ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1961)

Sur la résolution de certains problèmes aux limites pour l'équation elliptique par la méthode des approximations successives

par J. Butkiewicz (Warszawa)

Problème 1. Soit l'équation aux dérivées partielles de la forme

$$\hat{\psi}(u) \equiv \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(A)u = F\left(A, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right). \tag{1}$$

On admet les hypothèses suivantes.

1. Les coefficients réels $a_{\alpha\beta}(A), b_\alpha(A), c(A)$ sont des fonctions des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, déterminées dans une région $\Omega+S$, Ω étant un domaine borné, limité par une surface fermée S dans l'espace euclidien à n dimensions, vérifiant les conditions de Hölder avec un exposant h $(0 < h \leqslant 1)$.

2. La forme quadratique $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A)Y_\alpha Y_\beta$ est définie positive dans $\Omega+S$.

3. La surface S vérifie la condition de Liapounoff avec un exposant h_1, vérifiant l'inégalité $0 < h_1 \leqslant 1$.

4. La fonction $F(A, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est définie, bornée et continue dans la région

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega, \quad |u_\nu| \leqslant R \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{2a}$$

et elle vérifie une condition de Hölder-Lipschitz

$$|F(A, u_0, u_1, \ldots, u_n) - F(A', u_0', u_1', \ldots, u_n')| < k(\Omega^*)|AA'|^{h_F} + k_F\sum_{\nu=0}^{n}|u_\nu - u_\nu'|, \tag{2b}$$

où le coefficient constant $k_F > 0$ est déterminé et l'exposant constant h_F vérifie l'inégalité $0 < h_F \leqslant 1$, $k(\Omega^*)$ est une constante positive, dépendant du domaine fermé $\Omega^* \subset \Omega$.

Nous allons résoudre, par la méthode des approximations successives, le problème consistant à déterminer une fonction $u(A)$ qui satisfait à l'équation elliptique (1) en tout point A du domaine Ω et vérifie, en tout point $P \in S$, une condition limite non linéaire relativement à la dérivée transversale

$$\lim_{A\to P}\left[\frac{du(A)}{dT_P}\right]+p(P)u(P)=X[P,u(P)], \tag{3}$$

où: 1° la fonction continue $p(P)$ est définie sur la surface S et vérifie l'inégalité de Hölder

$$|p(P)-p(P')|<\mathrm{const}|PP'|^{h_p}, \quad P,P'\in S, \quad 0<h_p\leqslant 1, \tag{4}$$

2° la fonction continue $X(P,u)$ est définie dans la région $[P\in S,\ |u|\leqslant R]$ et vérifie les conditions de Hölder-Lipschitz

$$|X(P,u)-X(P',u')|<k_X[|PP'|^{h_X}+|u-u'|]; \tag{5a}$$

de plus, cette fonction admet par rapport à la variable u une dérivée vérifiant la condition de Hölder-Lipschitz

$$|X'_u(P,u)-X'_u(P',u')|<k'_X[|PP'|^{h_X}+|u-u'|], \tag{5b}$$

$P,P'\in S$, $|u|\leqslant R$, $|u'|\leqslant R$, k_X, k'_X, h_X sont des constantes et $0<h_X\leqslant 1$.

Notons que les problèmes aux limites pour l'équation elliptique ont été traités, sous d'autres hypothèses, par Gevrey [1] et Giraud [2]. Nous allons chercher la solution $u(A)$ du problème sous forme de la somme

$$u(A)=-\iiint_\Omega \Gamma(A,B)\lambda_n^{-1}(B)F\left[B,u(B),\frac{\partial u(B)}{\partial\xi_1},\ldots,\frac{\partial u(B)}{\partial\xi_n}\right]dB+\iint_S \Gamma(A,Q)\varphi(Q)dQ \tag{6}$$

d'un potentiel de charge spatiale et d'un potentiel de simple couche de densité inconnue et borné $\varphi(Q)$, relatif à l'équation $\hat\varphi(u)=0$. Nous désignerons par $\Gamma(A,B)$ la solution foundamentale de l'équation $\hat\varphi(u)=0$ et nous poserons (voir [3])

$$\lambda_n(B)=\frac{2(n-2)(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)\sqrt{\det|a^{\alpha\beta}(B)|}}.$$

En profitant de l'indétermination de la fonction inconnue $\varphi(Q)$, nous demandons que la condition limite (3) soit remplie par la fonction (6) en tout point $P\in S$. Notons, en nous appuyant sur le travail [3], que la valeur limite de la dérivée transversale du potentiel de simple couche est

$$\lim_{A\to P}\left[\frac{d}{dT_P}\iint_S \Gamma(A,Q)\varphi(Q)dQ\right]=-\frac{1}{2}\lambda_n(P)\varphi(P)+\iint_S\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P}\varphi(Q)dQ,$$

sous l'hypothèse que la fonction φ soit continue. Donc, en tenant compte de l'expression (6), nous arrivons à l'équation intégro-différentielle

$$-\frac{1}{2}\lambda_n(P)\varphi(P)+\iint_S\left[\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P}+p(P)\Gamma(P,Q)\right]\varphi(Q)dQ-\\ -\iiint_\Omega\left[\frac{d\Gamma(P,B)}{dT_P}+p(P)\Gamma(P,B)\right]\lambda_n^{-1}(B)F\left[B,u(B),\frac{\partial u(B)}{\partial\xi_1},\ldots\right.\\ \left.\ldots,\frac{\partial u(B)}{\partial\xi_n}\right]dB=X[P,u(P)]. \tag{7}$$

Le problème aux limites non linéaire est ainsi ramené à la résolution du système de deux équations intégro-différentielles (6) et (7) à deux fonctions inconnues: $u(A)$, où $A\in\Omega$, et $\varphi(Q)$, où $Q\in S$. Pour résoudre ce système considérons le système de $n+2$ équations intégrales

$$u_0(A)=-\iiint_\Omega\Gamma(A,B)\lambda_n^{-1}(B)F[F,u_0(B),\ldots,u_n(B)]dB+\\ +\iint_S\Gamma(A,Q)\varphi(Q)dQ, \tag{8a}$$

$$u_\nu(A)=-\iiint_\Omega\Gamma_{x_\nu}(A,B)\lambda_n^{-1}(B)F[B,u_0(B),u_1(B),\ldots,u_n(B)]dB+\\ +\iint_S\Gamma_{x_\nu}(A,Q)\varphi(Q)dQ \quad (\nu=1,2,\ldots,n), \tag{8b}$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_n(P)\varphi(P)+\iint_S\left[\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P}+p(P)\Gamma(P,Q)\right]\varphi(Q)dQ-\\ -\iiint_\Omega\left[\frac{d\Gamma(P,B)}{dT_F}+p(P)\Gamma(P,B)\right]\lambda_n^{-1}(B)F[B,u_0(B),u_1(B),\ldots,u_n(B)]dB\\ =X\left\{P,-\iiint_\Omega\Gamma(P,B)\lambda_n^{-1}(B)F[B,u_0(B),u_1(B),\ldots,u_n(B)]dB+\right.\\ \left.+\iint_S\Gamma(P,Q)\varphi(Q)dQ\right\} \tag{8c}$$

à $n+2$ fonctions inconnues: $u_0(A), u_1(A), \ldots, u_n(A), \varphi(P)$.

