BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 1

ОБ ОДНОМ ИНТЕГРАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ИЗ ТЕОРИИ ИГР

Р. В. ГАМКРЕЛИДЗЕ

Математический институт им. В. А. Стеклова АН СССР, Москва, СССР

Вычисление стратегии в теории игр преследования и уклонения сводится, как правило, к решению интегрального уравнения типа Вольтерра, которое однако может и не решаться стандартным применением метода последовательных приближений и потребует специальных приемов. Более того, при изучении дифференциальных игр уклонения с нелинейным управлением я столкнулся с неразрешимым в обычном смысле интегральным уравнением и для решения игровой задачи пришлось это уравнение решать в некотором обобщенном смысле, когда решением является не конечномерная векторная функция, а мера, зависящая от времени. Чтобы получить такое решение, метод последовательных приближений пришлось комбинировать с некоторой специально для этой цели придуманной конструкцией, которую я называю *барицентрическим выметанием меры*.

В докладе будет описана эта конструкция и будет показано, как с её помощью получить обобщенное решение. Все построения мы будем проводить для упрощенного «модельного» примера, который избавит нас от многих несущественных технических деталей, полностью сохранив основную трудность реальной задачи. Дифференциальная игра, для которой возникла необходимость в обобщенном решении интегрального уравнения, а также решение полученного там уравнения, подробно описаны в работе [1].

Пусть $0 \leqslant t \leqslant T$ — отрезок временной оси, V — компакт, $A(t, v)$, $B(t, v)$ — две ограниченные векторные n-мерные функции аргумента $(t, v) \in [0, T] \times V$, измеримые по t и непрерывные по v. Обозначим через F_t множество

$$F_t = \{A(t, v) |\ v \in V\} \subset E^n,$$

а через $\operatorname{co} F_t$ — выпуклую оболочку множества F_t. Предположим, что внутренность множества

$$\prod_{t \in [0, T]} \operatorname{co} F_t \subset E^n$$

не пусто. Следовательно, существует такой замкнутый n-мерный шар Q, что

$$\operatorname{Int}\left(\bigcap_t \operatorname{co} F_t\right) \supset Q. \tag{1}$$

Зададим произвольную измеримую функцию

$$\omega(t) \in Q, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

и рассмотрим управляемое уравнение

$$\dot{z} = A(t, v) + \int_0^t B(\tau, v)\, d\tau - \omega(t), \ z(0) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3}$$

в котором z — управляемая точка, v — управляющий параметр.

Нужно для произвольной функции (2) выбрать управление $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, таким образом, чтобы на всем отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$ модуль $|z(t)|$ не превосходил сколь угодно малого наперед заданного $\varepsilon > 0$:

$$|z(t)| \leqslant \varepsilon, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{4}$$

Сразу видно, что наложенные на уравнение (3) условия (1)–(2) слишком общи, чтобы можно было выбрать такую измеримую функцию $v(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, для которой выполнялось бы тождество $z(t) \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, т.е. интегральное уравнение

$$A(t, v) + \int_0^t B(\tau, v)\, d\tau = \omega(t), \quad v(t) \in V, \ 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{5}$$

относительно неизвестной функции $v(t)$ вообще говоря не имеет решения при условиях (1)–(2). В самом деле, если уравнению (5) можно было бы удовлетворить, то при достаточно малых t точки $A(t, v(t))$ и $\omega(t)$ были бы очень близки, что из условий (1)–(2) вовсе не следует.

Таким образом задача управления (5) не разрешима в классе обычных управлений. Расширим этот класс, введя обобщенные управления, т.е. семейства вероятностных мер μ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, распределенных на компакте V. Тогда управляемый процесс (5) запишется в виде

$$z = \int_V A(t, v)\, d\mu_t(v) + \int_0^t d\tau \int_V B(\tau, v)\, d\mu_\tau(v) - \omega(t),$$

где искомым является обобщенное управление μ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, и попытаемся выбрать его таким образом, чтобы удовлетворить условию $z(t) \equiv 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, т.е. вместо интегрального уравнения (5) будем решать интегральное уравнение

$$\int_V A(t, v)\, d\mu_t(v) + \int_0^t d\tau \int_V B(\tau, v)\, d\mu_\tau(v) = \omega(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{6}$$

где искомым является семейство вероятностных мер μ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, заданных на V.

