ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1961)

Über die Vektorkomitanten der Vektorfelder

von M. KUCHARZEWSKI (Katowice)

Einleitung. Es seien m kontravariante Vektorfelder

(1) $$_1u,\ _2u,\ \ldots,\ _mu$$

mit den Koordinaten

(2) $$_1u^{\nu},\ _2u^{\nu},\ \ldots,\ _mu^{\nu},\qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

im n-dimensionalen Raume X_n gebegen.

DEFINITION 1. Eine *Vektorkomitante* der Vektoren (1) nennen wir jedes Funktionensystem

(3) $$f^{\omega}(_1u^{\nu_1}, \ldots, _mu^{\nu_m}),\qquad \omega, \nu_1, \ldots, \nu_m = 1, 2, \ldots, n,$$

der Koordinaten (2) dieser Vektoren, welches bei der beliebigen Transformation des Koordinatensystems

(4) $$x^{\nu'} = x^{\nu'}(x^{\nu})\ (^1),\qquad \nu' = 1', 2', \ldots, n',$$

der Beziehung

(5) $$f^{\omega'}(A^{\nu'_1}_{\nu}\cdot {_1u^{\nu}}, \ldots, A^{\nu'_m}_{\nu}\cdot {_mu^{\nu}}) = A^{\omega'}_{\omega} f^{\omega}(_1u^{\nu'_1}, \ldots, _mu^{\nu'_m})$$

genügt, wo $A^{\nu'}_{\nu}$ die Ableitungen

$$A^{\nu'}_{\nu} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu}}$$

der Transformation (4) bedeuten.

Die Beziehung (5) kann auch in der Matrizenform geschrieben werden:

(6) $$f(A\cdot {_1u}, \ldots, A\cdot {_mu}) = A\cdot f(_1u, \ldots, _mu).$$

Dann ist A die Matrix

(7) $$A = \|A^{\nu'}_{\nu}\|$$

(1) In dieser Arbeit bedienen wir uns der in [2] eingeführten Bezeichnungen (vergl. [2], Fußnote (1) und (2)).

und $f, {}_1u, \ldots, {}_mu$ stellen die einspaltigen Matrizen

$$(8)\qquad f = \left\|\begin{matrix} f^1 \\ f^2 \\ \vdots \\ f^n \end{matrix}\right\|, \quad {}_\mu u = \left\|\begin{matrix} {}_\mu u^1 \\ {}_\mu u^2 \\ \vdots \\ {}_\mu u^n \end{matrix}\right\|, \quad \mu = 1, 2, \ldots, m,$$

dar. Endlich $A\cdot{}_\mu u$, $A\cdot f$ bedeuten die Produkte der Matrizen (7) und (8). Ähnlich wie in der Arbeit [2] (Formel (9)) schreiben wir die Argumente der Funktion f (die jetzt eine einspaltige Matrix darstellt) in der Form einer Matrix. Die μ-te Spalte dieser enthält die Koordinaten des μ-ten Vektors ${}_\mu u$.

Die Gleichung (5) soll für beliebige

$${}_\mu u^\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad \mu = 1, 2, \ldots, m,$$

und diejenige $A_\nu^{\nu'}$ gelten, die der Ungleichung

$$(9)\qquad \operatorname{Det}\|A_\nu^{\nu'}\| \neq 0$$

genügen.

Die Gleichung (6) kann man auch in folgender für weitere Überlegungen bequemerer Form

$$(10)\qquad \bar{A}f(A\cdot{}_1u, \ldots, A\cdot{}_mu) = f({}_1u, \ldots, {}_mu)$$

umschreiben. $\bar{A}$ bedeutet die zu A inverse Matrix.

In dieser Arbeit bestimme ich alle Lösungen der Gleichung (10) und auf diese Weise erhalten wir alle Vektorkomitanten der m-kontravarianten Vektorfelder (1) im n-dimensionalen Raume.