On voit que les intégrales de surface qui figurent dans ce système se rapportent à des fonctions à singularité forte, si les points A se trouvent sur la frontière S du domaine Ω. C'est pourquoi l'application de la méthode des approximations successives au système (8a, b, c) exige des considérations plus délicates que pour les équations à singularités faibles. Observons qu'on écarte cette difficulté dans le cas de la condition limite (3) linéaire par l'introduction d'une fonction de Green.

Nous pouvons résoudre le système (8) par la méthode des approximations successives, en appliquant les conditions (5a, b) et en admettant que la fonction inconnue $\varphi(Q)$ vérifie l'inégalité

$$|\varphi(P)-\varphi(P_1)| < k_\varphi |PP_1|^{h_\varphi}, \tag{9}$$

k_φ et h_φ étant des constantes positives fixées arbitrairement.

Considérons donc $n+2$ suites fonctionnelles

$$\{u_0^{(m)}(A)\}, \quad \{u_\nu^{(m)}(A)\} \ (\nu = 1, 2, \ldots, n), \quad \{\varphi^{(m)}(P)\}, \tag{10}$$

déterminées par les relations de récurrence

$$u_0^{(m+1)}(A) = -\iiint_\Omega \Gamma(A, B)\lambda_n^{-1}(B)F[B, u_0^{(m)}(B), u_1^{(m)}(B), \ldots \\ \ldots, u_n^{(m)}(B)]dB + \iint_S \Gamma(A, Q)\varphi^{(m+1)}(Q)dQ, \tag{11a}$$

$$u_\nu^{(m+1)}(A) = -\iiint_\Omega \Gamma_{x_\nu}(A, B)\lambda_n^{-1}(B)F[B, u_0^{(m)}(B), u_1^{(m)}(B), \ldots \\ \ldots, u_n^{(m)}(B)]dB + \iint_S \Gamma_{x_\nu}(A, Q)\varphi^{(m+1)}(Q)dQ \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{11b}$$

$$-\frac{1}{2}\lambda_n(P)\varphi^{(m+1)}(P) + \iint_S \left[\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P} + p(P)\Gamma(P,Q)\right]\varphi^{(m+1)}(Q)dQ - \\ -\iiint_\Omega \left[\frac{d\Gamma(P,B)}{dT_P} + p(P)\Gamma(P,B)\right]\lambda_n^{-1}(B)F[B, u_0^{(m)}(B), u_1^{(m)}(B), \ldots \\ \ldots, u_n^{(m)}(B)]dB = X[P, \bar{u}_0^{(m)}(P)] \tag{11c}$$

où

$$\bar{u}_0^{(m)}(P) = -\iiint_\Omega \Gamma(P, B)\lambda_n^{-1}(B)F[B, u_0^{(m)}(B), u_1^{(m)}(B), \ldots \\ \ldots, u_n^{(m)}(B)]dB + \iint_S \Gamma(P, Q)\varphi^{(m)}(Q)dQ. \tag{11d}$$

Les éléments initiaux des suites (10) sont des fonctions continues et satisfont aux relations

$$|u_\nu^{(0)}(A)| \leqslant R \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{12a}$$

$$|\varphi^{(0)}(P)| \leqslant \varrho, \quad |\varphi^{(0)}(P)-\varphi^{(0)}(P_1)| < k_\varphi |PP_1|^{h_\varphi}, \tag{12b}$$

ϱ, k_φ étant des constantes positives, fixées arbitrairement, h_φ a la valeur

$$h_\varphi = \min(h_X, h_P, \theta h, \theta' h_1), \quad \text{où} \quad 0 < \theta < 1, \quad 0 < \theta' < 1. \tag{13}$$

Pour étudier les intégrales qui figurent dans les formules (11a, b, c) nous nous appuyerons sur les limitations

$$|\Gamma(A, B)| < \text{const}|AB|^{-n+2}, \quad |\Gamma_{x_\nu}(A, Q)| < \text{const}|AQ|^{-n+1}, \\ \left|\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P}\right| < \text{const}|PQ|^{-n+1+h^*}, \tag{14}$$

$h^* = \min(h, h_1)$, et sur la décomposition

$$\iint_S \Gamma_{x_\nu}(A, Q)\varphi(Q)dQ = \varphi(P)\iint_S \Gamma_{x_\nu}(A, Q)dQ + \\ + \iint_S \Gamma_{x_\nu}(A, Q)\Gamma[\varphi(Q)-\varphi(P)]dQ, \tag{15}$$

P étant le point de la surface S le plus rapproché du point $A \in \Omega$.

Supposons que les approximations m-èmes des suites (10) soient continues et vérifient les inégalités suivantes

$$|u_\nu^{(m)}(A)| \leqslant R \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n), \\ |\varphi^{(m)}(P)| \leqslant \varrho, \quad |\varphi^{(m)}(P)-\varphi^{(m)}(P_1)| < k_\varphi |PP_1|^{h_\varphi} \tag{16}$$

dans la région $\Omega+S$, respectivement sur la surface S. Cherchons si les approximations suivantes satisfont aussi aux inégalités (16).

L'approximation $(m+1)$-ème de la densité de simple couche $\varphi^{(m+1)}(P)$ est déterminée par l'équation (11c) qui a la forme d'une équation intégrale de Fredholm

(17)

$$-\frac{1}{2}\lambda_n(P)\varphi^{(m+1)}(P) + \iint_S \left[\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P} + p(P)\Gamma(P,Q)\right]\varphi^{(m+1)}(Q)dQ = f(P)$$

dont le noyau admet, d'après (14), une singularité faible et $f(P)$ est une fonction continue déterminée.