Мы покажем, что при достаточно малой длине отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$ уравнение (6) всегда имеет решение μ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, если только выполнены условия (1)–(2). Следовательно, аппроксимируя обобщенное управление μ_t известным образом обычным управлением, мы тем самым решим исходную задачу управления (3)–(4).

Решение μ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, уравнения (6) будем называть *обобщенным решением* интегрального уравнения (5). Следует обратить внимание на тот факт, что уравнение (6) линейно относительно неизвестной меры μ_t, хотя исходное уравнение (5) содержало параметр v произвольным нелинейным образом.

Перепишем уравнение (6) в сокращенном виде

$$\mu_t(A) + \int_0^t \mu_\tau(B)\, d\tau = \omega(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{7}$$

и приступим к его решению. В простейшем случае, когда $B = 0$, получим уравнение

$$\mu_t(A) = \omega(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{8}$$

которое можно интерпретировать следующим образом. В каждый момент времени следует распределить на компакте V единичную меру μ_t так, чтобы при отображении $A(t, \cdot)\colon V \to E^n$ эта мера распределилась по множеству $F_t = \{A(t, v) | \ v \in V\}$ с центром тяжести в точке

$$\omega(t) \in Q \subset \operatorname{Int} \bigcap_t \operatorname{co} F_t;$$

кроме того эта мера μ_t должна измеримо зависеть от t. Если соответствующее μ_t распределение на множестве F_t обозначить через ν_t, то формулу (8) можно записать в виде

$$\mu_t(A) = \int_{F_t} \varrho\, d\nu_t(\varrho) = \omega(t) \in Q.$$

Искомое распределение μ_t будем называть *барицентрическим выметанием* единичной δ-меры $\delta_{\omega(t)}$ на компакт V, определяемым функцией $A(t, v)$; соответственно, ν_t будем называть барицентрическим выметанием меры $\delta_{\omega(t)}$ на множество F_t.

Для решения интегрального уравнения (7) придется построить семейство барицентрических выметаний, удовлетворяющих дополнительному условию липшицевости. Сформулируем это точно.

Пусть $\mathfrak{M}$ — множество вероятностных мер в банаховом пространстве всех мер Радона на V и пусть K — компактное множество, лежащее в $\operatorname{Int} \bigcap_t \operatorname{co} F_t$. Предположим, что задано семейство отображений из K в $\mathfrak{M}$:

$$m_t\colon \ q \mapsto m(t, q) = m_{(t, q)} \in \mathfrak{M}, \quad q \in K, \tag{9}$$

удовлетворяющих следующим трем условиям:

$$\int_V A(t, v)\, dm_{(t, q)}(v) = m(t, q)(A) \equiv q, \quad q \in K, \tag{i}$$

— условие «барицентричности», которое можно ещё записать так

(10) $$\int_{F_t} \varrho\, dn_{(t,q)}(\varrho) \equiv q, \qquad q \in K,$$

где $n(t, q)$ — образ меры $m(t, q)$ при отображении $A(t,\cdot)\colon V \to E^n$.

(ii) Мера $m(t, q)$ измерима по t в слабо звездном смысле — для любой непрерывной на V числовой функции $\varphi(v)$ функция

$$\psi_q(t) = \int_V \varphi(v)\, dm_{(t,q)}(v), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

измерима по t.

(iii) При каждом $t \in [0, T]$ отображение m_t липшицево, с константой не зависящей от t:

(11) $$\|m(t, q')-m(t, q'')\| \leqslant c\|q'-q''\|, \qquad q', q'' \in K,\ t \in [0, T].$$

В этой формуле норма слева — сильная норма (норма полной вариации) в пространстве всех мер на V, норма справа — фиксированная норма в E^n, например евклидова.

Если семейство отображений (9), удовлетворяющих условиями (i)–(iii) задано, то с его помощью интегральное уравнение (7) легко решается методом последовательных приближений.