Für den speziellen Fall $m = 3$ und $n = 2$ wurde dieses Problem von S. Gołąb [1] bei der Gelegenheit der Untersuchungen über die Differentialvektorkomitanten erster Ordnung gelöst. Ein Teilergebnis in dieser Richtung ($m = 1$ und n beliebig) hat A. Moór [3] erhalten als eine Folge aus dem allgemeineren Satze über Affinorkomitanten eines Vektorfeldes (S. 16, Satz 1, S. 17, Korollarium).

§ 1. Formulierung der Sätze. Wir betrachten ein bestimmtes System von Vektoren (1). Es seien p von ihnen linear unabhängig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß eben die p ersten von den Vektoren (1)

$$(11)\qquad {}_1u, \ldots, {}_pu$$

linear unabhängig sind und jeder der Vektoren

$$(12)\qquad {}_{p+1}u, \ldots, {}_mu$$

von (11) linear abhängig ist. Die eindeutig bestimmte Zahl p erfüllt die Ungleichungen

$$(13)\qquad 0 \leqslant p \leqslant n,$$

$$(14)\qquad p \leqslant m.$$

Ist

$$p < m,$$

so gibt es Zahlen

$$(15)\qquad {}_\varrho\lambda^a, \quad a = 1, 2, \ldots, p, \quad \varrho = p+1, \ldots, m,$$

welche die Beziehungen

$$(16)\qquad {}_\varrho u = {}_\varrho\lambda^a{}_a u$$

erfüllen. Die Skalaren (15) bleiben bei der affinen Transformation

$$(17)\qquad u^{\nu'} = A_a^{\nu'} u^\nu$$

ungeändert. Da die lineare Abhängigkeit der Vektoren und die Zahl p auch bei diesen Transformationen invariant sind, kann man die Form der Funktion f für jeden Wert von p unabhängig bestimmen. Dies ist in folgenden Sätzen enthalten.

Satz 1. *Ist*

$$1 \leqslant p < m,$$

so hat jede Vektorkomitante (3) *der Vektoren* (1) *folgende Gestalt:*

$$(18)\qquad f^\omega({}_1u, \ldots, {}_mu) = {}_\beta u^\omega \varphi^\beta({}_\varrho\lambda^a), \quad a, \beta = 1, \ldots, p,$$
$$\omega = 1, 2, \ldots, n, \quad \varrho = p+1, \ldots, m,$$

wo $\varphi^\beta({}_\varrho\lambda^a)$ *beliebige Funktion der Skalaren* (15) *bedeutet.*

Die Sonderfälle $p = m$ und $p = 0$ sind in den nächststehenden Sätzen erfaßt:

Satz 2. *Ist*

$$p = m,$$

so hat jede Vektorkomitante der Vektoren (1) *die Gestalt*

$$(19)\qquad f^\omega({}_1u, \ldots, {}_mu) = C^a{}_a u^\omega, \quad a = 1, 2, \ldots, p, \quad \omega = 1, 2, \ldots, n,$$

wo C^a *beliebige Konstanten bedeuten.*

Satz 3. *Sind alle Vektoren* (1) *gleich Null, so müssen die Komponenten der Vektorkomitante auch gleich Null sein.*

Auf Grund der in der Arbeit [2] angeführten Überlegungen (Bemerkung 1 und 2), die auch jetzt gültig sind, kann man annehmen, daß die aus p ersten Reihen der Matrix

$$\|{}_1u, \ldots, {}_pu\| \ (^2)$$

gebildete Determinante von Null verschieden ist:

$$(20)\qquad \Delta = [{}_1u, \ldots, {}_pu] \neq 0.$$

(2) Die Symbole $\|{}_1u, \ldots, {}_pu\|$, $[{}_1u, \ldots, {}_pu]$, $\Delta_{a/\varrho}$ sind in der oben erwähnten Arbeit [2] (Bezeichnungen 1, 2, Bemerkung 3) erklärt.

