fonction de Green de ce domaine avec un pôle à l'infini. La nature des fonctions extrémales $a(z, E, |pq|)$, $g(z, E, |pq|)$ et $h(z, E, |pq|)$ dans un espace cartésien quelconque sera étudiée dans une note prochaine.

Travaux cités

[1] G. Pólya und G. Szegö, *Über den transfiniten Durchmesser von ebenen und räumlichen Punktmengen*, J. für Math. 165 (1931), p. 4-49.

[2] W. Ottenbreit, *Metody obliczania średnic pozaskończonych i rozwartości zbiorów*, Supplément aux Annales Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 1-103.

[3] F. Leja, *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Ann. Soc. Pol. Math. 12 (1933), p. 57-71.

Reçu par la Rédaction le 15. 6. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1961)

Problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique dans une région non bornée

par M. TRYJARSKA (Warszawa)

Le problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation du type parabolique de la forme:

$$\hat{D}(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(A, t)u - \frac{\partial u}{\partial t}$$
$$= F\left(A, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

a été posé et résolu par W. Pogorzelski [2] dans une région bornée à n dimensions et dans un intervalle fini de temps t.

Le sujet de ce travail est le même problème aux limites pour l'équation:

$$\hat{D}(u) = F(A, t, u) \tag{1}$$

dans une région non bornée Ω, située à l'extérieur d'une certaine surface fermée S et pour un intervalle fini de la variable t. Sur la surface S on définit q champs de directions tangentielles:

$$\{s_P^{(1)}\}, \{s_P^{(2)}\}, \ldots, \{s_P^{(q)}\} \quad (P \epsilon S,\ 1 \leqslant q \leqslant n-1).$$

Il s'agit de déterminer une telle fonction $u(A, t)$ qui:

1° vérifie l'équation (1) en tout point intérieur du domaine:

$$A \epsilon \Omega, \quad t \epsilon (0, T); \tag{2}$$

2° vérifie la condition initiale:

$$\lim_{t\to 0} u(A, t) = 0 \tag{3}$$

en tout point intérieur $A \epsilon \Omega$;

3° satisfait à une condition limite aux dérivées tangentielles de la forme:

$$\frac{du}{dT_P} + g(P, t)u(P, t) = G[P, t, u(P, t), u_{s_{P^{(1)}}}(P, t), \ldots, u_{s_{P^{(q)}}}(P, t)] \tag{4}$$

en tout point intérieur du domaine $P \in S$, $t \in (0, T)$, où

$$\frac{du}{dT_P} = \lim_{A \to P} \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A, t) \cos(N_P, x_\beta) u_{x_\alpha}(A, t)$$

est la dérivée, dite transversale, de la fonction u relativement au point P de la surface S.

Nous admettons les hypothèses suivantes:

(I) La forme quadratique $\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A, t) X_\alpha X_\beta$ est définie positive dans le domaine (2) et il existe une constante positive k telle que:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A, t) X_\alpha X_\beta > k \sum_{\alpha=1}^{n} X_\alpha^2. \tag{5}$$

(II) Les fonctions réelles $a_{\alpha\beta}(A, t)$ sont définies dans le domaine fermé:

$$A \in \Omega + S, \quad t \in \langle 0, T \rangle \tag{6}$$

et vérifient une condition de Hölder de la forme:

$$|a_{\alpha\beta}(A, t) - a_{\alpha\beta}(A_1, t_1)| \leqslant k_a [|AA_1|^h + |t - t_1|^{h'}]. \tag{7}$$

(III) Les fonctions réelles $b_\alpha(A, t)$ et $c(A, t)$ sont définies et continues dans le domaine fermé (6) et vérifient les conditions de Hölder:

$$|b_\alpha(A, t) - b_\alpha(A_1, t)| \leqslant k_b |AA_1|^h, \qquad |c(A, t) - c(A_1, t)| \leqslant k_c |AA_1|^h. \tag{8}$$

(IV) La fonction réelle $F(A, t, u)$ est définie et continue dans la région fermée:

$$A \in \Omega + S, \quad t \in \langle 0, T \rangle, \quad |u| \leqslant R \tag{9}$$

et vérifie dans cette région la condition de Hölder:

$$|F(A, t, u) - F(A_1, t, u_1)| \leqslant k_F [|AA_1|^{h_F} + |u - u_1|^{h'_F}]. \tag{10}$$

De plus on suppose que l'intégrale:

$$\iiint_\Omega |F(A, t, u)| \, dA \tag{10'}$$

est uniformément convergente dans la région Ω et bornée pour $t \in \langle 0, T \rangle$ et $|u| \leqslant R$.

(V) La fonction réelle $G(P, t, u_0, u_1, \ldots, u_q)$ est définie et continue dans le domaine:

$$P \in S, \quad t \in \langle 0, T \rangle, \quad |u_\gamma| \leqslant R \quad (\gamma = 0, 1, \ldots, q)$$

et elle vérifie la condition de Hölder:

$$|G(P, t, u_0, u_1, \ldots, u_q) - G(P_1, t, u_0^*, u_1^*, \ldots, u_q^*)| \leqslant k_G \Big[|PP_1|^{h_G} + |u_0 - u_0^*|^{h'_G} + \sum_{\gamma=1}^{q} |u_\gamma - u_\gamma^*|\Big]. \tag{11}$$

(VI) La fonction réelle $g(P, t)$ est définie dans la région $P \in S$, $t \in \langle 0, T \rangle$, continue par rapport à la variable t et elle vérifie la condition de Hölder:

$$|g(P, t) - g(P_1, t)| \leqslant k_g |PP_1|^{h_g}. \tag{12}$$

(VII) La surface S vérifie les conditions suivantes, dites de Liapounoff: 1) Il existe un plan tangent en tout point de la surface S, 2) L'angle ν_{PQ} entre deux normales à la surface S aux points arbitraires P et Q de cette surface vérifie l'inégalité:

$$\nu_{PQ} < \text{const} |PQ|^{h_L}. \tag{13}$$

3) Il existe un nombre positif δ tel que la sphère K_δ de rayon δ et de centre en un point arbitraire P de la surface S découpe une portion S_{K_δ} de cette surface dont la projection orthogonale sur le plan tangent en P est un ensemble de points qui correspondent d'une façon biunivoque aux points de la portion S_{K_δ}.