В самом деле, пусть $\tilde{Q}$ — некоторый шар, содержащийся в $\operatorname{Int}(\bigcap_t \operatorname{co} F_t)$ и содержащий Q строго внутри, и предположим, что семейство барицентрических выметаний (9) построено для компакта $K = \tilde{Q}$. Определим

$$\overset{(0)}{\mu}_t = m(t, \omega(t)),$$

$$\overset{(1)}{q}(t) = \omega(t) - \int_0^t \overset{(0)}{\mu}_\tau(B)\, d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

и затем по индукции зададим для всех $i = 1, 2, \ldots$

$$\overset{(i)}{\mu}_t = m\big(t, \overset{(i)}{q}(t)\big),$$

$$\overset{(i+1)}{q}(t) = \omega(t) - \int_0^t \overset{(i)}{\mu}_\tau(B)\, d\tau, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Это всегда можно при достаточно малом $T > 0$, так как $\omega(t) \in Q$, и следовательно все $\overset{(i)}{q}(t) \in \tilde{Q}$, $0 \leqslant t \leqslant T$, ибо по условию функция $B(t, v)$ ограничена:

$$|B(t, v)| \leqslant d \qquad \forall (t, v) \in [0, T] \times V.$$

Имеем, в силу барицентричности выметания m,

$$\overset{(i+1)}{\mu}_t(A) = m\big(t, \overset{(i+1)}{q}(t)\big)(A) = \overset{(i+1)}{q}(t) = \omega(t) - \int_0^t \overset{(i)}{\mu}_\tau(B)\, d\tau,$$

так что если последовательность $\overset{(i)}{\mu}_t$ сходится при $i \to \infty$ к некоторой вероятностной мере μ_t, $0 \leqslant t \leqslant T$, то, переходя к пределу в последнем равенстве, получим

$$\mu_t(A) = \omega(t) - \int_0^t \mu_\tau(B)\, d\tau,$$

т.е. предельная мера является искомым решением.

Равномерная сходимость по t последовательности $\overset{(i)}{\mu}_t$, $0 \leqslant t \leqslant T$, в сильной норме получается сразу из следующей очевидной оценки, использующей липшицевость выметания (11):

$$\|\overset{(i+1)}{\mu}_t - \overset{(i)}{\mu}_t\| = \|m(t, \overset{(i+1)}{q}(t)) - m(t, \overset{(i)}{q}(t))\| \leqslant c\|\overset{(i+1)}{q}(t) - \overset{(i)}{q}(t)\| =$$

$$= c\left\|\int_0^t (\overset{(i)}{\mu}_\tau - \overset{(i-1)}{\mu}_\tau)(B)\, d\tau\right\| \leqslant cd\int_0^t \|\overset{(i)}{\mu}_\tau - \overset{(i-1)}{\mu}_\tau\|\, d\tau \leqslant \ldots \leqslant (cd)^i \frac{t^i}{i!} \leqslant \frac{(cdT)^i}{i!}.$$

Доказательство существования семейства (9), удовлетворяющего условиям (i)–(iii), можно провести следующим образом.

Прежде всего, из общих теорем об измеримых селекциях непосредственно следует существование таких $r+1$ измеримых векторных функций от t $q_0(t), \ldots, q_n(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, что

$$\forall t \in [0, T]\ q_i(t) \in F_t, \qquad i = 0, 1, \ldots, r,$$

и

$$\operatorname{co}\{q_0(t), \ldots, q_r(t)\} \supset Q, \qquad t \in [0, T].$$

Далее, можно выбрать такие $r+1$ измеримые функции со значениями в V:

$$v_0(t), \ldots, v_r(t), \qquad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

что для любого $t \in [0, T]$

$$A\big(t, v_i(t)\big) = q_i(t), \qquad i = 0, 1, \ldots, r.$$

Пусть $\Sigma = \operatorname{co}\{\sigma_0, \ldots, \sigma_r\}$ — фиксированный r-мерный симплекс. Определим семейство аффинных отображений

$$f_t\colon \Sigma \to \operatorname{co}\{q_0(t), \ldots, q_r(t)\},$$

задав f_t в вершинах: $f_t(\sigma_i) = q_i(t)$, $i = 0, 1, \ldots, r$.