Außerdem gelten die Relationen

(21) $$ {}_{\varrho}\lambda^{a} = \frac{\Delta_{a/\varrho}}{\Delta}, \qquad a = 1, 2, \ldots, p, \qquad \varrho = p+1, \ldots, m. $$

Aus dem Satze 1 folgt für $m = 3$ und $n = 2$ das Ergebnis, das S. Gołąb in seiner Arbeit [1] erhalten hat:

$$ f^{\omega}({}_1u, {}_2u, {}_3u) = {}_a u^{\omega} \varphi^{a}\left(\frac{[{}_3u, {}_2u]}{[{}_1u, {}_2u]}, \frac{[{}_1u, {}_3u]}{[{}_1u, {}_2u]}\right). $$

Diese Beziehung ist nur für $p = 2$ und unter der Voraussetzung richtig, daß die zwei ersten der Vektoren ${}_1u$, ${}_2u$, ${}_3u$ linear unabhängig sind. Ist dagegen $p = 1$, d. h. gibt es nur einen zwischen ${}_1u$, ${}_2u$, ${}_3u$ linear unabhängigen Vektor, z. B.

$$ {}_1u \neq 0, $$

so ist die Funktion f^{ω} in der Form

(22) $$ f^{\omega}({}_1u, {}_2u, {}_3u) = {}_1u^{\omega} \varphi(\lambda, \mu) $$

darstellbar, wo λ und μ die Beziehungen

(23) $$ {}_2u = \lambda\, {}_1u, \qquad {}_3u = \mu\, {}_1u $$

erfüllen. Ist z. B.

$$ {}_1u^1 \neq 0, $$

so können wir λ und μ aus (23) durch die Koordinaten der Vektoren ${}_1u$, ${}_2u$, ${}_3u$ ausdrücken,

$$ \lambda = \frac{{}_2u^1}{{}_1u^1}, \qquad \mu = \frac{{}_3u^1}{{}_1u^1}, $$

und die Formel (22) in der Form

$$ f^{\omega}({}_1u, {}_2u, {}_3u) = {}_1u^{\omega} \varphi\left(\frac{{}_2u^1}{{}_1u^1}, \frac{{}_3u^1}{{}_1u^1}\right) $$

darstellen. Ist endlich $p = 0$, so müssen alle f^{ω} gleich Null sein.

Den Satz 2 kann man in diesem Falle nicht verwenden, weil die Gleichheit $p = m$ für $n = 2$ und $m = 3$ unmöglich ist.

Aus dem Satzen 2 folgt das Teilergebnis von A. Moór für $m = 1$, welches alle Vektorkomitanten eines einzigen Vektors bestimmt. Dies besagt, daß jede Vektorkomitante des einzigen Vektors ${}_1u$ zu diesem parallel ist:

$$ f^{\omega}({}_1u) = C\, {}_1u^{\omega}. $$

§ 2. Die Beweise der Sätze 1, 2 und 3. Zuerst machen wir noch eine Bemerkung, die in dem Beweise des Satzes 1 nützlich wird.

Bemerkung 1. Die Funktionen

$$ f^{\omega}({}_1u^{\nu_1}, \ldots, {}_mu^{\nu_m}), $$

die die Funktionalgleichung (5) erfüllen, müssen homogen erster Ordnung hinsichtlich der Veränderlichen

$$ {}_1u^{\omega}, {}_2u^{\omega}, \ldots, {}_mu^{\omega} $$

und homogen nullter Ordnung hinsichtlich allen anderen Veränderlichen

$$ {}_1u^{\nu}, {}_2u^{\nu}, \ldots, {}_mu^{\nu}, \qquad \nu \neq \omega, $$

sein.

