Travaux cités

[1] M. Gevrey, *Détermination et emploi des fonctions de Green*, Journal de Mathématiques, Paris 1930, p. 1-80.

[2] G. Giraud, *Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique*, Bulletin des Sc. Math. 56 (1932), p. 248-272, 281-312, 316-352.

[3] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation elliptique et des problèmes aux limites*, Annales Polonici Mathematici 3 (1957), p. 247-284.

[4] — *Równania całkowe i ich zastosowania*, t. II, Warszawa 1958.

[5] — *Sur quelques propriétés des potentiels généralisés et un problème aux limites pour l'équation elliptique*, Annales Polonici Mathematici (sous presse).

Reçu par la Rédaction le 5. 2. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1961)

Problème non linéaire à dérivée oblique

par J. Wolska-Bochenek (Warszawa)

1. Introduction. Dans le travail [1] I. N. Vécoua a posé et résolu le problème aux limites à dérivée oblique pour l'équation elliptique, c'est-à-dire le problème consistant à déterminer une fonction $U(x, y)$ qui satisfait, à l'intérieur d'un domaine G limité par la courbe fermée Γ, à l'équation:

$$\Delta U + a(x, y) U_x + b(x, y) U_y + \varepsilon c(x, y) U = f(x, y) \tag{1}$$

et, en tout point Π de cette courbe Γ, à la condition limite suivante:

$$\alpha(\Pi) U_x - \beta(\Pi) U_y + \varepsilon\gamma(\Pi) U = \delta(\Pi), \quad \text{ou} \quad \frac{dU}{dl} + \varepsilon\gamma U = \delta \tag{2}$$

$a, b, c, f, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, étant des fonctions données et ε un paramètre. Ce problème a été résolu sous des hypothèses très générales. Notamment, les coefficients de l'équation (1) et la fonction f appartiennent à la classe $L_p(G+\Gamma)$, c'est-à-dire ils sont de puissance p intégrable dans le domaine fermé $G+\Gamma$. Les coefficients de la condition limite (2) satisfont à la condition de Hölder et la courbe Γ admet en tout point une tangente continue satisfaisant à la condition de Hölder. La solution du problème existe au sens généralisé: la fonction cherchée $U(x, y)$ appartient à la classe $C^1(G+\Gamma)$ et $D_{2,p}(G)$ — c'est-à-dire elle admet des dérivées premières continues et des dérivées secondes généralisées au sens de Soboleff [2], appartenant à la classe $L_p[G+\Gamma]$.

Pour résoudre le problème proposé, I. N. Vécoua introduit la fonction complexe

$$w(z) = U_x - iU_y \equiv 2\partial_z U \equiv 2U_z. \tag{3}$$

Alors l'équation (1) et la condition (2) prennent la forme

$$\partial_{\bar z} w + \tfrac{1}{4}(a+ib)w + \tfrac{1}{4}(a-ib)\overline{w} + \tfrac{1}{2}\varepsilon c U = \tfrac{1}{2} f, \tag{4}$$

$$\mathrm{Re}[\overline{\lambda(z)}w] + \varepsilon\gamma U = \delta, \qquad \lambda = \alpha + i\beta, \tag{5}$$

où l'on a posé

$$\partial_{\bar z} w = \tfrac{1}{2}(w_x + iw_y). \tag{6}$$

Dans le cas où le domaine G est simplement connexe, on peut, au moyen de la méthode de la représentation conforme, ramener le problème au problème analogue pour le cercle-unité ($|z| < 1$). L'auteur étudie le cas où G est le cercle $|z| < 1$ et le contour Γ est la circonférence de ce cercle.

On peut donc introduire les nouvelles fonctions:

$$\overline{\lambda(z)} = z^{-n} e^{\varkappa(z)} e^{-p(z)}, \qquad w_*(z) = e^{\varkappa(z)} w(z), \tag{7}$$

où $X(z) = p+iq$ est la fonction, holomorphe dans le cercle G, donnée par l'intégrale de Schwartz:

$$X(z) = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma q(t) \frac{t+z}{t-z} \cdot \frac{dt}{t}, \tag{8}$$

où $q = -\arg\lambda + n\arg z$ et n désigne l'indice du problème proposé, c'est-à-dire

$$n = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg\lambda(t). \tag{9}$$

En substituant les expressions (7) dans l'équation (4) et la condition (5), on arrive au problème suivant:

$$\partial_{\bar z} w_* + A w_* + B\overline{w}_* + \varepsilon C U = F \quad (\text{dans } G), \tag{10}$$

$$\operatorname{Re}[z^{-n} w_*(z)] + \varepsilon\gamma_* U = \delta_* \quad (\text{sur } \Gamma), \tag{11}$$

où

$$\begin{gathered} A = \tfrac{1}{4}(a+ib), \quad B = \tfrac{1}{4}(a-ib) e^{2iq}, \quad C = \tfrac{1}{2} c e^{\varkappa}, \quad F = \tfrac{1}{2} e^{\varkappa} f, \\ \gamma_* = \gamma e^{p}, \quad \delta_* = \delta e^{p}. \end{gathered} \tag{12}$$

