ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1961)

Über die skalaren Komitanten der Vektorfelder

von M. Kucharzewski (Katowice)

Einleitung. Es seien m kontravariante Vektorfelder

(1) $$ {}_1u,\ {}_2u,\ \ldots,\ {}_mu $$

mit den Koordinaten

(2) $$ {}_1u^\nu,\ {}_2u^\nu,\ \ldots,\ {}_mu^\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, $$

im n-dimensionalen Raume gegeben.

Definition 1. *Skalare Komitante* der Vektoren (1) ist jede Funktion

(3) $$ f({}_1u^{\nu_1}, \ldots, {}_mu^{\nu_m}) $$

der Koordinaten (2) der Vektoren (1), die bei der Transformation des Koordinatensystems

(4) $$ x^{\nu'} = x^{\nu'}(x^\nu)\ (^1), \qquad \nu' = 1', 2', \ldots, n', $$

die Beziehung

(5) $$ f(A_\nu^{\nu'_1}\cdot {}_1u^\nu, \ldots, A_\nu^{\nu'_m}\cdot {}_mu^\nu) = f({}_1u^{\nu_1}, \ldots, {}_mu^{\nu_m}) $$

erfüllt, wo $A_\nu^{\nu'}$ die Ableitungen

$$ A_\nu^{\nu'} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} $$

der Transformation (4) bedeuten.

Die Beziehung (5) kann man auch in der Matrizenform schreiben und zwar

(6) $$ f(A\cdot {}_1u, \ldots, A\cdot {}_mu) = f({}_1u, \ldots, {}_mu). $$

---

(1) Der Übergang zu einem anderen Koordinatensystem wird nach J. A. Schouten [1], S. 1, durch Anhängen eines Akzents an die Indizes gegeben.

Hier bedeutet A die Matrix

$$A = \|A_\nu^{\nu'}\| \tag{7}$$

und ${}_1u, \ldots, {}_mu$ die einspaltigen Matrizen

$$ {}_\mu u = \left\| \begin{matrix} {}_\mu u^1 \\ {}_\mu u^2 \\ \vdots \\ {}_\mu u^n \end{matrix} \right\|, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m. \tag{8}$$

Endlich bedeutet $A \cdot {}_\mu u$ das Produkt der Matrizen (7) und (8). Da das Produkt $A \cdot {}_\mu u$ auch eine einspaltige Matrix ist, werden wir die dem Vektor ${}_\mu u$ entsprechenden Veränderlichen in der Formel (6) in einer Spalte und die Argumente der Funktion in der Form einer Matrix schreiben. Das Symbol $f({}_1u, \ldots, {}_mu)$ ist also folgendermaßen

$$f({}_1u, \ldots, {}_mu) = f({}_1u^{\nu_1}, \ldots, {}_mu^{\nu_m}) = f\begin{pmatrix} {}_1u^1 & {}_2u^1 & \ldots & {}_mu^1 \\ {}_1u^2 & {}_2u^2 & \ldots & {}_mu^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {}_1u^n & {}_2u^n & \ldots & {}_mu^n \end{pmatrix} \tag{9}$$

zu verstehen.

Die Gleichung (5) soll für beliebige

$$ {}_\mu u^\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \quad \mu = 1, 2, \ldots, m,$$

und diejenige $A_\nu^{\nu'}$ gelten, die der Ungleichung

$$\operatorname{Det}\|A_\nu^{\nu'}\| \neq 0 \tag{10}$$

genügen.

In dieser Arbeit bestimmen wir alle Lösungen der Gleichung (5) und auf diese Weise erhalten wir alle skalaren Komitanten von m kontravarianten Vektorfelder (1) im n-dimensionalen Raume.

§ 1. Die Formulierung der Ergebnisse. Wir nehmen in Betracht ein bestimmtes System von Vektoren (1) und bezeichnen mit p die größte Zahl der linear unabhängigen von diesen Vektoren. D. h. es existiert unter Vektoren (1) p linear unabhängigen und jeder andere ist von diesen linear abhängig. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß die Vektoren

$$ {}_1u, \ldots, {}_pu \tag{11}$$

linear unabhängig sind und jeder der Vektoren

$$ {}_{p+1}u, {}_{p+2}u, \ldots, {}_mu \tag{12}$$

ist von (11) linear abhängig (anderfalls ist nur die Nummerierung der Vektoren zu verändern). Die Zahl p muß natürlich den folgenden Ungleichungen

$$0 \leqslant p \leqslant n, \tag{13}$$

$$p \leqslant m \tag{14}$$

genügen.