Diese Bemerkung folgt sofort aus der Beziehung [3]

(24) $$ f^{\omega}(\varrho^{\nu_1}\, {}_1u^{\nu_1}, \ldots, \varrho^{\nu_m}\, {}_mu^{\nu_m}) = \varrho^{\omega} f^{\omega}({}_1u^{\nu_1}, \ldots, {}_mu^{\nu_m}), $$

die man erhält, wenn in die Gleichung (5) als Elemente der Matrix A die folgenden

$$ A_{\nu}^{\nu'} = \varrho^{\nu'} \delta_{\nu}^{\nu'}, \qquad \varrho^{\nu'} \neq 0, $$

eingesetzt werden.

Beweis des Satzes 1. Wir nehmen an, daß die Zahl p der Ungleichung

(25) $$ 1 \leqslant p < m $$

genügt. Der Beweis wird durchgeführt, indem wir eine Matrix A konstruiren, die die linke Seite der Gleichung (10) in die rechte von (18) überführt.

Wir unterscheiden zwei Fälle: $p < n$ und $p = n$. Es sei zuerst

(26) $$ p < n. $$

Da das Vektorensystem (1) und die Zahl p die Bedingungen (20), (25) und (26) erfüllen, welche mit jenen in [2] auftretenden (20), (24) und (25) identisch sind, kann man ganz genau wie dort die Matrizen B und C bilden. Die Matrix B hat folgende Gestalt:

(27) $$ B = \begin{array}{c} \downarrow p\text{-te Spalte} \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ B_1^{p+1} & B_2^{p+1} & \ldots & B_p^{p+1} & B_{p+1}^{p+1} & \ldots & 0 \\ B_1^{p+2} & B_2^{p+2} & \ldots & B_p^{p+2} & 0 & B_{p+2}^{p+2} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_1^{n} & B_2^{n} & \ldots & B_p^{n} & 0 & \ldots\ 0 & B_n^{n} \end{matrix} \right\| \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \leftarrow p\text{-te Reihe} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}, $$

[3] In (24) haben wir die Akzenten über Indizes weggelassen. Da $f^{\omega'}$ der Definition nach gleich f^{ω} sein muß und die mit dem Akzent versehene Indizes bei ϱ und δ nur die Nummerierung der Argumente von f^{ω} bestimmen, führt dies zu keinen Mißverständnissen.

wo die Elemente

(28) $B^\sigma_1, \ldots, B^\sigma_p, B^\sigma_\sigma, \qquad \sigma = p+1, \ldots, n$ (nicht summieren über σ),

die Bedingungen

(29) $$B^\sigma_\sigma = \Delta,$$

(30) $$B^\sigma_{1\alpha}u^1 + \ldots + B^\sigma_{p\alpha}u^p + B^\sigma_{\sigma\alpha}u^\sigma = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, p,$$

erfüllen. Die Matrix C wählen wir wie folgt:

(31) $$C = \left\| \begin{matrix} C^1_1 & \ldots & C^1_p & 0 & \ldots & 0 \\ C^2_1 & \ldots & C^2_p & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C^p_1 & \ldots & C^p_p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

wo $\|C^\alpha_\beta\|$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, p)$ eine zu $\|{}_\beta u^\alpha\|$ inverse Matrix ist. Es gelten also die Beziehungen

(32) $$C^\alpha_\gamma\,{}_\beta u^\gamma = \delta^\alpha_\beta, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, p.$$

Nachher bestimmen wir die Matrix A als Produkt von B und C:

(33) $$A = C \cdot B.$$

Die Matrix A sieht folgendermaßen aus:

(34) $$A = \left\| \begin{matrix} C^1_1 & \ldots & C^1_p & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C^p_1 & \ldots & C^p_p & 0 & \ldots & 0 \\ B^{p+1}_1 & \ldots & B^{p+1}_p & B^{p+1}_{p+1} & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \\ B^n_1 & \ldots & B^n_p & 0 & \ldots 0 & B^n_n \end{matrix} \right\|.$$