La formule qui fournit la solution du problème proposé aura la forme

$$U(x, y) = c_0 + P w_*, \tag{13}$$

où

$$P w_* = \operatorname{Re}\left[-\frac{1}{2\pi} \iint_G \left(\frac{e^{-\overline{\varkappa(\zeta)}}\overline{w_*(\zeta)}}{\zeta - z} - \frac{z e^{-\varkappa(\zeta)} w_*(\zeta)}{1-\bar\zeta z}\right) d\xi\, d\eta\right]. \tag{13'}$$

Écrivons l'équation (10) et la condition (11) sous la forme

$$\partial_{\bar z} w_* + A w_* + B\overline{w}_* = F - \varepsilon C U \quad (\text{dans } G), \tag{14}$$

$$\operatorname{Re}[z^{-n} w_*(z)] = \delta_* - \varepsilon\gamma_* U \quad (\text{sur } \Gamma). \tag{15}$$

En considérant les seconds membres de ces expressions comme connus, on arrive au problème de Riemann-Hilbert généralisé, discuté d'une façon très complète dans la monographie de I. N. Vécoua [3]. Donc la solution du problème (14), (15) dans le cas $n \geqslant 0$ aura la forme:

$$w_*(z) = \hat w(z) + \varepsilon P' U + \sum_{k=1}^{2n+1} c_k w_k(z), \tag{16}$$

où c_k sont des constantes réelles arbitraires, $w_1, \ldots, w_{2n+1}$ les solutions linéairement indépendantes du problème homogène:

$$\partial_{\bar z} w_* + A w_* + B\overline{w}_* = 0 \quad (\text{dans } G), \qquad \operatorname{Re}[z^{-n} w_*] = 0 \quad (\text{sur } \Gamma)$$

et $\hat w + \varepsilon P' U$ la solution particulière du problème (14), (15). D'après l'étude faite dans la monographie [3], $\hat w$ et $F' U$ s'expriment comme il suit:

$$\begin{aligned} \hat w(z) &= \int_0^{2\pi} \hat X_n(z, e^{i\psi}) \delta(\psi)\, d\psi + \iint_G \hat\Omega_n(z, \zeta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \\ P' U &= -\int_0^{2\pi} \hat X_n(z, e^{i\psi}) \gamma(\psi) U\, d\psi - \\ &\qquad - \iint_G [\Omega_n'(z, \zeta) C(\zeta) + \Omega_n''(z, \zeta) \overline{C(\zeta)}] U(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \end{aligned} \tag{17}$$

où l'on a posé

$$\begin{gathered} \hat X_n(z, e^{i\psi}) = X_n(z, e^{i\psi}) e^{p(\psi)}, \qquad \zeta = e^{i\psi}, \\ \hat\Omega_n(z, \zeta) = \tfrac{1}{2}\Omega_n'(z, \zeta) e^{\varkappa(\zeta)} + \tfrac{1}{2}\Omega_n''(z, \zeta) e^{\overline{\varkappa(\zeta)}}, \end{gathered} \tag{18}$$

$X_n, \Omega_n', \Omega_n''$, étant les résolvantes du problème de Riemann-Hilbert généralisé dans le cas du cercle, c'est-à-dire

$$\Omega_n'(z, t) = \tfrac{1}{2}(X_n' + i X_n''), \qquad \Omega_n''(z, t) = \tfrac{1}{2}(X_n - i X_n), \tag{19}$$

où X_n, X_n', X_n'' désignent les solutions des équations intégrales:

$$\begin{aligned} X_n(z) + Q_n X_n &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{t^{n+1}}{t-z} + \frac{z^{2n+1}\bar t^{n+1}}{1-z\bar t}\right), \\ X_n'(z) + Q_n X_n' &= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{t-z} + \frac{z^{2n+1}}{1-z\bar t}\right), \\ X_n''(z) + Q_n X_n'' &= -\frac{1}{\pi i}\left(\frac{1}{t-z} - \frac{z^{2n+1}}{1-z\bar t}\right) \end{aligned} \tag{20}$$

et $Q_n \omega$ désigne l'opération suivante:

$$Q_n \omega = P_n(B\bar\omega) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \left(\frac{B(\zeta)\overline{\omega(\zeta)}}{\bar\zeta - z} + \frac{z^{2n+1}\overline{B(\zeta)}\omega(\zeta)}{1-\bar\zeta z}\right) d\xi\, d\eta. \tag{21}$$

Donc $\hat w(z)$ est une fonction connue, $P' U$ dépend de la fonction inconnue U.