Ist

$$p < m,$$

so gibt es Zahlen (Skalaren)

$$ {}_\varrho\lambda^\alpha \text{ (2)}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad \varrho = p+1, \ldots, m, \tag{15}$$

welche den Beziehungen

$$ {}_\varrho u = {}_\varrho\lambda^\alpha{}_\alpha u \tag{16}$$

genügen. Die Skalaren (15) bleiben natürlich bei der Transformation

$$u^{\nu'} = A_\nu^{\nu'} u^\nu \tag{17}$$

ungeändert. Da die lineare Abhängigkeit der Vektoren und die Zahl p auch bei den Koordinatentransformationen invariant sind, wird die Form der Funktion f für jeden Wert von p separat bestimmt werden. Das Ergebnis ist in folgenden Sätzen enthalten:

Satz 1. *Ist*

$$1 \leqslant p < m,$$

so hat jede skalare Komitante (3) *der Vektoren* (1) *folgende Gestalt*

$$f({}_1u, \ldots, {}_mu) = \varphi({}_\varrho\lambda^\alpha), \tag{18}$$

wo $\varphi({}_\varrho\lambda^\alpha)$ *beliebige Funktion der Koeffizienten* (15) *bedeutet.*

Der Sonderfall $p = n$ ist im nachstehenden Satz erfaßt:

---

(2) Um an der Übersichtlichkeit der Formeln zu gewinnen, werden wir folgende Regeln beachten. Die festen Indizes werden wir mit den lateinischen (z. B. n, Dimension des Raumes, m, die Zahl der Vektoren u. s. w.), die laufenden dagegen stets mit griechischen Buchstaben bezeichnen. Außerdem die bestimmten Gruppen der griechischen Indizes sollen nur bestimmte Zahlenwerte annehmen und zwar:

α, β, γ	die Werte	$1, 2, \ldots, p$,
$\varkappa, \mu$	,,	$1, 2, \ldots, m$,
ν, ω	,,	$1, 2, \ldots, n$,
π, ϱ	,,	$p+1, p+2, \ldots, m$,
σ, τ	,,	$p+1, p+2, \ldots, n$.

Satz 2. *Ist*

$$p = m,$$

so ist jede skalare Komitante der Vektoren (1) *eine Konstante (hängt also von den Vektoren* (1) *nicht ab).*

Im Falle $p = 0$ sind alle Vektoren (1) Nullvektoren. Für

$${}_\mu u^\nu = 0$$

geht die Gleichung (6) in folgende über:

$$f\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

ist also automatisch erfüllt und stellt folglich keine Bedingung dar. Den Wert $f(\vec{0}, \dots, \vec{0})$ kann man sich also ganz beliebig vorschreiben.

Bezeichnung 1. Wir werden mit dem Symbol

$$\|{}_1u, \dots, {}_\varkappa u\|$$

diejenige Matrix bezeichnen, welche in der μ-ten Spalte die Koordinaten des Vektors ${}_\mu u$ hat.

Bezeichnung 2. Mit dem Symbol

$$[{}_1u, \dots, {}_\varkappa u]$$

werden wir die Determinante bezeichnen, welche in jeder Spalte die ersten $\varkappa$ Koordinaten der Vektoren ${}_1u, \dots, {}_\mu u$ besitzt. Natürlich muß die Ungleichung

$$\varkappa \leqslant n$$

gelten.

Bezeichnung 3. Es wird mit

$$E_{\nu\omega}, \quad \nu, \omega = 1, 2, \dots, n,$$

diejenige Matrix bezeichnet, welche durch Transposition der ν-ten und ω-ten Reihe aus der Einheitsmatrix entsteht (vergl. [2], Definition 5).

Bemerkung 1. Setzt man die Matrix $E_{\nu\omega}$ an Stelle A in der Gleichung (6), so ergibt sich daraus, daß die Funktion ungeändert bleibt, wenn man die ν-te und ω-te Koordinate jedes der Vektoren ${}_1u, \dots, {}_mu$ umstellt. Also kann man auch die ν-te und ω-te Reihe der Matrix ${}_\mu u^\nu$ in der Formel (9) verwechseln und die Funktion f ändert sich nicht. Daraus folgt weiter, daß die Funktion f bei jeder Permutation der Reihen der Matrix

$$\|{}_\mu u^\nu\|, \quad \nu = 1, 2, \dots, n, \quad \mu = 1, 2, \dots, m,$$

ungeändert bleibt.

Bemerkung 2. Nach unserer Voraussetzung sind die Vektoren (11) linear unabhängig. Infolgedessen ist der Rang der Matrix

$$\|{}_1u, \dots, {}_pu\| \tag{19}$$

gleich p. Man kann also aus dieser Matrix eine p-reihige von Null verschiedene Determinante erhalten. Diese wird mit Δ bezeichnet. Wir nehmen an, daß eben die aus den ersten p Reihen der Matrix (19) gebildete Determinante von Null verschieden ist:

$$\Delta = [{}_1u, \dots, {}_pu] \neq 0. \tag{20}$$

Wäre eine andere p-reihige Determinante der Matrix (19) von Null verschieden, so könnte man diesen Fall durch entsprechende Permutation der Reihen der Matrix

$$\|{}_\mu u^\nu\| = \|{}_1u, \dots, {}_mu\|$$

und mit Hilfe der Bemerkung 1 auf den obenbetrachteten zurückführen.