Nun berechnen wir noch die in (10) auftretende, zu A inverse Matrix $\bar{A}$. Gemäß der bekannten Formel kann man $\bar{A}$ als Produkt der zu B und C inversen Matrizen $\bar{B}$ und $\bar{C}$ erhalten:

(35) $$\bar{A} = \bar{B} \cdot \bar{C}.$$

Es ist leicht nachzuprüfen, daß $\bar{B}$ und $\bar{C}$ entsprechend folgende Formen besitzen:

(36) $$\bar{B} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & \downarrow p\text{-te Spalte} & & & \end{matrix} \\ \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \frac{-B^{p+1}_1}{B^{p+1}_{p+1}} & \frac{-B^{p+1}_2}{B^{p+1}_{p+1}} & \ldots & \frac{-B^{p+1}_p}{B^{p+1}_{p+1}} & \frac{1}{B^{p+1}_{p+1}} & \ldots & 0 \\ \frac{-B^{p+2}_1}{B^{p+2}_{p+2}} & \frac{-B^{p+2}_2}{B^{p+2}_{p+2}} & \ldots & \frac{-B^{p+2}_p}{B^{p+2}_{p+2}} & 0 & \frac{1}{B^{p+2}_{p+2}} \ \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{-B^n_1}{B^n_n} & \frac{-B^n_2}{B^n_n} & \ldots & \frac{-B^n_p}{B^n_n} & 0 & \ldots \ 0 & \frac{1}{B^n_n} \end{matrix} \right\| \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \leftarrow p\text{-te Reihe}, \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

(37) $$\bar{C} = \left\| \begin{matrix} {}_1u^1 & {}_2u^1 & \ldots & {}_pu^1 & 0 & \ldots & 0 \\ {}_1u^2 & {}_2u^2 & \ldots & {}_pu^2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}_1u^p & {}_2u^p & \ldots & {}_pu^p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Aus (35), (36) und (37) folgt mit Hilfe der Beziehungen (30), daß die Matrix $\bar{A}$ die Form

(38) $$\bar{A} = \left\| \begin{matrix} {}_1u^1 & {}_2u^1 & \ldots & {}_pu^1 & 0 & \ldots & 0 \\ {}_1u^2 & {}_2u^2 & \ldots & {}_pu^2 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}_1u^p & {}_2u^p & \ldots & {}_pu^p & 0 & \ldots & 0 \\ {}_1u^{p+1} & {}_2u^{p+1} & \ldots & {}_pu^{p+1} & \frac{1}{B^{p+1}_{p+1}} & \ldots & 0 \\ {}_1u^{p+2} & {}_2u^{p+2} & \ldots & {}_pu^{p+2} & 0 & \frac{1}{B^{p+2}_{p+2}} \ \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}_1u^n & {}_2u^n & \ldots & {}_pu^n & 0 & \ldots \ 0 & \frac{1}{B^n_n} \end{matrix} \right\|$$

hat.

Aus den in [1] ((45) und (47)) angeführten Formeln folgt, daß die in (10) auftretenden Produkte $A\cdot{}_\mu u$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ gleich

$$(39)\qquad A\cdot{}_\gamma u = \begin{Vmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \gamma\text{-te Reihe}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}, \quad \gamma = 1, 2, \ldots, p, \qquad A\cdot{}_\varrho u = \begin{Vmatrix} {}_\varrho\lambda^1\\ {}_\varrho\lambda^2\\ \vdots\\ {}_\varrho\lambda^p\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \varrho = p+1, \ldots, m,$$

sind. Setzt man jetzt A und $\bar{A}$ in die linke Seite von (10) ein, so erhalten wir folgende Gleichungen:

$$(40)\qquad \begin{aligned} f^\alpha({}_1u, \ldots, {}_mu) &= {}_\beta u^\alpha f^\beta(A\cdot{}_1u, \ldots, A\cdot{}_mu), \qquad \alpha, \beta = 1, \ldots, p,\\ f^\sigma({}_1u, \ldots, {}_mu) &= {}_\beta u^\sigma f^\beta(A\cdot{}_1u, \ldots, A\cdot{}_mu) + \frac{1}{\Delta} f^\sigma(A\cdot{}_1u, \ldots, A\cdot{}_mu),\\ &\qquad\qquad \sigma = p+1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Jetzt ist es noch zu zeigen, daß

$$(41)\qquad f^\sigma(A\cdot{}_1u, \ldots, A\cdot{}_mu) = 0, \qquad \sigma = p+1, \ldots, n,$$

falls A die Form (34) hat.