En remplaçant dans l'expression (12) w_* par l'expression (16), on arrive à l'èquation intégrale

$$U-\varepsilon\hat{P}U = P\hat{w}(z)+c_0+\sum_{k=0}^{2n+1} c_k P w_k(z), \tag{22}$$

où $\hat{P} = PP'$ est un opérateur complètement continu. Il en résulte qu'on peut appliquer les théorèmes de Fredholm à l'équation (22). D'après le théorème 4.12 [3] la solution du problème généralisé de Riemann-Hilbert existe toujours, si l'indice n satisfait à l'inégalité

$$n > m-1$$

(où m est le nombre désignant la multiplité du domaine multiplement connexe; pour $m = 0$ le domaine est simplement connexe).

2. Énoncé du problème. Dans ce travail nous nous proposons de résoudre le problème non linéaire à dérivée oblique. Nous allons trouver une fonction $u(x, y)$, qui satisfait à l'intérieur du domaine G presque partout à l'équation

$$\Delta u + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = f(x, y) \tag{23}$$

et en tout point Π du contour Γ à la condition limite:

$$\frac{du}{dl_1} + \gamma(\Pi)u = \varphi\left(\Pi, u, \frac{du}{dl_2}\right), \tag{24}$$

où du/dl_1 et du/dl_2 désignent les dérivées dans les directions des axes l_1 et l_2. La condition limite (24) peut être mise sous la forme équivalente:

$$\alpha_1 u_x - \beta_1 u_y + \gamma u = \varphi(\Pi, u, \alpha_2 u_x - \beta_2 u_y), \tag{24'}$$

où

$$\alpha_i = \cos(l_i, x), \quad \beta_i = \cos(l_i, y), \quad \alpha_i^2+\beta_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2).$$

Le problème (24) pour l'équation $\Delta u = 0$ a été étudié par W. Pogorzelski dans le travail [4], dans le cas $du/dl_1 = du/dn$ (dérivée normale), $du/dl_2 = du/ds$ (dérivée tangentielle). Le problème analogue pour l'équation $\Delta u = F(x, y, u, u_x, u_y)$ a été résolu par l'auteur [5].

3. Résolution du problème. Pour résoudre le problème (23), (24), nous admettons les hypothèses suivantes:

I. Le domaine G est simplement connexe, limité par la courbe $\Gamma \in C^1_{\mu}$, c'est-à-dire admettant en tout point une tangente continue, et l'angle entre les tangentes aux points Π_1 et Π_2 de la courbe Γ satisfait à la condition

$$\delta_{\Pi_1\Pi_2} < \text{const}\, r^{\mu}_{\Pi_1\Pi_2}, \quad 0 < \mu \leqslant 1.$$

En utilisant la méthode de la représentation conforme, nous pouvons réduire le problème au domaine du cercle-unité dans le plan de la variable complexe, c'est-à-dire au domaine G: $|z| < 1$ et à la courbe Γ: $|z| = 1$.

II. Les fonctions réelles données: $a(x, y)$, $b(x, y)$, $c(x, y)$, $f(x, y)$ sont définies en tout point $z = x+iy$ du domaine G et elles sont de puissance $p > 2$ absolument intégrable; à savoir elles appartiennent à la classe $L_p(G+\Gamma)$.

III. Les coefficients $\alpha_i(\Pi)$, $\beta_i(\Pi)$, $\gamma(\Pi)$ $(i = 1, 2)$ sont des fonctions données réelles du point $\Pi(\zeta) \in \Gamma$, où $\zeta = \xi+i\eta$, et satisfont à la condition de Hölder suivante:

$$|\alpha_i(\Pi_1)-\alpha_i(\Pi_2)| \leqslant H_\alpha r^{\sigma}_{\Pi_1\Pi_2}, \quad |\beta_i(\Pi_1)-\beta_i(\Pi_2)| \leqslant H_\beta r^{\sigma}_{\Pi_1\Pi_2} \quad (i = 1, 2),$$
$$|\gamma(\Pi_1)-\gamma(\Pi_2)| \leqslant H_\gamma r^{\sigma}_{\Pi_1\Pi_2} \quad (0 < \sigma \leqslant \mu).$$

IV. La fonction donnée réelle $\varphi(\Pi, u_0, u_1)$ est définie et bornée dans le domaine $[\Pi \in \Gamma, |u_0| \leqslant R, |u_1| \leqslant R]$ et satisfait à la condition:

$$|\varphi(\Pi, u_0, u_1)-\varphi(\Pi', u_0', u_1')| \leqslant H_\varphi[r^{\sigma}_{\Pi\Pi'}+|u_0-u_0'|^{\sigma}+|u_1-u_1'|].$$