Nous supposons que l'équation homogène

$$(18)\qquad -\frac{1}{2}\lambda_n(P)\varphi(P)+\iint_S\left[\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P}+p(P)\Gamma(P,Q)\right]\varphi(Q)\,dQ=0$$

n'admet que la solution nulle $\varphi(P)=0$. Donc l'équation (17) admet la solution

$$(19)\qquad \varphi^{(m+1)}(P)=-\frac{2f(P)}{\lambda_n(P)}-\iint_S\mathfrak{N}(P,Q)\frac{2f(Q)}{\lambda_n(Q)}\,dQ,$$

où $\mathfrak{N}(P,Q)$ désigne la somme de certains noyaux itérés et du noyau résolvant du noyau itéré borné, correspondant au noyau de l'équation (17).

En nous appuyant sur les relations (19), (11c), (14), nous obtiendrons une limitation de la forme

$$(20)\qquad |\varphi^{(m+1)}(P)|<(1+M_{\mathfrak{N}})\,M_\lambda(\bar{c}M_F+M_X),$$

où

$$M_\lambda=\sup_{Q\epsilon S}2\lambda_n^{-1}(Q),\qquad M_{\mathfrak{N}}=\sup_{P\epsilon S}\iint_S|\mathfrak{N}(P,Q)|\,dQ,$$

$$\bar{c}=\sup_{P\epsilon S}\iiint_\Omega\left|\frac{d\Gamma(P,B)}{dT_P}+p(P)\Gamma(P,B)\right|dB,$$

$$M_F=\sup_{\substack{B\epsilon\Omega\\ |u_\nu|\leqslant R}}|\lambda_n^{-1}(B)F[B,u_0,u_1,\ldots,u_n]|,\qquad M_X=\sup_{\substack{P\epsilon S\\ |u|\leqslant R}}|X(P,u)|.$$

Donc la fonction $\varphi^{(m+1)}(P)$ est bornée, ainsi que la fonction $\varphi^{(m)}(P)$, pourvu que l'inégalité

$$(21)\qquad (1+M_{\mathfrak{N}})M_\lambda(\bar{c}M_F+M_X)\leqslant\varrho$$

soit satisfaite.

Pour démontrer que la fonction $\varphi^{(m+1)}(P)$ vérifie l'inégalité de Hölder, nous nous basons sur les théorèmes du travail [3]. En utilisant ces résultats, nous voyons que la fonction (11d) vérifie une condition de la forme

$$(22)\qquad |\bar{u}_0^{(m)}(P)-\bar{u}_0^{(m)}(P_1)|<(\bar{c}_1M_F+\bar{c}_2\varrho)|PP_1|^\theta,\qquad 0<\theta<1,$$

$\bar{c}_1,\bar{c}_2$ étant des constantes positives, indépendantes de F, $\varphi^{(m)}$. De même la première intégrale dans l'équation (11c) vérifie l'inégalité

$$(23)\qquad |J^1(P)-J^1(P_1)|<\text{const}\sup_{Q\epsilon S}|\varphi^{(m+1)}(Q)||PP_1|^{h_\varphi}.$$

En nous appuyant sur le théorème auxiliaire de la p. 281 du travail [3], nous concluons que la seconde intégrale dans l'équation (11c) vérifie une inégalité de la forme

$$(24)\qquad |J^2(P)-J^2(P_1)|<\text{const}\,M_F|PP_1|^{h_\varphi}.$$

En rappochant les inégalités (23), (24) et en tenant compte de la condition (5a) et de l'inégalité (22), nous arrivons à l'inégalité de Hölder pour la fonction $\varphi^{(m+1)}(P)$:

$$(25)\qquad |\varphi^{(m+1)}(P)-\varphi^{(m+1)}(P_1)|<\{b_1\varrho+b_2M_F+k_X[b_3+b_4M_F+\varrho b_5]\}|PP_1|^{h_\varphi},$$

b_1,b_2,b_3,b_4,b_5 étant des constantes indépendantes des fonctions F, X. Donc la fonction $\varphi^{(m+1)}(P)$ vérifie une condition de Hölder de la forme (16), si la relation

$$(26)\qquad b_1\varrho+b_2M_F+k_X[b_3+b_4M_F+b_5\varrho]\leqslant k_\varphi$$

est vraie. D'après (14), (15), (20) et le théorème 10 de [4], chapitre XII, nous obtenons la limitation

$$(27)\qquad |u_\nu^{(m+1)}(A)|<c_1'M_F+c_2'\varrho+c_3'k_\varphi,\qquad A\epsilon\Omega+S\qquad(\nu=0,1,\ldots,n).$$

Nous en concluons que les fonctions $u_\nu^{(m+1)}(A)$ satisfont à l'inégalité (16), pourvu que l'inégalité

$$(28)\qquad c_1'M_F+c_2'\varrho+c_3'k_\varphi\leqslant R$$

soit vraie.

Il en résulte par induction que les fonctions $\varphi^{(m)}(P)$, $u_\nu^{(m)}(A)$ existent et vérifient, quel que soit m, les inégalités (16), si les constantes du problème, dépendant des fonction F, X, vérifient les conditions

$$(29)\qquad (1+M_{\mathfrak{N}})M_\lambda(\bar{c}M_F+M_X)\leqslant\varrho,\qquad c_1'M_F+c_2'\varrho+c_3'k_\varphi\leqslant R,$$
$$b_1\varrho+b_2M_F+k_X[b_3+b_4M_F+b_5\varrho]\leqslant k_\varphi.$$

Le choix des constantes positives ϱ et k_φ étant arbitraire, les conditions (29) seront toujours satisfaites, si les constantes du problème M_F, M_X, k_X sont suffisamment petites.

Nous démontrerons la convergence uniforme des suites (10) en prouvant la convergence absolue et uniforme des séries fonctionnelles

$$(30)\qquad \sum_{m=0}^{\infty}[u_\nu^{(m+1)}(A)-u_\nu^{(m)}(A)],\qquad \sum_{m=0}^{\infty}[\varphi^{(m+1)}(P)-\varphi^{(m)}(P)]$$
$$(\nu=0,1,2,\ldots,n).$$

Étudions donc les différences des approximations voisines des fonctions $u_\nu^{(m)}(A)$ et $\varphi^{(m)}(P)$.

Signalons comme point essentiel que les considérations actuelles exigent de plus la mise en jeu de la série des coefficients de Hölder pour les différences $\varphi^{(m+1)}(P)-\varphi^{(m)}(P)$. Nous désignons par le symbole

$$H[\psi(P)] = \sup_{P,Q\epsilon S}\frac{|\psi(P)-\psi(Q)|}{|PQ|^{h_\varphi}} \tag{30'}$$

le plus petit des coefficients de Hölder pour la fonction $\psi(P)$, liés à l'exposant h_φ.