(VIII) L'angle entre deux directions du même champ correspondant aux deux points P et Q de la surface S vérifie une condition de la forme:

$$(s_P^{(\gamma)}, s_Q^{(\gamma)}) < \text{const} |PQ|^{h_s} \quad (\gamma = 1, 2, \ldots, q). \tag{14}$$

Dans les hypothèses (II)-(VIII) les coefficients $k_a, k_b, k_c, k_F, k_G, k_g$ sont des constantes positives et $h, h', h_F, h'_F, h_G, h'_G, h_g, h_L, h_s$ sont des constantes positives non supérieures à l'unité.

Nous allons chercher la solution du problème sous forme d'une somme:

$$u(A, t) = \int_0^t \iint_S \Gamma(A, t; Q, \tau) \varphi(Q, \tau) \, dQ \, d\tau + \int_0^t \iiint_\Omega \Gamma(A, t; B, \tau) F_1[B, \tau, u(B, \tau)] \, dB \, d\tau \tag{15}$$

d'un potentiel de simple couche de densité inconnue $\varphi(Q, \tau)$ et d'un potentiel de charge spatiale de densité:

$$F_1(B, \tau, u) = \lambda_n(B, \tau) F(B, \tau, u),$$

où

$$\lambda_n(\beta, \tau) = -\frac{\sqrt{\det |a^{\alpha\beta}(B, \tau)|}}{(2\sqrt{\pi})^n}$$

et où l'on a désigné par $a^{\alpha\beta}$ les éléments de la matrice inverse de la matrice $[a_{\alpha\beta}]$.

La fonction Γ figurant dans l'expression (15) est une solution fondamentale de l'équation homogène: $\hat{D}(u) = 0$ (voir [1]) et elle a la forme suivante:

$$(16)\qquad \Gamma(A,t;B,\tau) = w^{B,\tau}(A,t;B,\tau) + \int_0^t \iiint_E w^{M,\zeta}(A,t;M,\zeta)\Phi(M,\zeta;B,\tau)\,dM\,d\zeta$$

où:

$$(17)\qquad w^{M,\zeta}(A,t;B,\tau) = (t-\tau)^{-n/2}\exp\left[-\frac{\vartheta^{M,\zeta}(A,B)}{4(t-\tau)}\right],$$

$$(17')\qquad \vartheta^{M,\zeta}(A,B) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a^{\alpha\beta}(M,\zeta)(x_\alpha-\xi_\alpha)(x_\beta-\xi_\beta).$$

Les fonctions $a_{\alpha\beta}(A,t)$, $b_\alpha(A,t)$ et $c(A,t)$ sont prolongées sur tout l'espace E d'une façon arbitraire, mais sous la condition de satisfaire aux suppositions (5), (7) et (8). La fonction Φ, figurant sous le signe d'intégration dans l'équation (16), est une solution de l'équation intégrale:

$$(18)\qquad \Phi(A,t;B,\tau) = f(A,t;B,\tau) + \lambda\int_\tau^t \iiint_E N(A,t;M,\zeta)\Phi(M,\zeta;B,\tau)\,dM\,d\zeta$$

où:

$$(19)\qquad \begin{aligned} f(A,t;B,\tau) &= \lambda N(A,t;B,\tau),\\ N(A,t;B,\tau) &= \lambda\lambda_n(B,\tau)\hat{D}[w^{B,t}(A,t;B,\tau)], \qquad \lambda = -(2\sqrt{\pi})^{-n}. \end{aligned}$$

L'équation intégrale (18) est doublement singulière, puisque la région d'intégration est non bornée et le noyau N n'est pas borné. Mais on peut démontrer qu'il existe une solution de l'équation (18) grâce aux inégalités (voir [3]):

$$(20)\qquad |N(A,t;M,\zeta)| < \begin{cases} \text{const}\ (t-\zeta)^{-\mu_1}\cdot|AM|^{-n-2+2\mu_1-h^*},\\ \text{const}\,(t-\zeta)^{\mu_2}\cdot|AM|^{-n-2-2\mu_2} \end{cases}$$

dont la première est vraie, si la distance $|AM|$ des points A et M de l'espace E ne dépasse pas un nombre ϱ_0 arbitrairement fixé, la seconde pour une distance $|AM|$ plus grande que ϱ_0. Les exposants h^*, μ_1 et μ_2 vérifient les conditions:

$$h^* = \min(h, 2h'), \qquad \mu_1\in(1-h^*/2, 1), \qquad \mu_2 > 0.$$

En revenant à l'équation (1), nous allons profiter du fait que la densité de simple couche dans l'expression (15) n'est pas déterminée et nous

demanderons que la fonction (15) vérifie la condition limite (3). Nous aurons l'équation suivante:

$$(21)\qquad \begin{aligned} &\int_0^t \iiint_\Omega \left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;B,\tau)] + g(P,t)\Gamma(P,t;B,\tau)\right\}\times\\ &\qquad\times F_1[B,\tau,u(B,\tau)]\,dB\,d\tau + \frac{\varphi(P,t)}{2\lambda_n(P,t)} +\\ &+\int_0^t \iint_S \left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)] + g(P,t)\Gamma(P,t;Q,\tau)\right\}\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau\\ &\qquad = G[P,t,u(P,t),u_{s_{P(1)}}(P,t),\ldots,u_{s_{P(q)}}(P,t)] \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$(22)\qquad \begin{aligned} u_{s_{P(\gamma)}}(P,t) &= \int_0^t \iiint_\Omega \Gamma_{s_{P(\gamma)}}(P,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u(B,\tau)]\,dB\,d\tau +\\ &+ \int_0^t \iint_S \Gamma_{s_{P(\gamma)}}(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau \qquad (\gamma = 1,2,\ldots,q). \end{aligned}$$

La seconde des intégrales du second membre de l'équation (22) est fortement singulière. Supposons donc que la fonction $\varphi(P,t)$ vérifie la condition de Hölder:

$$|\varphi(P,t)-\varphi(P_1,t)| \leqslant k_\varphi|PP_1|^{h_\varphi}, \qquad h_\varphi\in(0,1),$$

suffisante pour que cette intégrale existe (voir [5]).