Dans ces conditions la solution du problème (23), (24) peut exister au sens généralisé $(u \in D_{2,p}(G))$. En appliquant la méthode de I. N. Vécoua [3], nous pouvons ramener le problème (23), (24) au problème suivant:

$$\partial_{\bar{z}} w_* + A w_* + B\overline{w}_* + Cu = F \quad (\text{dans } G), \tag{25}$$

$$\operatorname{Re}[\zeta^{-n} w_*] + \gamma_* u = \varphi_*[\zeta, u, \alpha_2 u_x - \beta_2 u_y] \quad (\text{sur } \Gamma) \tag{26}$$

où A, B, C, F, γ_* sont définies par les formules (12) et où l'on a posé $\varphi_* = \varphi\cdot e^{p}$. Donc, dans le cas $n \geqslant 0$, le problème se ramène à la résolution du système de deux équations intégro-différentielles non linéaires à fonctions inconnues $w_*(z)$ et $u(x, y)$

$$\begin{aligned} w_* &= P_1\varphi_*[z, u, \alpha_2 u_x - \beta_2 u_y] + P_2 u + f_1(z) + \sum_{k=1}^{2n+1} c_k w_k(z), \\ u &= c_0 + P w_* \end{aligned} \tag{27}$$

où l'on a posé:

$$\begin{aligned} P_1\varphi_* &= \int_0^{2\pi} \hat{X}_n(z, e^{i\psi})\varphi_*[e^{i\psi}, u, \alpha_2 u_x - \beta_2 u_y]\,d\psi, \qquad \zeta = e^{i\psi}, \\ P_2 u &= -\int_0^{2\pi} \hat{X}_n(z, e^{i\psi})\gamma(\psi)u\,d\psi - \\ &\quad -\iint_G [\Omega_n'(z, z_1)C(z_1)+\Omega_n''(z, z_1)\overline{C(z_1)}]u(x_1, y_1)\,dx_1dy_1, \\ f_1(z) &= \iint_G \hat{\Omega}_n(z, z_1) f(x_1, y_1)\,dx_1dy_1, \end{aligned} \tag{28}$$

$\hat{X}_n$, $\hat{\Omega}_n$, Ω'_n, Ω''_n, étant définies par les expressions (18) et (19) et Pw_* par l'expression (13').

D'après le théorème 4.12 [3], la solution du problème (1), (2) dans le domaine simplement connexe existe toujours pour $n > -1$. Le problème traité par nous, dans le cas $n \geqslant 0$, peut donc être résolu sous les hypothèses admises; d'autres conditions ne sont pas nécessaires.

Pour résoudre le système d'équations (27) considérons le système auxiliaire de la forme:

$$(29)\quad \begin{aligned} &w_* = P_1\varphi_*[z, u, \alpha_2 u_1 - \beta_2 u_2] + P_2 u + f_1 + \sum_{k=1}^{2n+1} c_k w_k, \\ &u = c_0 + Pw_*, \qquad u_1 = \frac{\overline{w}_* + w_*}{2} e^{-\varkappa(z)}, \qquad u_2 = \frac{\overline{w}_* - w_*}{2i} e^{-\varkappa(z)} \end{aligned}$$

à fonctions inconnues $w_*(z)$, $u(x, y)$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$. Nous allons résoudre le système (29) en appliquant le théorème topologique de J. Schauder [6] relatif au point invariant d'une transformation fonctionnelle.

Considérons l'espace fonctionnel Λ composé de tous les systèmes de fonctions $w_*(z)$, $u(x, y)$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, où les fonctions complexes $w_*(z)$ sont définies et continues en tout point $z \in G + \Gamma$, et les fonctions réelles $u(x, y)$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$ sont définies et continues en tout point $z = x + iy \in G + \Gamma$; en outre les fonctions $u(x, y)$ admettent une dérivée u_z par rapport à la variable $z = x + iy$ en tout point $z \in G + \Gamma$ (au sens (3)). L'espace Λ sera linéaire, si nous définissons le produit du point Q par un nombre réel l et la somme de deux points $Q[w_*, u, u_1, u_2]$ et $Q'[w'_*, u', u'_1, u'_2]$ par les égalités:

$$lQ = [lw_*, lu, lu_1, lu_2], \qquad Q + Q' = [w_* + w'_*, u + u', u_1 + u'_1, u_2 + u'_2].$$

On définit la norme des points Q de l'espace Λ par la somme des bornes supérieures

$$(30)\qquad \delta(Q, 0) = \sup|w_*| + \sup|u| + \sup|u_1| + \sup|u_2| + \sup|u_z|$$

et la distance des deux points Q et Q' par la somme

$$(31)\quad \delta(Q, Q') = \sup|w_* - w'_*| + \sup|u - u'| + \sup|u_1 - u'_1| + \sup|u_2 - u'_2| + \sup|u_z - u'_z|.$$

L'espace Λ est donc normé et complet.