En nous appuyant sur les relations (11a), (14) et (2b), nous arrivons à la limitation

$$|u_0^{(m+1)}(A)-u_0^{(m)}(A)| \leqslant \underline{b}_1 k_F \sum_{\alpha=0}^{n}\sup|u_\alpha^{m}-u_\alpha^{(m-1)}|+\underline{b}_2\sup|\varphi^{(m+1)}-\varphi^{(m)}|, \tag{31}$$

où les constantes $\underline{b}_1$, $\underline{b}_2$ ne dépendent que de la surface S et des coefficients de l'équation (1). En tenant compte de la décomposition (15) et en posant

$$\sup_{P,Q\epsilon S}\frac{|[\varphi^{(m+1)}(Q)-\varphi^{(m)}(Q)]-[\varphi^{(m+1)}(P)-\varphi^{(m)}(P)]|}{|PQ|^{h_\varphi}} = H[\varphi^{(m+1)}-\varphi^{(m)}] \tag{32}$$

conformément à la notation (30'), nous arrivons, en profitant des relations (11b), à une limitation de la forme

$$\begin{aligned}(33)\quad & |u_\nu^{(m+1)}(A)-u_\nu^{(m)}(A)| \\ & \leqslant b_1' k_F\sum_{\alpha=0}^{n}\sup|u_\alpha^{(m)}-u_\alpha^{(m-1)}|+b_2'\sup|\varphi^{(m+1)}-\varphi^{(m)}|+b_3' H[\varphi^{(m+1)}-\varphi^{(m)}],\end{aligned}$$

où les constantes ne dépendent que de la surface S et des coefficients de l'équation (1).

D'après l'équation (11c), nous avons

$$\begin{aligned}(34)\quad & -\frac{1}{2}\lambda_n(P)[\varphi^{(m+1)}(P)-\varphi^{(m)}(P)]+ \\ & +\iint_S\left[\frac{d\Gamma(P,Q)}{dT_P}+p(P)\Gamma(P,Q)\right][\varphi^{(m+1)}(Q)-\varphi^{(m)}(Q)]\,dQ \\ & =\iiint_\Omega\left[\frac{d\Gamma(P,B)}{dT_P}+p(P)\Gamma(P,B)\right]\lambda_n^{-1}(B)[F(B,u_0^{(m)},u_1^{(m)},\ldots,u_n^{(m)})- \\ & -F(B,u_0^{(m-1)},u_1^{(m-1)},\ldots,u_n^{(m-1)})]\,dB+\left[X\big(P,\overline{u}_0^{(m)}(P)\big)-X\big(P,\overline{u}_0^{(m-1)}(P)\big)\right].\end{aligned}$$

Ensuite, en appliquant la formule (19) et les inégalités (2b), (5a), nous arrivons à la limitation

$$\begin{aligned}(35)\quad |\varphi^{(m+1)}(P)-\varphi^{(m)}(P)| \leqslant (1+M_{\mathfrak{N}})M_\lambda\Bigg[&\frac{\overline{c}M_\lambda}{2}k_F\sum_{\alpha=0}^{n}\sup|u_\alpha^{(m)}-u_\alpha^{(m-1)}|+ \\ &+k_X\sup|\overline{u}_0^{(m)}-\overline{u}_0^{(m-1)}|\Bigg].\end{aligned}$$

Observons encore que, d'après la définition de la fonction $\overline{u}_0^{(m)}(P)$ (11d) et la relation (2b), nous povons écrire la limitation suivante

$$|\overline{u}_0^{(m)}-\overline{u}_0^{(m-1)}| \leqslant \underline{b}_1 k_F\sum_{\alpha=0}^{n}\sup|u_\alpha^{(m)}-u_\alpha^{(m-1)}|+\underline{b}_2\sup|\varphi^{(m)}-\varphi^{(m-1)}|. \tag{36}$$

Pour obtenir une limitation du coefficient de Hölder (32) nous nous appuyerons sur l'équation (34), le théorème 8 [3], le théorème auxiliaire [3], page 281, et les hypothèses (5a, b); nous aurons alors

$$\begin{aligned}(37)\quad H[\varphi^{(m+1)}-\varphi^{(m)}] \leqslant \overline{c}_1\sup|\varphi^{(m+1)}-\varphi^{(m)}|+\overline{c}_2 k_F&\sum_{\alpha=0}^{n}\sup|u_\alpha^{(m)}-u_\alpha^{(m-1)}|+ \\ &+\overline{c}_3 H[X(P,\overline{u}_0^{(m)})-X(P,\overline{u}_0^{(m-1)})].\end{aligned}$$

Pour limiter le dernier terme de (37), nous démontrerons le lemme suivant, qui est en liaison étroite avec un lemme connu d'Hadamard.

Lemme. *Si la fonction donnée X vérifie les conditions* (5a, b), *la différence ΔX s'exprime par le produit*

$$\Delta X = X(P,u)-X(P,v) = D(P,u,v)(u-v), \tag{38}$$

où la fonction $D(P,u,v)$ vérifie une condition de Hölder-Lipschitz de la forme

$$|D(P,u,v)-D(P',u',v')| < k_X'[|PP'|^{h_X}+|u-u'|+|v-v'|]. \tag{39}$$

On démontre facilement ce lemme en s'appuyant sur l'égalité évidente

$$X(P,u)-X(P,v) = (u-v)\int_0^1 X_u'[P,v+s(u-v)]\,ds. \tag{38'}$$

En nous basant sur les inégalités (38), (39) nous arrivons à la limitation suivante

$$H[X^{(m)}-X^{(m-1)}] \leqslant H[D]\sup|\overline{u}_0^{(m)}-\overline{u}_0^{(m-1)}|+k_X H[\overline{u}_0^{(m)}-\overline{u}_0^{(m-1)}], \tag{40}$$

où $X^{(m)} = X[P, \overline{u}_0^{(m)}(P)]$ et

$$(41) \qquad H[D] \leqslant k'_X[|PP'|^{h_X} + |\overline{u}_0^{(m)}(P) - \overline{u}_0^{(m)}(P')| + \\ + |\overline{u}_0^{(m-1)}(P) - \overline{u}_0^{(m-1)}(P')|]\,|PP'|^{-h_\varphi}.$$

En tenant compte de la limitation (22), nous pouvons écrire l'inégalité (41) sous la forme

$$(42) \qquad H[D] \leqslant k'_X[d_1 + d_2 M_F + d_3\varrho],$$

d_1, d_2, d_3 étant des constantes positives indépendantes des fonctions du problème.