Le problème se ramène à la résolution du système d'équations intégro-différentielles (15) et (21) à deux fonctions inconnues: $u(A,t)$ dans la région $[\Omega;(0,T)]$ et $\varphi(P,t)$ dans la région $[S;(0,T)]$. Nous démontrerons l'existence de la solution du système en appliquant le théorème topologique de J. Schauder [4].

Soit donc un espace fonctionnel $\mathcal{E}$ composé de tous les couples $[u(A,t);\varphi(P,t)]$ de fonctions continues, réelles et définies: la première dans la région $[\Omega+S; 0\leqslant t\leqslant T]$, la seconde dans la région $[P\in S; 0\leqslant t\leqslant T]$.

On définit la somme de deux points:

$$U_1[u_1,\varphi_1] + U_2[u_2,\varphi_2] = U[u_1+u_2, \varphi_1+\varphi_2],$$

le produit d'un point U par le nombre réel ω:

$$\omega U[u,\varphi] = U[\omega u, \omega\varphi]$$

la norme d'un point U par la formule:

$$\|U\| = \sup|u(A,t)| + \sup|\varphi(P,t)|$$

et la distance de deux points:

$$\delta(U,V) = \|U-V\|.$$

L'espace qui vient d'être défini est un espace de Banach; on vérifie aisément qu'il est linéaire, normé et complet.

Considérons maintenant dans l'espace $\mathcal{E}$ l'ensemble Z de tous les points $U[u(A,t);\varphi(P,t)]$ vérifiant les conditions suivantes:

$$(23)\qquad |u(A,t)|\leqslant R,\quad |\varphi(P,t)|\leqslant\varrho,\quad |\varphi(P,t)-\varphi(P_1,t)|\leqslant k_\varphi|PP_1|^{h_\varphi}$$

R étant un nombre positif donné, figurant dans les conditions relatives aux fonctions F et G, ϱ et k_φ étant deux constantes positives non fixées pour l'instant, l'exposant h_φ pouvant être fixé dans l'intervalle $(0,1)$.

L'ensemble Z est fermé en vertu des conditions (23) et il est convexe, puisque tout point du segment qui joint les points arbitraires U_1 et U_2 de l'ensemble Z appartient à cet ensemble.

Transformons maintenant l'ensemble Z par les relations suivantes:

$$v(A,t)=\int_0^t\iint_S\Gamma(A,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau+\int_0^t\iiint_\Omega\Gamma(A,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u(B,\tau)]\,dB\,d\tau,$$

$$(24)\qquad \frac{\psi(P,t)}{2\lambda_n(P,t)}+\int_0^t\iint_S\left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)]+g(P,t)\Gamma(P,t;Q,\tau)\right\}\psi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau$$
$$=-\int_0^t\iiint_\Omega\left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;B,\tau)]+g(P,t)\Gamma(P,t;B,\tau)\right\}\times F_1[B,\tau,u(B,\tau)]\,dB\,d\tau+$$
$$+G[P,t,v(P,t),\overline{u}_{sP(1)}(P,t),\overline{u}_{sP(2)}(P,t),\ldots,\overline{u}_{sP(q)}(P,t)),$$

où

$$(25)\qquad \overline{u}_{sP(\gamma)}=\int_0^t\iiint_\Omega\Gamma_{sP(\gamma)}(P,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u(B,\tau)]\,dB\,d\tau+\int_0^t\iint_S\Gamma_{sP(\gamma)}(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau\qquad(\gamma=1,2,\ldots,q).$$

Toutes les fonctions $v(A,t)$ sont bornées et continues dans la région $[\Omega+S;\langle 0,T\rangle]$. La fonction $\psi(P,t)$ est une solution de l'équation singulière de Volterra du type:

$$(26)\qquad \psi(P,t)=\int_0^t\iint_S M(P,t;Q,\tau)\psi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau+h(P,t),$$

dont le noyau M a pour expression:

$$(27)\qquad M(P,t;Q,\tau)=2\lambda_n(P,t)\left\{\frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)]+g(P,t)\Gamma(P,t;Q,\tau)\right\}$$

et la fonction donnée $h(P,t)$ est de la forme:

$$(28)\qquad h(P,t)=-\int_0^t\iiint_\Omega M(P,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u(B,\tau)]\,dB\,d\tau+$$
$$+2\lambda_n(P,t)G[P,t,v(P,t),\overline{u}_{sP(1)}(P,t),\ldots,\overline{u}_{sP(q)}(P,t)].$$

L'équation (26) admet une seule solution donnée par la formule de Volterra:

$$(29)\qquad \psi(P,t)=h(P,t)+\int_0^t\iint_S\mathfrak{M}(P,t;Q,\tau)h(Q,\tau)\,dQ\,d\tau,$$

où le noyau résolvant $\mathfrak{M}$ est la somme de la série:

$$(30)\qquad \mathfrak{M}(P,t;Q,\tau)=\sum_{p=0}^{\infty}\lambda^p M_p(P,t;Q,\tau)$$

et les noyaux itérés s'expriment par la formule:

$$(31)\qquad M_{p+1}(P,t;Q,\tau)=\int_\tau^t\iint_S M(P,t;\Pi,\Theta)\,M_p(\Pi,\Theta;Q,\tau)\,d\Pi\,d\Theta\quad(M_0=M).$$