Um dies zu zeigen, setzen wir in die zweite der Gleichungen (40) an Stelle ${}_1u, \ldots, {}_mu$ folgende, spezielle Werte:

$$(42)\qquad {}_1u = \begin{Vmatrix} x\\ 0\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0 \end{Vmatrix}, \quad {}_2u = \begin{Vmatrix} 0\\ 1\\ 0\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \ldots, \quad {}_pu = \begin{Vmatrix} 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{Vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow p\text{-te Reihe},\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$${}_{p+1}u = \begin{Vmatrix} {}_{p+1}x^1\\ \vdots\\ {}_{p+1}x^p\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \ldots, \quad {}_mu = \begin{Vmatrix} {}_mx^1\\ \vdots\\ {}_mx^p\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Dann erhalten wir mit Hilfe der Beziehungen (21):

$$(43)\qquad f^\sigma \begin{bmatrix} x & 0 & \ldots & 0 & {}_{p+1}x^1 & \ldots & {}_mx^1\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & {}_{p+1}x^2 & \ldots & {}_mx^2\\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & & 1 & {}_{p+1}x^p & \ldots & {}_mx^p\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{x} f^\sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & {}_{p+1}x^1/x & \ldots & {}_mx^1/x\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & {}_{p+1}x^2 & \ldots & {}_mx^2\\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & & 1 & {}_{p+1}x^p & \ldots & {}_mx^p\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}.$$

Die Funktionen f^σ $(\sigma = p+1, \ldots, n)$ sind aber auf Grund der Bemerkung 1 homogen nullter Ordnung in Bezug auf

$${}_1u^1, \ldots, {}_mu^1.$$

Aus (43) folgt also die Beziehung

$$f^\sigma \begin{bmatrix} x & 0 & \ldots & 0 & {}_{p+1}x^1 & \ldots & {}_mx^1\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & {}_{p+1}x^2 & \ldots & {}_mx^2\\ \vdots & \vdots & & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & {}_{p+1}x^p & \ldots & {}_mx^p\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{x} f^\sigma \begin{bmatrix} x & 0 & \ldots & 0 & {}_{p+1}x^1 & \ldots & {}_mx^1\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & {}_{p+1}x^2 & \ldots & {}_mx^2\\ \vdots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & {}_{p+1}x^p & \ldots & {}_mx^p\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ & & & & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix},$$

wenn man die erste Reihe der Matrix, welche in der rechten Seite von (43) steht, mit x multipliziert.

Wird nun in dieser Gleichung $x = 2$ gesetzt, so ergibt sich

$$f^\sigma \begin{bmatrix} 2 & 0 & \ldots & 0 & {}_{p+1}x^1 & \ldots & {}_mx^1\\ 0 & 1 & \ldots & 0 & {}_{p+1}x^2 & \ldots & {}_mx^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 1 & {}_{p+1}x^p & \ldots & {}_mx^p\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

Da f^σ homogen nullter Ordnung hinsichtlich den in erster Reihe stehenden Veränderlichen sind und ${}_{p+2}x^1, \ldots, {}_mx^1$ ganz beliebig sind, folgt die Beziehung (41). Bezeichnen wir $\varphi^\beta({}_\varrho\lambda^\alpha) \stackrel{\text{df}}{=} f^\beta(A\cdot{}_1u, \ldots, A\cdot{}_mu)$ $(\alpha, \beta =$