Nous nous appuyons ensuite sur l'égalité

$$\overline{u}_0^{(m)}(P) - \overline{u}_0^{(m-1)}(P) \\ = -\iiint_{\Omega} \Gamma(P, B)\lambda_n^{-1}(B)\{F[B, u_0^{(m)}(B), u_1^{(m)}(B), \ldots, u_n^{(m)}(B)] - \\ - F[B, u_0^{(m-1)}(B), u_1^{(m-1)}(B), \ldots, u_n^{(m-1)}(B)]\,dB + \\ + \iint_S \Gamma(P, Q)[\varphi^{(m)}(Q) - \varphi^{(m-1)}(Q)]\,dQ,$$

la condition (2b) et le théorème 8 [3] et nous obtenons la limitation suivante

$$(43) \qquad H[\overline{u}_0^{(m)} - \overline{u}_0^{(m-1)}] \leqslant d'_1 k_F \sum_{a=0}^{n} \sup|u_a^{(m)} - u_a^{(m-1)}| + d'_2 \sup|\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}|,$$

d'_1, d'_2 étant des constantes positives, indépendantes des fonctions du problème.

En rapprochant les inégalités (36), (43), (42), (40), nous avons la limitation

(44)

$$H[X^{(m)} - X^{(m-1)}] \leqslant [k'_X \underline{b}_1(d_1 + d_2 M_F + d_3\varrho) + k_X d'_1]\,k_F \sum_{a=0}^{n} \sup|u_a^{(m)} - u_a^{(m-1)}| + \\ + [k'_X \underline{b}_2(d_1 + d_2 M_F + d_3\varrho) + d'_2 k_X] \sup|\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}|.$$

D'après les inégalités (35), (36), (44), (37), nous écrivons l'inégalité

$$(45) \qquad H[\varphi^{(m+1)} - \varphi^{(m)}] \leqslant \{\overline{c}_1(1 + M_{\mathfrak{N}})M_\lambda(\tfrac{1}{2}\overline{c}M_\lambda + k_X\underline{b}_1)k_F + \overline{c}_2 k_F + \\ + \overline{c}_3[k'_X\underline{b}_1(d_1 + d_2 M_F + d_3\varrho) + k_X d'_1]\,k_F\} \sum_{a=0}^{n} \sup|u_a^{(m)} - u_a^{(m-1)}| + \\ + \{\overline{c}_1(1 + M_{\mathfrak{N}})M_\lambda k_X \underline{b}_2 + [k'_X\underline{b}_2(d_1 + d_2 M_F + d_3\varrho) + \\ + k_X d'_2]\,\overline{c}_3\} \sup|\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-)}|.$$

D'après les limitations (35), (36), (45) nous concluons ensuite, que la limitation (33), ainsi que (31), dépend de $\sup|\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}|$ et $\sum_{a=0}^{n} \sup|u_a^{(m)} - u_a^{(m-1)}|$.

Ensuite nous observons, en tenant compte de (31), (33), (35), (36), (45), que les termes de la série numérique

$$(46) \qquad \sum_{m=1}^{\infty} S_m,$$

où l'on a posé

$$S_m = \sum_{a=0}^{n} \sup|u_a^{(m+1)}(A) - u_a^{(m)}(A)| + \sup|\varphi^{(m+1)}(P) - \varphi^{(m)}(P)|,$$

vérifient l'inégalité

$$S_m < [A_1 k_F + A_2 k_X + A_3 k_F k_X + A_4 k'_X(k_F + 1)(d_1 + d_2 M_F + d_3\varrho)]\,S_{m-1}$$

quel que soit m; A_1, A_2, A_3, A_4 sont des constantes positives, indépendantes des fonctions F, X.

Donc, si les constantes du problème k_F, k_X, k'_X, M_F sont suffisamment petites pour que l'on ait

$$(47) \qquad A_1 k_F + A_2 k_X + A_3 k_F k_X + A_4 k'_X(k_F + 1)(d_1 + d_2 M_F + d_3\varrho) < 1,$$

la série (46), et par conséquent les séries (30) et les suites (10), sont uniformément convergentes.

Par conséquent, si les constantes du problème M_F, M_X, k_F, k_X, k'_X sont suffisamment petites pour que les inégalités (29), (47) soient vérifiées, il existe des fonctions limites des suites (10)

$$(48) \qquad \lim_{m\to\infty} u_\nu^{(m)}(A) = u_\nu^*(A) \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n), \\ \lim_{m\to\infty} \varphi^{(m)}(P) = \varphi^{(*)}(P),$$

qui constituent une solution du système d'équations intégrales singulières (8a, b, c).

On peut facilement démontrer que cette solution est unique dans la classe des fonctions déterminées par les formules (11a, b, c).

En nous appuyant sur les propriétés des intégrales de l'équation elliptique, nous obtenons les relations

$$(49) \qquad u_\nu^*(A) = \frac{\partial u_0^*(A)}{\partial x_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \quad \text{en} \quad A \in \Omega.$$

Nous allons ensuite montrer que les fonctions $\varphi^*(P)$, $u^*(A)$ sont une solution du système d'équations intégro-différentielles (6), (7) et nous prouverons que la fonction $u_0^*(A)$ représente une solution de l'équation (1) et vérifie la condition limite (3). En effet, d'après les propriétés des dérivées du potentiel de charge spatiale, relatif à l'équation elliptique (voir [3]), les dérivées (49), déterminées par les intégrales (8a, b), vérifient la condition de Hölder dans tout domaine fermé $\Omega^* \subset \Omega$. Par conséquent la fonction $\lambda_n^{-1}(B)F\left[B, u_0^*(B), \frac{\partial u_0^*(B)}{\partial \xi_1}, \ldots, \frac{\partial u_0^* B}{\partial \xi_n}\right]$ vérifie aussi la condition de Hölder dans tout domaine Ω^* et il en résulte que la fonction $u_0^*(A)$ admet des dérivées secondes en tout point intérieur $A \epsilon \Omega$.

Donc la fonction $u_0^*(A)$ vérifie l'équation (1) dans le domaine Ω. D'après la propriété de la dérivée transversale du potentiel de simple couche, la fonction trouvée $u_0^*(A)$ vérifie aussi la condition limite (3) en tout point P de la surface S.

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant.