Considérons maintenant dans l'espace Λ l'ensemble E de tous les points $Q[w_*, u, u_1, u_2]$ satisfaisant aux conditions:

$$(32)\quad \begin{aligned} &|w_*| \leqslant \varrho, \quad |u| \leqslant R, \quad |u_1| \leqslant R_1, \quad |u_2| \leqslant R_2, \quad |u_z| \leqslant \varrho', \\ &|w_*(z) - w_*(z')| \leqslant \varkappa |z - z'|^\tau, \\ &|u_i(z) - u_i(z')| \leqslant \varkappa_i |z - z'|^\tau \quad (i = 1, 2), \\ &|u_z(z) - u_z(z')| \leqslant \varkappa' |z - z'|^\tau, \end{aligned}$$

où $\tau = \min(\sigma, (p-2)/p)$. Les constantes positives ϱ, R, R_1, R_2 sont arbitrairement choisies, sous la condition que les constantes R, R_1, R_2 doivent satisfaire à l'inégalité

$$(32')\qquad \sup|\alpha_2| R_1 + \sup|\beta_2| R_2 \leqslant R$$

(voir l'hypothèse IV). L'ensemble E est évidemment fermé, puisque les fonctions limites des suites uniformément convergentes de fonctions w_*, u, u_1, u_2, vérifiant les conditions (32) vérifient aussi ces conditions. L'ensemble E est en outre convexe; en effet, si $[w_*, u, u_1, u_2]$ et $[w'_*, u', u'_1, u'_2]$ sont deux points vérifiant les inégalités (32), les fonctions:

$$(1-k)w_* + kw'_*, \qquad (1-k)u + ku', \qquad (1-k)u_i + ku'_i \qquad (i = 1, 2)$$

les vérifient aussi si le nombre réel k varie dans l'intervalle $(0, 1)$; cela veut dire que tous les points du segment rectiligne qui joint les points Q et Q' dans l'ensemble E appartiennent aussi à cet ensemble.

Transformons maintenant l'ensemble E en faisant correspondre à tout point $Q[w_*, u, u_1, u_2]$ de cet ensemble le point $\tilde{Q}[W, U, U_1, U_2]$ déterminé par les relations fonctionnelles:

$$(33)\quad \begin{aligned} &W = P_1\varphi_*[z, u, \alpha_2 u_1 - \beta_2 u_2] + P_2 u + f_1 + \sum_{k=1}^{2n+1} c_k w_k, \\ &U = c_0 + Pw_*, \qquad U_1 = \frac{\overline{w}_* + w_*}{2} e^{-\varkappa(z)}, \qquad U_2 = \frac{\overline{w}_* - w_*}{2i} e^{-\varkappa(z)}. \end{aligned}$$

Nous allons démontrer que ces relations déterminent un point $\tilde{Q}[W, U, U_1, U_2]$ de l'espace Λ. En effet la première équation du système (33) détermine une fonction $W(z)$, continue dans le domaine $G + \Gamma$ et satisfaisant dans ce domaine à la condition de Hölder avec l'exposant τ. Cela résulte des propriétés des intégrales (28) dans le second membre de cette équation.

L'intégrale $P_1\varphi_*$ satisfait, comme l'a montré I. N. Vécoua [3], à la condition de Hölder avec l'exposant σ, si la fonction sous le signe intégrale possède cette propriété. La fonction $\varphi_*[\zeta, u, \alpha_2 u_1 - \beta_2 u_2]$, vérifie, en vertu de l'hypothèse (4), l'inégalité:

$$(34)\quad \begin{aligned} &|\varphi_*[\zeta, u, \alpha_2 u_1 - \beta_2 u_2] - \varphi_*[\zeta', u', \alpha_2 u'_1 - \beta_2 u'_2]| \\ &\leqslant H_\varphi[|\zeta - \zeta'|^\sigma + |u - u'|^\sigma + |\alpha_2| \cdot |u_1 - u'_1| + |u'_1| \cdot |\alpha_2 - \alpha'_2| + \\ &\quad + |\beta_2| \cdot |u_2 - u'_2| + |u'_2| \cdot |\beta_2 - \beta'_2|] \\ &\leqslant H_\varphi[|\zeta - \zeta'|^\sigma + (\sup|u_z| \cdot |\zeta - \zeta'|)^\sigma + \sup|\alpha_2| \cdot |\varkappa_1| \cdot |\zeta - \zeta'|^\sigma + \\ &\quad + \sup|\beta_2| \cdot |\varkappa_2| \cdot |\zeta - \zeta'|^\sigma + R_1 H_\alpha |\zeta - \zeta'|^\mu + R_2 H_\beta |\zeta - \zeta'|^\mu] \\ &\leqslant H_\varphi[1 + \varrho'^\sigma + M_\alpha \varkappa_1 + M_\beta \varkappa_2 + H_\alpha R_1 + H_\beta R_2] \cdot |\zeta - \zeta'|^\sigma \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse $\sigma \leqslant \mu$, où M_α, M_β désignent les bornes supérieures des fonctions α_2 et β_2, et H_α, H_β désignent les coefficients de Hölder des fonctions α_2 et β_2. Donc l'intégrale $P_1\varphi_*$ possède la propriété citée. L'opérateur $P_2 u$ se compose de deux intégrales. Le première possède la propriété précédente. La seconde