Bemerkung 3. Wir bezeichnen mit

$$\Delta_{\alpha/\varrho} = [{}_1u, \dots, {}_{\alpha-1}u, {}_\varrho u, {}_{\alpha+1}u, \dots, {}_pu], \quad \varrho = p+1, \dots, m, \quad \alpha = 1, 2, \dots, p, \tag{21}$$

die Determinante, welche aus der Determinante $[{}_1u, \dots, {}_pu]$ entsteht, wenn man in diese an Stelle der Koordinaten des Vektors ${}_\alpha u$ entsprechende p ersten Koordinaten des Vektors ${}_\varrho u$ einsetzt. Mit Hilfe der Determinanten (20) und (21) kann man die Skalaren (15) auf folgende Weise berechnen. Es ist

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha/\varrho} &= [{}_1u, \dots, {}_{\alpha-1}u, {}_\varrho u, {}_{\alpha+1}u, \dots, {}_pu] \\ &= [{}_1u, \dots, {}_{\alpha-1}u, {}_\varrho\lambda^\beta {}_\beta u, {}_{\alpha+1}u, \dots, {}_pu] = {}_\varrho\lambda^\alpha \Delta, \\ &\qquad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, p, \quad \varrho = p+1, \dots, m. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$${}_\varrho\lambda^\alpha = \frac{\Delta_{\alpha/\varrho}}{\Delta}. \tag{22}$$

Setzt man jetzt (22) in die rechte Seite der Formeln (18), so nimmt die skalare Komitante f der Vektoren (1) folgende Gestalt an:

$$f({}_1u, \dots, {}_mu) = \varphi\left(\frac{\Delta\alpha/\varrho}{\Delta}\right). \tag{23}$$

§ 2. Die Beweise der Sätze 1 und 2. Beweis des Satzes 1. Um zu beweisen, daß die Funktion f, im Falle

$$1 \leqslant p < m \tag{24}$$

die im Satze 1 angeführte Form hat, bilden wir eine solche Matrix

$$A = \|A_{\nu}^{\nu'}\|,$$

welche die linke Seite (6) in die rechte von (18) überführt.

I. Fall:

$$p < n. \tag{25}$$

In diesem Falle wird die Matrix A als Produkt von zwei anderen Matrizen B und C bestimmt:

$$A = C \cdot B. \tag{26}$$

Zuerst wollen wir die Matrix B definieren. Zu diesem Zwecke nehmen wir die in Bemerkung 2 auftretende Voraussetzung (20) an. Die Elemente der Matrix

$$B_1^{\sigma}, B_2^{\sigma}, \ldots, B_p^{\sigma}, B_{\sigma}^{\sigma}, \qquad \sigma = p+1, \ldots, n, \tag{27}$$

werden für festes σ ($\sigma = p+1, \ldots, n$) als diejenige Lösung des Gleichungssystems

$$x_1 \cdot {}_{a}u^1 + x_2 \cdot {}_{a}u^2 + \ldots + x_p \cdot {}_{a}u^p + x_{\sigma} \cdot {}_{a}u^{\sigma} = 0, \qquad a = 1, \ldots, p \tag{28}$$

(nicht summieren über σ und p)

bestimmt, welche der Bedingung

$$B_{\sigma}^{\sigma} = \Delta \tag{29}$$

genügt. Das System (28) enthält p lineare homogene Gleichungen mit $p+1$ Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_p, x_{\sigma}$. Aus der allgemeinen Theorie folgt, daß (28) von Null verschiedene Lösungen besitzt. Wegen (20) ist der Rang der Koeffizientenmatrix gleich p. Es gibt also nur eine linear unabhängige Lösung von (28). Diese kann mit Hilfe der Formel von Crammer berechnet werden. Durch die Bedingung (29) sind also die Zahlen (27) eindeutig bestimmt. Sie erfüllen die folgenden Beziehungen:

$$B_1^{\sigma} \cdot {}_{a}u^1 + \ldots + B_p^{\sigma} \cdot {}_{a}u^p + B_{\sigma}^{\sigma} \cdot {}_{a}u^{\sigma} = 0, \tag{30}$$
$$a = 1, 2, \ldots, p, \qquad \sigma = p+1, \ldots, n.$$

Die Elemente der Matrix B, die in den p ersten Reihen und p ersten Spalten auftreten, sollen gleich den Kroneckerschen δ und alle übrigen Elemente gleich Null sein:

$$B_{\beta}^{a} = \delta_{\beta}^{a}, \qquad a, \beta = 1, 2, \ldots, p. \tag{31}$$