Pour démontrer la convergence absolue des intégrales figurant dans les expressions (26) et (31) et celle de la série (30), nous nous appuyons sur les limitations suivantes (voir [3]), pour les valeurs absolues de la fonction Γ, donnée par les formules (16), et de sa dérivée transversale:

$$(32)\qquad |\Gamma(P,t;Q,\tau)|\leqslant\begin{cases}c_1(t-\tau)^{-\mu_1}|PQ|^{-n+2\mu_1} & \text{si}\quad |PQ|\leqslant\varrho_0,\\ c_2(t-\tau)^{\mu_2}|PQ|^{-n-2\mu_2} & \text{si}\quad |PQ|>\varrho_0,\end{cases}$$

$$(33)\qquad \left|\frac{d}{dT_P}\Gamma(P,t;Q,\tau)\right|\leqslant\begin{cases}c_1'(t-\tau)^{-\mu_1'}|PQ|^{-n-1+2\mu_1'+\varkappa_1} & \text{si}\quad |PQ|\leqslant\varrho_0,\\ c_2'(t-\tau)^{\mu_2'}|PQ|^{-n-1-2\mu_2'} & \text{si}\quad |PQ|>\varrho_0\end{cases}$$

où les nombres μ_1, μ_2 et ϱ_0 sont les mêmes que dans les inégalités, (20)

$$\varkappa_1=\min(h^*,h_L)\quad\text{et}\quad \mu_1'\in(1-\varkappa_1/2,1).$$

On voit aisément, d'après les limitations (32) et (33), que le noyau M admet une singularité faible, puisqu'il vérifie l'inégalité:

$$(34)\qquad |M(P,t;Q,\tau)|\leqslant c(t-\tau)^{\mu_1'}|PQ|^{-n-1+2\mu_1'+\varkappa_1},$$

donc: $n+1-2\mu_1'-\varkappa_1<n-1$. On peut de même démontrer que la fonction $h(P,t)$ est bornée et que la série (30) est uniformément et absolument convergente.

Les relations (24) font correspondre à un point $U[u,\varphi]$ de l'ensemble Z un point $V[v,\psi]$ de l'ensemble Z^*. Nous allons maintenant trouver les conditions pour que l'ensemble Z^* fasse partie de l'ensemble Z.

En s'appuyant sur les inégalités (32) on a, d'après la première des équations du système (24), la limitation suivante:

$$(35)\qquad |v(A,t)| \leqslant (a_1T^{1-\mu_1}+a_2T^{1+\mu_2})\varrho+(a_3T^{1-\mu_1}+a_4T^{1+\mu_2})M_F,$$

où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont des constantes positives indépendantes des fonctions F, φ et de T, M_F étant la borne supérieure de la fonction F. De même, d'après l'équation (26), nous obtenons l'inégalité suivante:

$$(36)\qquad |\psi(P,t)| \leqslant [1+2m_\lambda s_{\mathfrak{M}}(b_1T^{1-\mu_1}+b_2T^{1+\mu_2})M_F+\sup|h(P,t)|,$$

où

$$s_{\mathfrak{M}} = \sup\Big[\int_0^t\iint_S |\mathfrak{M}(P,t;Q,\tau)|\,dQ\,d\tau\Big], \qquad m_\lambda = \sup|\lambda_n(Q,\tau)|,$$

b_1 et b_2 étant deux constantes positives indépendantes de T et de M_F. Il faut encore démontrer que la fonction $\psi(P,t)$ vérifie la même condition de Hölder que la fonction $\varphi(P,t)$. En partant de la seconde équation du système (24) on peut écrire l'inégalité:

$$(37)\qquad |\psi(P,t)-\psi(P_1,t)| \leqslant k_1|I_1(P,t)-I_1(P_1,t)|+ \\ +k_2|I_2(P,t)-I_2(P_1,t)|+k_3|G(P,t)-G(P_1,t)|,$$

où

$$(38)\qquad I_1(P,t) = \int_0^t\iint_S M(P,t;Q,\tau)\psi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau,$$

$$(38')\qquad I_2(P,t) = \int_0^t\iiint_\Omega M(P,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u(B,\tau)]\,dB\,d\tau$$

et k_1, k_2, k_3, sont des constantes positives.

Nous nous appuyerons sur les théorèmes (voir [3]) relatifs au potentiel de simple couche:

$$V(A,t) = \int_0^t\iint_S \Gamma(A,t;Q,\tau)\psi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau$$

et à l'intégrale:

$$V^*(P,t) = \int_0^t\iint_S \frac{d}{dT_P}[\Gamma(P,t;Q,\tau)]\psi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau$$

vérifiant dans tout l'espace les inégalités:

$$(39)\qquad |V(A,t)-V(A_1,t_1)| < \text{const}\sup|\psi|\,[|AA_1|^{\delta}+|t-t_1|^{\delta'/2}],$$

$$(40)\qquad |V^*(P,t)-V^*(P_1,t_1)| < \text{const}\sup|\psi|\,[|PP_1|^{\delta\varkappa_1}+|t-t_1|^{\delta'\varkappa_1/3}]$$

sous la supposition que la densité $\psi(Q,\tau)$ est bornée et intégrable dans le domaine $[S;(0,T)]$. Les exposants δ et δ' appartiennent à l'intervalle

$(0,1)$, $\varkappa_1$ est le nombre figurant dans l'inégalité (33). Or, nous constatons que l'intégrale (38) vérifie la condition de Hölder:

$$(41)\qquad |I_1(P,t)-I_1(P_1,t)| < \text{const}\sup|\psi|\,|PP_1|^{h_\varphi}$$

si l'exposant h_φ vérifie la condition:

$$(42)\qquad 0 < h_\varphi < \begin{cases} h_g < 1, \\ \varkappa_1 = \min(h^*, h_L). \end{cases}$$

De même, on peut démontrer que l'intégrale (38′) vérifie l'inégalité

$$(43)\qquad |I_2(P,t)-I_2(P_1,t)| < \text{const}\sup|F|\,|PP_1|^{h_\varphi},$$

où l'exposant h_φ est défini par la condition (42), en profitant du théorème suivant (voir [3]):

