'éliminer le vecteur $\Psi(t)$ des relations (2).

Bibliographie

[1] F. Albrecht, *Topics in control theory*, Springer-Verlag Lecture notes in mathematics, nº 63 (1968).

[2] R. Gabasov and F. M. Kirillova, *High order necessary conditions for optimality*, SIAM J. on Control 10, nº 1 (1972), p. 127–168.

[3] V. Jurdjevic and H. Sussmann, *Controllability of nonlinear systems*, J. Diff. Equ. 12 (1972), p. 470–496.

[4] A. Krener, *A generalization of Chow's theorem and the Bang Bang theorem to nonlinear control systems*, à paraître.

[5] —, *The high order maximum principle for singular extremals*, à paraître.

[6] C. Lobry, *Geometrical structure of orbits of dynamical polysystems*, Warwick Control Theory Center report nº 19 (1972).

[7] —, *Contrôlabilité des systèmes non linéaires*, SIAM J. on Control, 8 (1970), p. 573–605.

[8] —, *Quelques aspects qualitatifs de la théorie de la commande*, Thèse, Grenoble, 1972.