$$J = \iint_G [\Omega_n'(z, z_1) C(z_1) + \Omega_n''(z, z_1) \overline{C(z_1)}] u(x_1, y_1) dx_1 dy_1 \tag{35}$$

satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant $(p-2)/p$. En effet, d'après les expressions (19), on peut écrire l'intégrale J sous la forme:

$$J = \iint_G [X_n''(z, z_1) h(z_1) + X_n'(z, z_1) g(z_1)] \cdot u(x_1, y_1) dx_1 dy_1, \tag{36}$$

où $h(z_1) = \operatorname{Re} C(z_1)$, $g(z_1) = \operatorname{Im} C(z_1)$. Donc, d'après les équations (20), X_n' et X_n'' s'expriment par les formules:

$$\begin{aligned} X_n'(z, z_1) &= -Q_n X_n' - \frac{1}{\pi(z_1 - z)} - \frac{z^{2n+1}}{\pi(1 - z\bar{z}_1)}, \\ X_n''(z, z_1) &= -Q_n X_n'' - \frac{1}{\pi i(z_1 - z)} + \frac{z^{2n+1}}{\pi i(1 - z\bar{z}_1)} \end{aligned} \tag{37}$$

et nous aurons pour l'intégrale J l'expression suivante:

$$\begin{aligned} J = &- \iint_G [h(z_1) Q_n X_n' + g(z_1) Q_n X_n''] u(x_1, y_1) dx_1 dy_1 - \\ &- \frac{1}{\pi} \iint_G \frac{F(z_1) u(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{z_1 - z} - \frac{z^{2n+1}}{\pi} \iint_G \frac{\overline{F(z_1)} u(x_1, y_1) dx_1 dy_1}{1 - z\bar{z}_1} \\ = &\, J_1 + J_2 + J_3. \end{aligned} \tag{38}$$

Les fonctions X_n' et X_n'', étant solutions des équations (20), sont continues, les opérations $Q_n X_n'$ et $Q_n X_n''$ représentent donc les fonctions satisfaisant à la condition de Hölder avec l'exposant $(p-2)/p$ [3]. La fonction J_1 satisfait, d'après la remarque précédente, à la condition de Hölder:

$$\begin{aligned} |J_1(z) - J_1(z')| < &\Big(\iint_G |h|^p dx_1 dy_1\Big)^{1/p} \iint_G |Q_n X_n'(z, z_1) - \\ &- Q_n X_n'(z', z_1)| \cdot |u| dx_1 dy_1 + \\ &+ \Big(\iint_G |g|^p dx_1 dy_1\Big)^{1/p} \iint_G |Q_n X_n'(z, z_1) - \\ &- Q_n X_n'(z', z_1)| \cdot |u| dx_1 dy_1 \\ < &\, M_1 \cdot L_p(C) K_n R \cdot |z - z'|^{(p-2)/p} \end{aligned} \tag{39}$$

où nous avons désigné par $L_p(C)$ la norme $\|C\|$ dans le domaine $G+\Gamma$:

$$\|C\| \equiv L_p(C) = \Big(\iint_G |C|^p dx_1 dy_1\Big)^{1/p}$$

et par K_n la plus grande des bornes supérieures des intégrales:

$$\iint_G |X_n'| dx_1 dy_1, \qquad \iint_G |X_n''| dx_1 dy_1,$$

M_1 étant une constante qui dépend de p. Les intégrales J_2 et J_3 sont discutées dans la monographie [3] comme les fonctions $T_G f$ et, en vertu des théorèmes démontrés dans [3] elles satisfont à la condition de Hölder suivante:

$$|J_i(z) - J_i(z')| < L_p(F) \cdot R \cdot M_2 |z - z'|^{(p-2)/p} \quad (i = 1, 2), \tag{40}$$

où $L_p(F) = \|F\| = 2L_p(f)$ dans le domaine $G+\Gamma$ et M_2 dépend de p. En rapprochant les inégalités (39) et (40) nous arrivons à l'inégalité:

$$|J(z) - J(z')| < [L_p(C) K_n + L_p(f)] M_p \cdot R |z - z'|^{(p-2)/p}, \tag{41}$$

où $M_p = \max(M_1, M_2)$. D'une façon analogue nous pouvons démontrer, que la fonction donnée $f_1(z)$ possède la propriété suivante:

$$\begin{aligned} |f_1(z) - f_1(z')| &< \tfrac{1}{2} M_1 L_p(f) K_n |z - z'|^{(p-2)/p} + \tfrac{1}{2} M_2 L_p(f) |z - z'|^{(p-2)/p} \\ &< \tfrac{1}{2} M_p L_p(f) [K_n + 1] \cdot |z - z'|^{(p-2)/p}. \end{aligned} \tag{42}$$

Quant aux fonctions $w_k(z)$, qui sont les solutions du problème aux limites homogène, elles satisfont à la condition de Hölder avec l'exposant $\tau = \min(\sigma, (p-2)/p)$, d'après le théorème établi par I. N. Vécoua [3].