Si la fonction $\tilde{\varrho}(B,\tau)$ est bornée dans la région $[\Omega,(0,T)]$ et intégrable dans chaque partie mesurable de cette région, l'intégrale:

$$W(A,t) = \int_0^t\iiint_\Omega \Gamma(A,t;B,\tau)\varrho(B,\tau)\,dB\,d\tau$$

vérifie dans tout l'espace E les inégalités:

$$(44)\qquad |W(A,t)-W(A_1,t_1)| < \text{const}\sup|\tilde{\varrho}|\,[|AA_1|^{\delta}+|t-t_1|^{\delta'}],$$

$$(44')\qquad |W_{x_\alpha}(A,t)-W_{x_\alpha}(A_1,t_1)| < \text{const}\sup|\tilde{\varrho}|\,[|AA_1|^{\delta}+|t-t_1|^{\delta'/2}].$$

Il ne nous reste qu'à chercher la condition de Hölder pour la fonction donnée $G(P,t,u_0,u_1,\ldots,u_q)$, dans laquelle on a substitué:

$$u_0 = v(P,t), \qquad u_\gamma = u_{sP(\gamma)}(P,t) \qquad (\gamma = 1,2,\ldots,q)$$

et où les fonctions $u_{sP(\gamma)}(P,t)$, exprimées par la formule (22) peuvent être décomposées de la manière suivante:

$$u_{sP(\gamma)}(P,t) = \int_0^t\iint_S \Gamma_{sP(\gamma)}(P,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u(B,\tau)]\,dB\,d\tau+ \\ +\int_0^t\Big[\varphi(P,\tau)\iint_S \Gamma_{sP(\gamma)}(P,t;Q,\tau)\,dQ\Big]d\tau+ \\ +\int_0^t\iint_S \Gamma_{sP(\gamma)}(P,t;Q,\tau)[\varphi(Q,\tau)-\varphi(P,\tau)]\,dQ\,d\tau.$$

En s'appuyant sur les inégalités (voir [3]):

$$(45)\qquad \Gamma_{s_P}(P,t;B,\tau)| < \begin{cases} \text{const}(t-\tau)^{-\mu_1}|PB|^{-n-1+2\mu_1} & \text{si}\quad |PB| \leqslant \varrho_0, \\ \text{const}(t-\tau)^{\mu_2}|PB|^{-n-1-2\mu_2} & \text{si}\quad |PB| > \varrho_0, \end{cases}$$

$$(46)\qquad \Big|\iint_S \Gamma_{s_P}(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\Big| < \text{const}|t-\tau|^{-\eta},$$

où $\eta\epsilon(1-\chi/2, 1)$, $\chi = \min(h, h_\varphi, k_L)$, nous pouvons écrire:

$$|u_{s_{P(\gamma)}}(P, t)| \leqslant \sup|F|(b_1' t^{1-\mu_1}+b_2' t^{1+\mu_2})+b_3' t^{1-\eta}\sup|\varphi|+b_4' t^{1-\mu_1}k_\varphi,$$

b_1', b_2', b_3' et b_4' étant des constantes positives. Or, la fonction G sera définie et continue par rapport à toutes ses variables, si les constantes ϱ et h_φ satisfont aux conditions:

$$(47)\qquad \begin{aligned} &(a_1 T^{1-\mu_1}+a_2 T^{1+\mu_2})\varphi+(a_3 T^{1-\mu_1}+a_4 T^{1+\mu_2})M_F \leqslant R,\\ &(b_1' T^{1-\mu_1}+b_2' T^{1+\mu_2})M_F+b_3' T^{1-\eta}+b_4' T^{1-\mu_1}k_\varphi \leqslant R. \end{aligned}$$

D'après les inégalités (39) et (44), la fonction $v(A, t)$ vérifie la condition:

$$(48)\qquad |v(A, t)-v(A_1, t_1)| \leqslant (d_1 M_F+d_2\varrho)[|AA_1|^\delta+|t-t_1|^{\delta/2}].$$

La dérivée tangentielle du potentiel de simple couche satisfait dans tout l'espace à l'inégalité suivante (voir [2]):

$$(49)\qquad |V_{s_P}(P, t)-V_{s_{P_1}}(P_1, t)| \leqslant (c_1'\sup|\varphi|+c_2' k_\varphi)|PP_1|^{h_a}$$

dans le cas où

$$(50)\qquad h_\varphi < \min(h^*, h_s, 2h_L).$$

Il en découle la condition suivante:

$$(51)\qquad |u_{s_{P(\gamma)}}(P, t)-u_{s_{P_1(\gamma)}}(P_1, t)| \leqslant d_1' M_F|PP_1|^\delta+(d_2'\varrho+d_3' k_\varphi)|PP_1|^{h_\varphi}.$$

En rapprochant les inégalités (11), (48) et (51) nous obtenons pour la fonction G la condition de Hölder suivante:

$$(52)\qquad \begin{aligned} &|G[P, t, v(P, t), u_{s_{P(1)}}(P, t), u_{s_{P(2)}}(P, t), \ldots, u_{s_{P(q)}}(P, t)]-\\ &\quad -G[P_1, t, v(P_1, t) u_{s_{P_1(1)}}(P_1, t), u_{s_{P_1(2)}}(P_1, t), \ldots, u_{s_{P_1(q)}}(P_1, t)]|\\ &\leqslant k_G[|PP_1|^{h_G}+(d_1 M_F+d_2\varrho)^{h'_G}]|PP_1|^{\delta h'_G}+q d_1' M_F|PP_1|^\delta+\\ &\qquad\qquad +q(d_2'\varrho+d_3' k_\varphi)|PP_1|^{h_\varphi}\\ &\leqslant k_G[1+(d_1 M_F+d_2\varrho)^{h'_G}+d_3 M_F+d_4\varrho+d_5 k_\varphi]|PP_1|^{h_\varphi}, \end{aligned}$$

où les coefficients $d_1, d_2, \ldots, d_5$ sont des constantes positives indépendantes des fonctions F et G et où l'on suppose que l'exposant h_φ, vérifiant les inégalités (42) et (50), satisfait encore à la condition:

$$(53)\qquad h_\varphi < \min(h_G, h'_G) < 1.$$

Quant à l'inégalité (37), grâce aux relations (41), (43) et (52) nous pouvons désormais écrire la condition suivante:

$$|\psi(P, t)-\psi(P_1, t)| \leqslant \{\bar c_1+\bar c_2 M_F+k_G[1+(\bar c_3 M_F+\bar c_4\varrho)^{h'_G}+\bar c_5 M_F+ +\bar c_6\varrho+\bar c_7 k_\varphi]\}|PP_1|^{h_\varphi},$$

où les constantes positives $\bar c_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots, 7$) ne dépendent pas des fonctions F et G.