$= 1, 2, \ldots, \varrho;\ \varrho = p+1, \ldots, m$), so ergibt sich aus (40) und (39), daß das Funktionensystem

$$f^{\omega}({}_1u, \ldots, {}_mu), \qquad \omega = 1, 2, \ldots, n,$$

die durch (18) bestimmte Form haben muß. Auf diese Weise ist der Beweis des Satzes 1 im Falle $n < p$ beendet. Den Beweis dieses Satzes im Falle $n = p$ erhalten wir, wenn man in allen vorherstehenden Überlegungen an Stelle B die Einheitsmatrix $\|\delta^{\nu}_{\omega}\|$ $(\nu, \omega = 1, 2, \ldots, n)$ nimmt.

Der Beweis des Satzes 2. Jetzt nehmen wir an, daß es

$$m = p \leqslant n$$

gilt. Wird in (5)

(44) $${}_{a}u^{\nu} = \delta^{\nu}_{a}, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \qquad a = 1, 2, \ldots, p = m,$$

eingesetzt, so ergibt sich daraus

(45) $$f^{\omega}(A^{\nu_1}_1, A^{\nu_2}_2, \ldots, A^{\nu_m}_m) = A^{\omega'}_{\nu} f^{\nu}(\delta^{\nu_1}_1, \delta^{\nu_2}_2, \ldots, \delta^{\nu_m}_m).$$

Ist

$$m = p = n,$$

so folgt ohne weiteres die Beziehung (19), wenn man in (45) $A^{\nu'}_{a} = {}_{a}u^{\nu}$ und $f^{\nu}(\delta^{\nu_1}_1, \ldots, \delta^{\nu_m}_m) = C^{\nu}$ einsetzt. Falls

$$m = p < n$$

ist, müssen wir zuerst zeigen, daß alle

(46) $$f^{\sigma}(\delta^{\nu_1}_1, \delta^{\nu_2}_2, \ldots, \delta^{\nu_m}_m), \qquad \sigma = p+1, \ldots, n,$$

gleich Null sind. Um dies zu beweisen setzen wir in (45)

$$A^{\nu_1}_{a} = \delta^{\nu_1}_{a}, \qquad a = 1, 2, \ldots, p,$$

$$A^{\nu_1}_{\sigma} = -\delta^{\nu_1}_{\sigma}, \qquad \sigma = p+1, \ldots, n,$$

ein. Dann erhalten wir

$$f^{\sigma}(\delta^{\nu_1}_1, \delta^{\nu_2}_2, \ldots, \delta^{\nu_m}_m) = -f^{\sigma}(\delta^{\nu_1}_1, \ldots, \delta^{\nu_m}_m), \qquad \sigma = p+1, \ldots, n.$$

Daraus folgt sofort (46) und der Beweis des Satzes ist beendet.

Der Beweis des Satzes 3. Um die Werte der Funktion

$$f^{\omega}, \qquad \omega = 1, 2, \ldots, n,$$

zu bestimmen, falls alle Vektoren (1) gleich Null sind, setzt man

$$A^{\omega'}_{\nu} = -\delta^{\omega}_{\nu}, \qquad \omega, \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

in (5) ein. Dann erhalten wir

$$f^{\omega}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} = -f^{\omega}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \qquad \omega = 1, 2, \ldots, n.$$

Daraus folgt, daß die den Nullvektoren entsprechenden Werte von f^{ω} gleich Null sein müssen.

Literaturverzeichnis

[1] S. Gołąb, *Über Differentialkomitanten der Vektorfelder* (unter der Presse).

[2] M. Kucharzewski, *Über die skalaren Komitanten der Vektorfelder*, Ann. Pol. Math. 9 (1961), S. 311-323.

[3] A. Moór, *Über Tensoren, die aus angegebenen geometrischen Objekten gebildet sind*, Publ. Math. 6 (1959), S. 15-25.

Reçu par la Rédaction le 20. 3. 1960