THÉORÈME 1. *Si:*

1° *les coefficients de l'équation elliptique* (1) *vérifient les conditions de Hölder dans la région* $\Omega + S$,

2° *la surface* S, *limitant le domaine* Ω, *vérifie les conditions de Liapounoff*,

3° *les fonctions données* $F(A, u_0, u_1, \ldots, u_n)$, $X(P, u)$ *vérifient les conditions* (2a, b), (5a, b) *et les constantes du problème* M_F, M_X, k_F, k_X, k'_X *sont suffisamment petites pour que les inégalités* (47), (29) *soient vérifiées, où le choix des constantes positives* k_φ, ϱ *est arbitraire*,

4° *la fonction* $p(P)$, *figurant dans la condition limite* (3), *vérifie l'inégalité* (4),

5° *le problème aux limites homogène* $dv/dT_P + p(P)v = 0$ *pour l'équation homogène* $\hat{\varphi}(v) = 0$ *n'a qu'une solution nulle*,

il existe une fonction $u_0^*(A)$, *limite de la suite* (11a), *qui vérifie l'équation* (1) *en tout point intérieur* $A \epsilon \Omega$ *et la condition limite* (3) *en tout point* $P \epsilon S$.

PROBLÈME 2. Nous allons maintenant résoudre, par la méthode des approximations successives, le problème de la détermination d'une fonction $u(A)$ qui vérifie l'équation (1) en tout point intérieur $A \epsilon \Omega$ et la condition limite (3), mais sous une hypothèse plus générale.

Nous admettons que la fonction $F(A, u_0, u_1, \ldots, u_n)$ est définie dans la région

$$A \epsilon \Omega, \quad -\infty < +u_\nu < +\infty \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n), \tag{50}$$

où elle vérifie l'inégalité

$$|F(A, u_0, u_1, \ldots, u_n)| < m_F \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu|^r + m'_F |AP_A|^{-p} \tag{51}$$

et une condition de Hölder de la forme

$$|F(A, u_0, u_1, \ldots, u_n) - F(A', u'_0, u'_1, \ldots, u'_n)| < k(\Omega^*)|AA'|^{h_F} + k_F \sum_{\nu=0}^{n} |u_\nu - u'_\nu| \tag{52}$$

dans tout domaine fermé $\Omega^* \subset \Omega$; r, p, m_F, m'_F, k_F sont des constantes positives, où $0 \leqslant r < 1$, $0 \leqslant p < 1$; P_A est le point de la surface S le plus rapproché du point A, $k(\Omega^*)$ est une constante positive, dépendant du domaine Ω^*, qui peut être non bornée.

Nous supposons que les fonctions $p(P)$ et $X(P, u)$ sont continues et définies dans la région

$$P \epsilon S, \quad \text{resp.} \quad [P \epsilon S, \; -\infty < u < +\infty], \tag{53}$$

la fonction X vérifie les inégalités

$$|X(P, u)| < m_X |u|^r + m'_X, \tag{54}$$

$$|X(P, u) - X(P', u')| < k_X[|PP'|^{h_X} + |u - u'|], \tag{55}$$

et la fonction $p(P)$ est telle que l'équation (18) n'a qu'une solution nulle; m_X, m'_X, k_X sont des constantes positives.

Nous allons chercher la solution $u(A)$ du problème 2 sous la forme (6), où, désormais, nous admettons seulement que la fonction inconnue $\varphi(P)$ est continue sur la surface S, vérifiant les conditions de Liapounoff, et que les dérivées da la fonction inconnue $u(A)$, continue dans $\Omega + S$, vérifient les inégalités

$$|AP_A|^q \left|\frac{\partial u(A)}{\partial x_\nu}\right| < \infty \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{56}$$

q étant un nombre positif, arbitrairement fixé, inférieur à l'unité.

De même que dans le problème 1 et en nous appuyant sur le théorème 5 du travail [5], nous arrivons à l'équation intégro-différentielle (7). Pour résoudre le système de deux équations (6), (7), nous considérons le système de $n+2$ équations intégrales (8a, b, c) à fonctions inconnues réelles $u_0(A), u_1(A), \ldots, u_n(A)$, $\varphi(P)$.

En remarquant que la fonction $\varphi(P)$ n'est pas hölderienne, nous allons chercher une solution du système de $n+2$ équations (8a, b, c), en considérant $n+2$ suites fonctionnelles (10), déterminées par les relations (11a, b, c, d), où les éléments initiaux sont des fonctions continues et satisfont aux relations

$$\begin{gathered} |u_0^{(0)}(A)| \leqslant R, \quad |\varphi(P)| \leqslant \varrho, \\ |AP_A|^q |u_\nu^{(0)}(A)| \leqslant R \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \end{gathered} \tag{57}$$

R, ϱ étant des constantes positives, fixées arbitrairement.

Supposons que les approximations m-èmes de (10) soient continues et vérifient les inégalités analogues

$$(58)\qquad \begin{gathered} |u_0^{(m)}(A)| \leqslant R, \qquad |\varphi^{(m)}(P)| \leqslant \varrho \\ |AP_A|^q |u_\nu^{(m)}(A)| \leqslant R \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \end{gathered}$$

dans la région $A \epsilon \Omega$, resp. $P \epsilon S$.

Ensuite, en vertu de (58) et de l'hypothèse (51), nous avons l'inégalité

$$(59)\qquad F[B, u_0^{(m)}(B), u_1^{(m)}(B), \ldots, u_n^{(m)}(B)] < m_F n |BP_B|^{-rq} R^r + \\ + m_F R^r + m'_F |BP_B|^{-p}.$$

D'après le théorème 5 du travail [5] et les limitations (58), (59), (14), nous concluons que les approximations m-ème de (11d) et $(m+1)$-ième de (11a) sont continues et vérifient des inégalités de la forme

$$(60)\qquad |\bar{u}_0^{(m)}(P)| \leqslant C(m_F R^r + m'_F + \varrho),$$

$$(60a)\qquad |u_0^{(m+1)}(A)| \leqslant C'(m_F R^r + m'_F + \sup_S |\varphi^{(m+1)}(P)|,$$

C, C' étant des constantes positives indépendantes de la fonction F et de $\varphi^{(m)}$.

En nous appuyant sur les relations (19), (11c), (54), (59), (60) et sur le théorème 5 du travail [5], nous obtiendrons une limitation de la forme

$$(61)\qquad |\varphi^{(m+1)}(P)| \leqslant C_1[\bar{C}(m_F R^r + m'_F) + m_X \{\sup |\bar{u}_0^{(m)}(P)|\}^r + m'_X],$$

C_1, $\bar{C}$ étant des constantes positives indépendantes des fonctions F, X.