Очевидно для любого $q \in \operatorname{co}\{q_0(t), \ldots, q_r(t)\}$ прообраз $f_t^{-1}(q)$ — выпуклое замкнутое множество в Σ. Равномерному распределению единичной массы по множеству $f_t^{-1}(q)$ соответствует центр тяжести — некоторая точка $\sigma(t, q) \in \Sigma$; её барицентрические координаты $m_0(t, q), \ldots, m_r(t, q)$ и определяют искомую меру $m(t, q)$, которая в данном случае дискретна и сосредоточена в $r+1$ точках $v_0(t), \ldots, v_r(t)$ со значениями $m_0(t, q), \ldots, m_r(t, q)$. Мера $n(t, q)$ — формула (10) — соответственно сосредоточена в точках $q_0(t), \ldots, q_r(t)$ с теми же значениями $m_i(t, q)$. Барицентричность построенного выметания $m(t, q)$ — свойство (i) — очевидна из построения, а измеримость по t также легко доказать. Липшицевость — свойство (iii) — следует из несложной оценки интегралов по множествам $f_t^{-1}(q)$.

В связи с изложенным естественно сформулировать следующую задачу. Так как уравнение (7) надо решать в реальном времени (в ходе игры), а описанный процесс приближений сходится тем быстрее, чем меньше константа Липшица в формуле (11), то желательно уметь при заданном семействе F_t и компакте K строить семейство выметаний (9) с наименьшей константой или с константой, близкой к возможной нижней грани. Мне неизвестно, насколько описанный метод построения семейства m_t дает константу, близкую к желаемой.

Литература

R. Gamkrelidze and G. Kharatishvili, *A differential game of evasion with nonlinear control*, SIAM J. of Control, 1974 (to appear).

BANACH CENTER PUBLICATIONS
VOLUME 1

THE DUALITY OF CONVEX FUNCTIONS AND CESARI'S PROPERTY Q

GERALD S. GOODMAN

Institute of Mathematics, University of Florence, Florence, Italy

§ 1. The property Q

Recent work on the existence of optimal controls and related problems (v. refs. cited in [3]; also [6]) has employed an alteration made by Cesari (*op. cit.*) in the classical notion of the upper semicontinuity of families of closed sets that applies in the special case where the sets involved are convex.

What is done is to assign to each point (t, x) in some index set I belonging, typically, to $\boldsymbol{R} \times E_m$, a closed convex set $K(t, x)$ in E_{n+1} and then to form, at each fixed point $(\bar{t}, \bar{x})$ in I, the set

$$Q(\bar{t}, \bar{x}) = \bigcap_{\delta>0} \operatorname{cl} \operatorname{co} \bigcup_{(t,x)\in\mathcal{N}_\delta} K(t, x).$$

Here, 'cl' and 'co' mean *closure* and *convex hull*, resp., and $\mathcal{N}_\delta$ denotes a δ-neighbourhood of $(\bar{t}, \bar{x})$.

If the resulting set $Q(\bar{t}, \bar{x})$, which is clearly closed and convex, coincides with $K(\bar{t}, \bar{x})$, then, in the terminology of Cesari, the sets $K(t, x)$, "have the property Q" at the point $(\bar{t}, \bar{x})$. As Cesari observed, omission of the 'co' from the formula converts it into the classical definition of closed or topological limes superior, and the classical notion of upper semicontinuity of closed sets emerges.

Cesari's operation can also be regarded as a limes superior—this time, in the lattice of closed convex sets, when they are ordered by inclusion and the lattice operations are defined by

$$\bigwedge_\iota K_\iota = \bigcap_\iota K_\iota,$$

$$\bigvee_\iota K_\iota = \operatorname{cl} \operatorname{co} \bigcup_\iota K_\iota.$$

Then the operation Q is just the order limes superior, when I is made into a directed set by preordering points according to their distance from $(\bar{t}, \bar{x})$. Since the order limes superior is preserved under order isomorphisms, we can expect to arrive at equivalent characterizations of the property Q when we replace the lattice of closed