En rapprochant les résultats (35), (36) et (52) nous voyons que tous les points $U[u, \varphi]$ appartenant à l'ensemble Z sont transformés par

l'opération (24) en points $V[v, \psi]$ qui appartiennent aussi à l'ensemble Z, si les constantes du problème vérifient les inégalités suivantes:

$$(54)\qquad \begin{aligned} &(a_1 T^{1-\mu_1}+a_2 T^{1+\mu_2})\varrho+(a_3 T^{1-\mu_1}+a_4 T^{1+\mu_2})M_F \leqslant R,\\ &(1+2m_\lambda s_{\mathfrak{M}})[(b_1 T^{1-\mu_1}+b_2 T^{1+\mu_2})M_F+M_G] \leqslant \varrho,\\ &\bar c_1\varrho+\bar c_2 M_F+k_G[1+(\bar c_3\varrho+\bar c_4 M_F)^{h'_G}+\bar c_5 M_F+\bar c_6\varrho+\bar c_7 k_\varphi \leqslant k_\varphi. \end{aligned}$$

L'exposant h_φ doit simultanément vérifier les conditions (42), (50) et (53).

Nous allons démontrer la continuité de l'opération (24) dans l'espace fonctionnel $\mathcal{E}$. Si une suite arbitraire de points $U_\nu[u_\nu(A, t);\ \varphi_\nu(P, t)]$ de l'ensemble Z tend vers le point $U[u(A, t);\ \varphi(P, t)]$, c'est-à-dire si:

$$\lim_{\nu\to\infty}\delta[U, U_\nu] = \lim_{\nu\to\infty}[\sup|u-u_\nu|+\sup|\varphi-\varphi_\nu|] = 0,$$

la suite $V_\nu[v_\nu(A, t);\ \psi_\nu(P, t)]$ de points de l'espace $\mathcal{E}$ correspondant aux points U_ν par les relations (24) tend vers le point $V[v(A, t);\ \psi(P, t)]$ qui correspond par les relations (24) au point U ce qu'on peut écrire:

$$\lim_{\nu\to\infty}\delta[V, V_\nu] = \lim_{\nu\to\infty}[\sup|v-v_\nu|+\sup|\psi-\psi_\nu|] = 0.$$

Il suffit d'étudier l'expression $|J^S(P, t)-J_\nu^S(P, t)|$, où

$$(55)\qquad J^S(P, t) = \int_0^t\iint_S \Gamma_{s_{P(\gamma)}}(P, t; Q, \tau)\varphi(Q, \tau)\,dQ\,d\tau,$$

$$(56)\qquad J_\nu^S(P, t) = \int_0^t\iint_S \Gamma_{s_{P(\gamma)}}(P, t; Q, \tau)\varphi_\nu(Q, \tau)\,dQ\,d\tau$$

puisque pour toutes les autres intégrales, dont il y est question, il est facile de démontrer que leurs différences convergent uniformément vers zéro.

Soit une sphère K_ε centrée au point P et de rayon $r(\varepsilon)$ dépendant d'un nombre positif ε. Il suffit d'étudier la convergence des intégrales $J_\nu^{S_\varepsilon}(P, t)$ étendues à la portion S_ε de la surface S située à l'intérieur de la sphère K_ε. Décomposons les intégrales $J^{S_\varepsilon}(P, t)$ et $J_\nu^{S_\varepsilon}(P, t)$ de la façon suivante:

$$\begin{aligned} J^{S_\varepsilon}(P, t) &= \int_0^t\iint_{S_\varepsilon}\Gamma_{s_{P(\gamma)}}(P, t; Q, \tau)[\varphi(Q, \tau)-\varphi(P, \tau)]\,dQ\,d\tau+\\ &\quad+\int_0^t\Big[\varphi(P, \tau)\iint_{S_\varepsilon}\Gamma_{s_{P(\gamma)}}(P, t; Q, \tau)\,dQ\Big]d\tau = J_{(1)}^{S_\varepsilon}(P, t)+J_{(2)}^{S_\varepsilon}(P, t),\\ J_\nu^{S_\varepsilon}(P, t) &= \int_0^t\iint_{S_\varepsilon}\Gamma_{s_{P(\gamma)}}(P, t; Q, \tau)[\varphi_\nu(Q, \tau)-\varphi_\nu(P, \tau)]\,dQ\,d\tau+\\ &\quad+\int_0^t\Big[\varphi_\nu(P, \tau)\iint_{S_\varepsilon}\Gamma_{s_{P(\gamma)}}(P, t; Q, \tau)\,dQ\Big]d\tau = J_{(1)\nu}^{S_\varepsilon}(P, t)+J_{(2)\nu}^{S_\varepsilon}(P, t). \end{aligned}$$

Nous admettons pour la dérivée tangentielle de la fonction Γ la première des inégalités (45), puisque $|PQ| < \varrho_0$. En tenant compte de ce que les fonctions φ_ν vérifient la condition de Hölder avec l'exposant h_φ, nous pouvons écrire l'inégalité:

$$|\Gamma_{s_{P(\gamma)}}(P,t;Q,\tau)[\varphi_\nu(Q,\tau)-\varphi_\nu(P,\tau)]| \leqslant \mathrm{const}(t-\tau)^{-\mu_1}|PQ|^{-n-1+2\mu_1-h_\varphi},$$

qui assure la convergence uniforme et absolue des intégrales $J^{S_\varepsilon}_{(1)\nu}(P,t)$, c'est-à-dire on peut faire correspondre à tout nombre positif ε le rayon $r(\varepsilon)$ de la sphère K_ε de telle sorte qu'on ait:

(57) $$|J^{S_\varepsilon}_{(1)\nu}(P,t)| < \varepsilon/4 \quad \text{et} \quad |J^{S_\varepsilon}_{(1)}(P,t)| < \varepsilon/4.$$

En vertu de l'inégalité (46), qui assure la convergence des intégrales $J^{S_\varepsilon}_{(2)\nu}(P,t)$, on peut faire correspondre au nombre ε, déjà fixé, un indice ν_ε tel qu'on ait:

(58) $$|J^{S_\varepsilon}_{(2)\nu}(P,t)-J^{S_\varepsilon}_{(2)\nu}(P,t)| < \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad \nu > \nu_\varepsilon.$$

En rapprochant les résultats (57) et (58) nous concluons que:

$$\lim_{\nu\to\infty}|J_\nu(P,t)-J(P,t)| = 0.$$

Pour prouver que l'ensemble Z^* transformé de l'ensemble Z par les relations (24) est compact, nous profiterons de la définition de compacité d'un ensemble:

Un ensemble de points dans un espace fonctionnel est *compact*, si l'on peut extraire de toute suite de points de l'ensemble donné une suite partielle convergente.

Considérons une suite quelconque de points $V_\nu[v_\nu(A,t);\psi_\nu(P,t)]$ choisis dans l'ensemble Z^*. En vertu des relations (24) les fonctions $v_\nu(A,t)$ et $\psi_\nu(P,t)$ s'expriment par les intégrales suivantes:

(59)
$$\begin{aligned}
I_{(1)\nu}(A,t) &= \int_0^t\iiint_\Omega \Gamma(A,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u_\nu(B,\tau)]\,dB\,d\tau,\\
I_{(2)\nu}(P,t) &= \int_0^t\iiint_\Omega M(P,t;B,\tau)F_1[B,\tau,u_\nu(B,\tau)]\,dB\,d\tau,\\
I_{(3)\nu}(A,t) &= \int_0^t\iint_S \Gamma(A,t;Q,\tau)\varphi_\nu(Q,\tau)\,dQ\,d\tau,\\
I_{(4)\nu}(P,t) &= \int_0^t\iint_S M(P,t;Q,\tau)\psi_\nu(Q,\tau)\,dQ\,d\tau.
\end{aligned}$$

Choisissons dans la région Ω_0, limitée par la surface S, un point O arbitrairement fixé. Nous allons prouver que l'intégrale $I_{(1)\nu}(A,t)$ tend uniformément vers zéro, si la distance $|OA|$ tend vers l'infini. Considérons une sphère K, centrée au point O, de rayon $\frac{1}{2}|OA|$ et décomposons l'intégrale $I_{(1)\nu}(A,t)$ en une somme d'intégrales suivantes:

(60) $$I_{(1)\nu}(A,t) = I^{K'}_{(1)\nu}(A,t)+I^{\Omega'}_{(1)\nu}(A,t)$$

où K' est la portion commune de la région Ω et de la sphère K; Ω' est une région située à l'extérieur de la sphère K. Si le point B appartient à la région K' ($|AB| > \frac{1}{2}|OA|$), nous pouvons profiter de la seconde des inégalités (32) et écrire pour la fonction Γ la limitation suivante:

$$|\Gamma(A,t;B,\tau)| \leqslant \frac{2^{n+2\mu_2}c_2(t-\tau)^{\mu_2}}{|OA|^{n+2\mu_2}} \qquad (B\in K')$$

et pour l'intégrale:

$$|I_{(1)\nu}(A,t)| \leqslant \frac{2^{2+2\mu_2}c_2M_Fm_\lambda T^{1+\mu_2}}{(1+\mu_2)\cdot|OA|^{n+2\mu_2}}\iiint_K dB = \frac{2^{2\mu_2}c_2M_Fm_\lambda T^{1+\mu_2}\omega_n}{n(1+\mu_2)|OA|^{2\mu_2}},$$

où $\omega_n = 2(\sqrt{\pi})^n/\Gamma(\frac{1}{2}n)$ est l'aire de la surface d'une sphère à n dimensions et de rayon un. Il en résulte l'inégalité:

(61) $$|I_{(1)\nu}(A,t)| < \varepsilon/12 \quad (\varepsilon \text{ — nombre positif quelconque})$$

si la distance $|OA|$ satisfait à la condition:

$$|OA| \geqslant \left[\frac{3\cdot 2^{2+2\mu_2}c_2M_Fm_\lambda\omega_nT^{1+\mu_2}}{n\varepsilon(1+\mu_2)}\right]^{1/2\mu_2} = R'(\varepsilon).$$

Pour étudier l'intégrale étendue à la région Ω', décrivons du point A comme centre une sphère k_ε de rayon r_ε, tel que la valeur absolue de l'intégrale $I^{k_\varepsilon}_{(1)\nu}(A,t)$ ne dépasse pas le nombre $\varepsilon/12$. On a donc:

$$|I^{k_\varepsilon}_{(1)\nu}(A,t)| \leqslant \frac{c_1M_Fm_\lambda T^{1-\mu_1}}{1-\mu_1}\iiint_{k_\varepsilon}\frac{dB}{|AB|^{n-2\mu_1}} = \frac{c_1M_Fm_\lambda T^{1-\mu_1}\omega_nr_\varepsilon^{2\mu_1}}{2\mu_1(1-\mu_1)} < \frac{\varepsilon}{12}$$

si

$$r_\varepsilon = \left[\frac{\mu_1\varepsilon(1-\mu_1)}{6c_1M_Fm_\lambda\omega_nT^{1-\mu_1}}\right]^{1/2\mu_1}.$$