D'après l'expression (11b) et les théorèmes 5.4 du travail [5], nous arrivons à la limitation

$$(62)\qquad |u_\nu^{(m+1)}(A)| \leqslant C_2(m_F R^r + m'_F) + c_1\big(\big|\log |AP_A|\big| + c_2\big) \sup |\varphi^{(m+1)}(P)|.$$

D'après les inégalités (60), (60a), (61), (62), nous en concluons par induction que les fonctions $u_\nu^{(m)}(A)$, $\varphi^{(m)}(P)$ existent et vérifient, quel que soit m, les inégalités (58), si les constantes du problème 2, dépendant des fonctions F, X, vérifient les conditions

$$(63)\qquad C_1[\bar{C}(m_F R^r + m'_F) + m_X R^r + m'_X] \leqslant \varrho, \qquad C^*(m_F R^r + m'_F + \varrho) \leqslant R,$$

où la constante C^* est le plus grand des nombres C, C' et des bornes supérieures des fonctions $C_2 |AP_A|^q$, $c_1 |AP_A|^q \big[\big|\log |AP_A|\big| + c_2\big]$ dans le domaine Ω.

Il en résulte que l'on peut toujours fixer les constantes ϱ, R suffisamment grandes pour satisfaire aux inégalités

$$C_1[\bar{C}(m_F R^r + m'_F) + m_X R^r + m'_X] \leqslant \varrho \leqslant \frac{R}{C^*} - m_F R^r - m'_F,$$

quelles que soient les autres constantes du problème.

Pour démontrer la convergence des suites (10), considérons les séries fonctionnelles

$$(64)\qquad \begin{gathered} \sum_{m=0}^{\infty} [u_0^{(m+1)}(A) - u_0^{(m)}(A)], \qquad \sum_{m=0}^{\infty} [\varphi^{(m+1)}(P) - \varphi^{(m)}(P)], \\ \sum_{m=0}^{\infty} |AP_A|^q [u_\nu^{(m+1)}(A) - u^{(m)}(A)] \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \end{gathered}$$

Dans ce but nous étudions les différences des approximations voisines des suites (10), en appliquant l'inégalité (52) et le théorème 5 du travail [5]. D'abord nous obtenons la limitation suivante de la différence des approximations voisines de (11d)

$$\begin{aligned} &|\bar{u}_0^{(m)}(P) - \bar{u}_0^{(m-1)}(P)| \\ &\quad \leqslant k_F \Big[b_1 \sup_\Omega |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + b_2 \sup_\Omega \Big(|BP_B|^q \sum_{\nu=1}^{n} |u_\nu^{(m)} - u_\nu^{(m-1)}|\Big)\Big] + \\ &\qquad + b_3 \sup_S |\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}|. \end{aligned}$$

En nous appuyant de plus sur les égalités (34), (19) et sur la condition (55) et en tenant compte de l'inégalité $0 < q < 1$ nous arrivons à la limitation

$$\begin{aligned} &|\varphi^{(m+1)}(P) - \varphi^{(m)}(P)| \\ &\quad \leqslant C_1 \Big\{k_F \Big[b_4 \sup_\Omega |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + b_5 \sup \Big(|BP_B|^q \sum_{\nu=1}^{n} |u_\nu^{(m)} - u_\nu^{(m-1)}|\Big)\Big] + \\ &\qquad + k_X \sup |\bar{u}_0^{(m)}(P) - \bar{u}_0^{(m-1)}(P)|\Big\}. \end{aligned}$$

Ensuite on aura la limitation suivante

$$(65)\qquad \begin{aligned} &|\varphi^{(m+1)}(P) - \varphi^{(m)}(P)| \leqslant k_F \Big[(d_1 + k_X d_2) \sup_\Omega |u_0^{(m)} - u_0^{(m-1)}| + \\ &\quad + (d_3 + d_4 k_X) \sup \Big(|BP_B|^q \sum_{\nu=1}^{n} |u_\nu^{(m)} - u_\nu^{(m-1)}|\Big)\Big] + b_3 k_X \sup_S |\varphi^{(m)} - \varphi^{(m-1)}|. \end{aligned}$$

Remarquons que les constantes positives b_i, d_i ne dépendent pas des fonctions du problème.

En utilisant l'inégalité (65), nous obtenons une limitation de la différence des approximations voisines de (11a) sous la forme

$$(66)\quad |u_0^{(m+1)}(A)-u_0^{(m)}(A)| \leqslant k_F\Big[(D_1+D_2k_X)\sup_{\Omega}|u_0^{(m)}-u_0^{(m-1)}|+$$
$$+(D_3+D_4k_X)\sup_{\Omega}\Big(|BP_B|^a\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu^{(m)}-u_\nu^{(m-1)}|\Big)\Big]+D_5k_X\sup_{S}|\varphi^{(m)}-\varphi^{(m-1)}|,$$

où les constantes D_i ne dépendent pas des fonctions du problème.

Enfin, en tenant compte des théorèmes 5.4 du travail [5] et de l'hypothèse (52) et d'après les relations (11b), nous pouvons écrire l'inégalité

$$(67)\quad |AP_A|^a|u_\nu^{(m+1)}(A)-u_\nu^{(m)}(A)|$$
$$\leqslant C^*[k_F\sup_{\Omega}|u_0^{(m)}-u_0^{(m-1)}|+\sup_{S}|\varphi^{(m+1)}+\varphi^{(m)}|]+$$
$$+k_FC_3\sup_{\Omega}\Big(|BP_B|^a\sum_{\nu=1}^{n}|u_\nu^{(m)}-u_\nu^{(m-1)}|\Big).$$

En nous basant ensuite sur les limitations (65), (66), (67), nous voyons que les termes de la série

$$(68)\qquad \sum_{m=1}^{\infty}S_m,$$

où

$$S_m=\sup_{\Omega}|u_0^{(m+1)}(A)-u_0^{(m)}(A)|+\sum_{\nu=1}^{n}\sup_{\Omega}|AP_A|^a|u_\nu^{(m+1)}(A)-u_\nu^{(m)}(A)|+$$
$$+\sup_{S}|\varphi^{(m+1)}(P)-\varphi^{(m)}(P)|$$

vérifient l'inégalité

$$S_m<[(A_1+A_2k_X)k_F+A_3k_X]\cdot S_{m-1}$$

quel que soit m; A_1, A_2, A_3 sont des constantes positives indépendantes des fonctions F, X.