Nous constatons donc que la fonction W, correspondant aux fonctions w^*, u, u_1, u_2 de l'ensemble E, satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant $\tau = \min(\sigma, (p-2)/p)$. Il en résulte aussi que les fonctions U_1 et U_2 possèdent la même propriété.

Quant à la fonction U, définie par la deuxième équation du système (33), elle est évidemment bornée, et d'après les propriétés de l'opérateur P défini par l'expression (13') elle admet une dérivée U_z de la forme:

$$U_z = \tfrac{1}{2} e^{-\varkappa(z)} w_*(z)$$

satisfaisant à la condition de Hölder avec l'exposant $\tau = \min(\sigma(p-2)/p)$ Il en résulte que le point transformé $[W, U, U_1, U_2]$ appartient à l'espace Λ.

Cherchons maintenant la condition pour que le point transformé $\tilde{Q}[W, U, U_1, U_2]$ fasse partie de l'ensemble E. En s'appuyant sur les inégalités (34), (41), (42) nous pouvons affirmer que l'ensemble transformé E' fera partie de l'ensemble E, si les constantes du problème vérifient les inégalités suivantes:

$$(43)\quad \begin{gathered} k_n(M_\varphi+M_\gamma R)+[L_p(C)K_n+L_p(f)]\tilde{M}_p\cdot R+\tfrac{1}{2}L_p(f)(K_n+1)\tilde{M}_p+\\ +(2n+1)c_k\varrho_0\leqslant\varrho,\\ k_nH_\varphi[1+\varrho^\sigma+M_\alpha\varkappa_1+M_\beta\varkappa_2+H_\alpha R_1+H_\beta R_2]+k_nH_\gamma R+\\ +[L_p(C)K_n+L_p(f)]M_pR+\tfrac{1}{2}L_p(f)[K_n+1]M_p+(2n+1)c_k\varkappa_0\leqslant\varkappa,\\ c_0+\tilde{P}\varrho\leqslant R,\qquad \varrho\leqslant R_i\quad(i=1,2),\qquad \tfrac{1}{2}\varrho\leqslant\varrho',\\ \tfrac{1}{2}\varkappa\leqslant\varkappa_i\quad(i=1,2),\qquad \tfrac{1}{2}\varkappa\leqslant\varkappa' \end{gathered}$$

où $\tilde{P}$ est une constante dépendant du domaine G, $\varrho_0=\max|w_k|$, $\varkappa_0=\min\varkappa_k$, où $\varkappa_k$ est le coefficient de Hölder de la fonction w_k, $k_n=\int\limits_0^{2\pi}|\tilde{X}_n|\,d\psi$, $\tilde{M}_p$ est une constante positive, dépendant de p et G. En choisissant $\varkappa=\min(2\varkappa_1,2\varkappa_2,2\varkappa')$ et $\varrho=\min(2\varrho',R_1,R_2)$ on arrive aux six dernières inégalités (43). La constante R étant arbitraire, nous la choisissons assez grande pour que l'inégalité

$$c_0+\tilde{P}\varrho\leqslant R$$

soit satisfaite.

Nous pouvons maintenant supposer que les constantes arbitraires c_k dans les deux premières équations vérifient les inégalités évidentes

$$(2n+1)c_k\varrho_0<\varrho,\qquad (2n+1)c_k\varkappa_0<\varkappa;$$

on peut donc choisir les fonctions données f,c,γ,φ de telle façon que les deux premières inégalités (43) soient satisfaites. Alors l'ensemble transformé E' fera partie de l'ensemble E. La transformation (33) est continue dans l'espace Λ. Cela résulte des propriétés des opérateurs P_1, P_2 et P — complètement continus dans le domaine $G+\Gamma$. Il reste à montrer que l'ensemble transformé E' des points $\tilde{Q}[W,U,U_1,U_2]$ est compact. De l'étude précédente résulte que les fonctions W, U, U_1, U_2 satisfont à la condition de Hölder. Les coefficients de Hölder sont les mêmes pour toute la famille des fonctions W, U, U_1, U_2, donc les fonctions W, U, U_1, U_2 relatives à l'ensemble E' forment des familles de fonctions équicontinues. Or, l'ensemble E' est borné, il en résulte donc, d'après le théorème bien connu d'Arzelà, que l'ensemble transformé E' est compact.

Toutes les conditions du théorème de J. Schauder étant satisfaites, nous pouvons constater que dans l'ensemble E' il existe au moins un point $Q^*[W,U,U_1,U_2]$ invariant par rapport à la transformation (33), c'est-à-dire vérifiant le système d'équations (29) (pour des constantes c_k fixées).