Quant à l'intégrale $I^{\Omega'-k_\varepsilon}_{(1)\nu}(A,t)$, remarquons que la fonction Γ vérifie dans la région $\Omega'-k_\varepsilon$ l'inégalité

$$|\Gamma(A,t;B,\tau)| \leqslant c_\varepsilon(t-\tau)^{\mu_2}|AB|^{-n-2\mu_2},$$

où la constante c_ε dépend du rayon r_ε et ne dépend pas du point A. Il en résulte la limitation suivante:

$$|I^{\Omega'-k_\varepsilon}_{(1)\nu}(A,t)| \leqslant \frac{c_\varepsilon T^{1+\mu_2}}{(1+\mu_2)r_\varepsilon^{n+2\mu_2}}\sup\iiint_{\Omega'-k_\varepsilon}|F[B,\tau,u(B,\tau)]|\,dB.$$

Or, grâce à l'hypothèse (10'), il existe un nombre $R''(\varepsilon)$ assez grand pour qu'on ait:

$$(62) \qquad |I_{(1)\nu}^{\Omega'-k_\varepsilon}(A,t)| < \varepsilon/12 \quad \text{si} \quad |OA| \geqslant R''(\varepsilon).$$

Il résulte des conditions (61) et (62) que l'intégrale $I_{(1)\nu}(A,t)$ est inférieure à $\varepsilon/4$, si le point A est situé à l'extérieur de la sphère de rayon

$$\tilde{R}_\varepsilon = \max[R'(\varepsilon), R''(\varepsilon)].$$

En ce qui concerne la troisième des intégrales (59), étendue à une surface bornée S, il est évident qu'elle tend uniformément vers zéro si la distance $|OA|$ tend vers l'infini.

Finalement, nous constatons qu'on peut faire correspondre au nombre ε un nombre R_ε (au moins égal à $\tilde{R}_\varepsilon$) tel qu'on ait simultanément:

$$|I_{(1)\nu}(A,t)| < \varepsilon/4 \quad \text{et} \quad |I_{(3)\nu}(A,t)| < \varepsilon/4 \quad \text{si} \quad |OA| \geqslant R_\varepsilon.$$

Il en résulte que l'inégalité:

$$|v_\nu(A,t)| \leqslant \varepsilon/2$$

est vérifiée pour tout indice ν, si le point A est situé à l'extérieur de la sphère Π_ε centrée au point O et de rayon R_ε. A l'intérieur de la sphère Π_ε toutes les fonctions $v_\nu(A,t)$ et $\psi_\nu(P,t)$ sont bornées dans leur ensemble et équicontinues, car elles vérifient des conditions de Hölder par rapport à leurs variables. On peut donc appliquer le théorème d'Arzelà dans la sphère Π_ε, c'est-à-dire on peut extraire d'une suite $V_\nu[v_\nu(A,t), \psi_\nu(P,t)]$ de points de l'ensemble Z^* une suite V_{k_n} de points telle qu'on ait:

$$|v_{k_m}(A,t) - v_{k_n}(A,t)| < \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad |\psi_{k_m}(P,t) - \psi_{k_n}(P,t)| < \varepsilon/2$$

si $m, n > N_\varepsilon$, $A \in \Pi_\varepsilon$, $0 \leqslant t \leqslant T$. Si le point A appartient à la région $E-K$, la condition $|v_\nu(A,t)| < \varepsilon/2$ est vérifiée pour toutes les fonctions de la suite V_ν.

En somme nous concluons que:

$$\|V_{k_m} - V_{k_n}\| = \sup|v_{k_m}(A,t) - v_{k_n}(A,t)| + \sup|\psi_{k_m}(P,t) - \psi_{k_n}(P,t)| < \varepsilon$$

si $m, n > N_\varepsilon$, ce qui signifie que la suite V_{k_n} est convergente au sens de la norme, puisque l'espace $\mathcal{E}$ est complet. Il en résulte, d'après la définition de la compacité d'un ensemble, que l'ensemble Z^* est compact.

Toutes les conditions du théorème de Schauder étant vérifiées, nous concluons qu'il existe un point $U^*[u^*(A,t); \varphi^*(P,t)]$ de l'ensemble Z, invariant par rapport à la transformation (24). Les fonctions $u^*(A,t)$ et $\varphi^*(P,t)$, définies et continues dans les régions $[\Omega; (0,T)]$ et $[S; (0,T)]$, vérifient le système d'équations (15)-(21). La fonction $u^*(A,t)$ est une solution du problème aux limites proposé, puisque:

1° la fonction $F[A, t, u^*(A,t)]$ vérifie la condition de Hölder par rapport au point A et elle est continue par rapport à la variable t, donc la fonction $u^*(A,t)$ vérifie l'équation (1) en tout point intérieur A pour $0 \leqslant t \leqslant T$;

2° la fonction $u^*(A,t)$ vérifie la condition initiale (3);

3° la fonction $u^*(A,t)$ vérifie la condition aux limites (4).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si les coefficients de l'équation* (1), *les fonctions* F, G, g *et la surface fermée* S *vérifient les conditions* (I)-(VII), *si les* q *champs de directions* $\{s_P^{(\gamma)}\}$ *sur la surface* S *vérifient les conditions* (14) *et si, de plus les constantes du problème vérifient les conditions* (54), *il existe dans la région* $[A \in \Omega;\ 0 \leqslant t \leqslant T]$ *au moins une fonction* $u(A,t)$, *vérifiant en tout point intérieur de cette région l'équation* (1), *la condition initiale* (3) *et la condition limite* (4).

Le sujet du présent travail m'a été suggéré par M. W. Pogorzelski. Je tiens à lui exprimer ici ma plus vive gratitude.

Travaux cités

[1] W. Pogorzelski, *Etude de la solution fondamentale de l'équation parabolique*, Ricerche di Mat. Napoli 5 (1956), p. 1-33.

[2] — *Problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique*, Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup. 75 (1958), p. 19-35.

[3] — *Исследование интегралов параболического уравнения и краевых задач в неограниченной области*, Матем. сборник 47 (89) (1959), p. 397-430.

[4] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930), p. 171-180.

Reçu par la Rédaction le 17. 12. 1959