Si les constantes du problème k_F, k_X sont suffisamment petites pour que l'on ait

$$(69)\qquad (A_1+A_2k_X)k_F+A_3k_X<1,$$

il en résulte, que la série (68), et par conséquent les séries (64) sont uniformément convergentes dans le domaine Ω resp. S. Donc, si les constantes du problème k_F, k_X vérifient l'inégalité (69), les fonctions limites des suites (10)

$$(70)\quad \lim_{m\to\infty}u_\nu^{(m)}(A)=u_\nu^{**}(A)\quad(\nu=0,1,\ldots,n),\qquad \lim_{m\to\infty}\varphi^{(m)}(P)=\varphi^{**}(P),$$

existent et fournissent la solution du système d'équations intégrales (8a, b, c). Remarquons que cette solution est unique dans la classe des fonctions déterminées par les formules (11a, b, c) et par les inégalités (58).

En nous appuyant sur les propriétés des potentiels généralisés de l'équation elliptique [3], nous obtenons les relations

$$(71)\qquad u_\nu^{**}(A)=\frac{\partial u_0^{**}(A)}{\partial x_\nu}\quad(\nu=1,2,\ldots,n),\quad \text{en}\quad A\in\Omega.$$

Nous concluons, en outre, que les fonctions $u_0^{**}(A)$, $\varphi^{**}(P)$ représentent la solution du système (6), (7). La fonction $\lambda_n^{-1}(B)F[B, u_0^{**}(B), u_1^{**}(B), \ldots, u_n^{**}(B)]$ vérifie, d'après l'inégalité (52) et la remarque du théorème 6 du travail [5], une condition de Hölder dans tout domaine fermé $\Omega^*\subset\Omega$, donc, d'après le théorème 7 du travail [5], la fonction $u_0^{**}(A)$ vérifie l'équation (1) en tout point A à l'intérieur de Ω. D'après la propriété connue de la dérivée transversale du potentiel de simple couche, la fonction trouvée $u^{**}(A)$ vérifie aussi la condition limite (3) en tout point P de la surface S.

Nous pouvons ainsi énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si:*

1° *les coefficients de l'équation elliptique* (1) *vérifient les conditions de Hölder dans la région* $\Omega+S$,

2° *la surface* S, *limitant le domaine* Ω, *vérifie les conditions de Liapounoff*,

3° *les fonctions données*: $F(A, u_0, u_1, \ldots, u_n)$, $X(P, u)$ *vérifient les conditions* (51), (52) *resp.* (54), (55) *et les constantes* k_F, k_X *sont suffisamment petites pour que l'inégalité* (69) *soit vérifiée*,

4° *la fonction* $p(P)$ *de la condition limite* (3) *est telle que le problème homogène* $dv/dT_P+p(P)v=0$ *pour l'équation* $\hat{\psi}(v)=0$ *n'a qu'une solution nulle* $v=0$,

il existe une fonction $u_0^{**}(A)$ *(dont les dérivées satisfont aux inégalités* (56)*), qui vérifie l'équation* (1) *en tout point intérieur* $A\in\Omega$ *et la conditions limite* (3) *en tout point* $P\in S$.

Les problèmes étudiés dans ce travail m'ont été proposés par M. W. Pogorzelski; je tiens à lui exprimer mes plus vifs remerciements.

Travaux cités

[1] M. Gevrey, *Détermination et emploi des fonctions de Green*, Journal de Mathématiques, Paris 1930, p. 1-80.

[2] G. Giraud, *Généralisation des problèmes sur les opérations du type elliptique*, Bulletin des Sc. Math. 56 (1932), p. 248-272, 281-312, 316-352.

[3] W. Pogorzelski, *Étude de la solution fondamentale de l'équation elliptique et des problèmes aux limites*, Annales Polonici Mathematici 3 (1957), p. 247-284.

[4] — *Równania całkowe i ich zastosowania*, t. II, Warszawa 1958.

[5] — *Sur quelques propriétés des potentiels généralisés et un problème aux limites pour l'équation elliptique*, Annales Polonici Mathematici (sous presse).

Reçu par la Rédaction le 5. 2. 1960

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1961)

Problème non linéaire à dérivée oblique

par J. Wolska-Bochenek (Warszawa)

1. Introduction. Dans le travail [1] I. N. Vécoua a posé et résolu le problème aux limites à dérivée oblique pour l'équation elliptique, c'est-à-dire le problème consistant à déterminer une fonction $U(x, y)$ qui satisfait, à l'intérieur d'un domaine G limité par la courbe fermée Γ, à l'équation:

$$\Delta U + a(x, y) U_x + b(x, y) U_y + \varepsilon c(x, y) U = f(x, y) \tag{1}$$

et, en tout point Π de cette courbe Γ, à la condition limite suivante:

$$\alpha(\Pi) U_x - \beta(\Pi) U_y + \varepsilon\gamma(\Pi) U = \delta(\Pi), \quad \text{ou} \quad \frac{dU}{dl} + \varepsilon\gamma U = \delta \tag{2}$$

$a, b, c, f, \alpha, \beta, \gamma, \delta$, étant des fonctions données et ε un paramètre. Ce problème a été résolu sous des hypothèses très générales. Notamment, les coefficients de l'équation (1) et la fonction f appartiennent à la classe $L_p(G+\Gamma)$, c'est-à-dire ils sont de puissance p intégrable dans le domaine fermé $G+\Gamma$. Les coefficients de la condition limite (2) satisfont à la condition de Hölder et la courbe Γ admet en tout point une tangente continue satisfaisant à la condition de Hölder. La solution du problème existe au sens généralisé: la fonction cherchée $U(x, y)$ appartient à la classe $C^1(G+\Gamma)$ et $D_{2,p}(G)$ — c'est-à-dire elle admet des dérivées premières continues et des dérivées secondes généralisées au sens de Soboleff [2], appartenant à la classe $L_p[G+\Gamma]$.

Pour résoudre le problème proposé, I. N. Vécoua introduit la fonction complexe

$$w(z) = U_x - iU_y \equiv 2\partial_z U \equiv 2U_z. \tag{3}$$

Alors l'équation (1) et la condition (2) prennent la forme

$$\partial_{\bar z} w + \tfrac{1}{4}(a+ib)w + \tfrac{1}{4}(a-ib)\overline{w} + \tfrac{1}{2}\varepsilon c U = \tfrac{1}{2}f, \tag{4}$$

$$\operatorname{Re}[\overline{\lambda(z)}w] + \varepsilon\gamma U = \delta, \qquad \lambda = \alpha + i\beta, \tag{5}$$

où l'on a posé

$$\partial_{\bar z} w = \tfrac{1}{2}(w_x + iw_y). \tag{6}$$