On voit, d'après les équations (29), que les fonctions U_1 et U_2 vérifient les égalités:

$$U_1^*=U_x^*,\qquad U_2^*=U_y^*.$$

Donc la fonction W^* satisfait à l'équation

$$(44)\quad \begin{aligned} W^*(z)=&\int\limits_0^{2\pi}\hat{X}_n(z,e^{i\psi})\varphi_*[\psi,U^*,\alpha_2U_x^*-\beta_2U_y^*]\,d\psi-\\ &-\int\limits_0^{2\pi}\hat{X}_n(z,e^{i\psi})\gamma(\psi)U^*\,d\psi-\iint\limits_G[\Omega_n'(z,z_1)C(z_1)+\\ &+\Omega_n''(z,z_1)\overline{C(z_1)}]U^*\,dx_1dy_1+\iint\limits_G\hat{\Omega}_n(z,z_1)f(x_1,y_1)\cdot dx_1dy_1+\\ &+\sum_{k=1}^{2n+1}c_kw_k(z) \end{aligned}$$

et la fonction

$$U^*=c_0+PW^*$$

est la solution du problème (23), (24) pour des constantes c_k fixées.

La fonction W^* satisfait à la condition de Hölder avec l'exposant $\tau=\min\big(\sigma,(p-2)/p\big)$ et vérifie l'équation (25), donc elle admet une dérivée généralisée $W_{\bar z}^*$ de classe $L_p(G+\Gamma)$, c'est-à-dire la fonction W^* appartient à la classe $D_{1,p}$. Il en résulte de même que la fonction U^* admet une dérivée seconde généralisée de classe $L_p(G+\Gamma)$:

$$U^*\in C_\tau^1(G+\Gamma)\qquad\text{et}\qquad U^*\in D_{2,p}(G+\Gamma).$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si les fonctions qui figurent dans l'équation* (23) *vérifient les hypothèses* II, *si les fonctions qui figurent dans la condition limite* (24) *vérifient les hypothèses* III *et* IV, *si la courbe limitant le domaine G vérifie la condition* I, *si l'indice du problème n'est pas négatif, enfin si les fonctions données f,c,γ,φ sont choisies de telle façon que les inégalités* (43) *soient satisfaites, il exists toujours au moins une solution généralisée $U\in D_{2,p}$ de l'équation* (23), *qui satisfait en tout point de la courbe Γ à la condition limite* (24), *les constantes c_k étant fixées d'une façon arbitraire.*

Travaux cités

[1] И. Н. Векуа, *Граничная задача с косой производной для уравнения эллиптического типа,* Доклады АН СССР 92 (1953), p. 1113-1116.

[2] С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике,* Ленинград 1950.

[3] И. Н. Векуа, *Обобщенные аналитические функции,* Москва 1959.

[4] W. Pogorzelski, *Problème aux limites de Poincaré généralisé*, Ann. Pol. Math. 2 (1955), p. 257-270.

[5] J. Wolska-Bochenek, *Un problème aux limites à dérivée tangentielle pour l'équation du type elliptique*, Ann. Pol. Math. 4 (1958), p. 275-287.

[6] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalraümen*, Studia Math. 2 (1930), p. 171-180.

Reçu par la Rédaction le 12. 2. 1960

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1961)

About the extremal spiral schlicht functions

by J. Zamorski (Wrocław)

Let S denote a class of regular schlicht functions with the expansion

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \tag{1}$$

for $|z| < 1$, and let Σ denote a class of meromorphic schlicht functions with the development

$$F(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \ldots \tag{2}$$

for $0 < |z| < 1$. L. Špaček in his paper [3] proves that each function

$$f(z) = z \exp\left\{\frac{1}{1-ai}\int_0^z \frac{p(z)-1}{z}\,dz\right\} \tag{3}$$

where $p(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, $|z| < 1$, $\operatorname{re} p(z) \geqslant 0$ and a is any real number, belongs to the class S. Further Špaček proves that for these functions the hypothesis of Bieberbach is true. Of course, similarly

$$F(z) = \frac{1}{z} \exp\left\{-\frac{1}{1-ai}\int_0^z \frac{p(z)-1}{z}\,dz\right\} \tag{4}$$

belongs to the class Σ.

Let S_a denote the class of functions defined by formula (3), and let Σ_a denote the class of functions defined by formula (4). We can easily see that for $a = 0$ class S_a becomes class S^* of all functions starlike for the origin of the system of coordinates. Similarly for the class Σ_a.

Let W_n^a denote the n-th region of the coefficients of functions of the class S_a. We can easily see that it is a $2n-2$ dimensional domain, closed, connected and bounded, including the origin of the system of coordinates. Namely from (3) we have

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \varrho[p(z)-1] \tag{5}$$