Die Matrix B besitzt also folgende Form:

$$B = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} & & & \downarrow p\text{-te Spalte} & & & & \end{array} & \\ \left\| \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & & 0 \\ B_1^{p+1} & B_2^{p+1} & \ldots & B_p^{p+1} & B_{p+1}^{p+1} & & & \vdots \\ B_1^{p+2} & B_2^{p+2} & \ldots & B_p^{p+2} & 0 & B_{p+2}^{p+2} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & 0 & \\ B_1^{n} & B_2^{n} & \ldots & B_p^{n} & 0 & \ldots & 0 & B_n^{n} \end{array} \right\| & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow p\text{-te Reihe.} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \tag{32}$$

Jetzt definieren wir die Matrix C. Um dies zu erreichen, bezeichnen wir mit

$$\|C_{\beta}^{a}\|, \qquad a, \beta = 1, 2, \ldots, p, \tag{33}$$

die zu der Matrix

$$\|{}_{\beta}u^{a}\|, \qquad a, \beta = 1, 2, \ldots, p, \tag{34}$$

inverse Matrix. Aus der Definition der inversen Matrix ergeben sich die folgenden Beziehungen:

$$C_{\gamma}^{a} \, {}_{\beta}u^{\gamma} = \delta_{\beta}^{a}, \qquad a, \beta, \gamma = 1, 2, \ldots, p. \tag{35}$$

Bezeichnen wir weiter mit

$$a_{\beta}^{a}$$

das algebraische Komplement von ${}_{\beta}u^{a}$ in der Matrix (34). Dann gelten die wohlbekannten Formeln

$$C_{\beta}^{a} = \frac{a_{a}^{\beta}}{\Delta}, \tag{36}$$

aus welchen, gemäß der Definition von $\Delta_{a/\varrho}$,

$$C_{\gamma}^{a} \, {}_{\varrho}u^{\gamma} = \frac{\sum_{\gamma=1}^{p} a_{a}^{\gamma} \, {}_{\varrho}u^{\gamma}}{\Delta} = \frac{\Delta_{a/\varrho}}{\Delta} = {}_{\varrho}\lambda^{a} \tag{37}$$

folgt. Die in p ersten Reihen und p ersten Spalten stehenden Elemente der Matrix C sollen gleich (33) sein. Alle anderen Elemente von C definieren wir durch folgende Formeln:

(38) $$C^{\tau}_{\sigma} = \delta^{\tau}_{\sigma}, \qquad \tau, \sigma = p+1, \ldots, n,$$

(39) $$C^{\alpha}_{\beta} = C^{\beta}_{\sigma} = 0, \qquad \beta = 1, 2, \ldots, p.$$

Die Matrix C hat also folgende Gestalt:

(40) $$\left\| \begin{matrix} C^1_1 & C^1_2 & \ldots & C^1_p & 0 & \ldots & 0 \\ C^2_1 & C^2_2 & \ldots & C^2_p & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C^p_1 & C^p_2 & \ldots & C^p_p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Es ist leicht zu prüfen, daß die Matrix A in der Form

(41) $$A = C \cdot B = \left\| \begin{matrix} C^1_1 & \ldots & C^1_p & 0 & \ldots & & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ C^p_1 & \ldots & C^p_p & 0 & \ldots & & 0 \\ B^{p+1}_1 & \ldots & B^{p+1}_p & B^{p+1}_{p+1} & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ B^n_1 & \ldots & B^n_p & 0 & \ldots & 0 & B^n_n \end{matrix} \right\|$$

dargestellt werden kann.

Aus (20), (29) und (32) folgt, daß die Determinante von B gleich Δ^{n-p} und von Null verschieden ist:

(42) $$\operatorname{Det} B = \Delta^{n-p} \neq 0.$$

Auch die Determinante von C ist wegen (40) und der Definition C^{α}_{β} von Null verschieden:

(43) $$\operatorname{Det} C = 1/\Delta \neq 0.$$

Aus (42), (43) und (26) erhalten wir mit Hilfe des wohlbekannten Satzes über die Determinante des Produktes von zwei Matrizen

(44) $$\operatorname{Det} A = \Delta^{n-p-1} \neq 0.$$

Die Matrix A darf man also in die linke Seite von (6) einsetzen. Wir berechnen jetzt die in der Gleichung (6) auftretenden Produkte $A \cdot {}_{\mu}u$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$. Aus (41), (35) und (30) folgt, daß $A \cdot {}_{\gamma}u$ $(\gamma = 1, 2, \ldots, p)$ gleich

(45) $$A \cdot {}_{\gamma}u = \left\| \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow \gamma\text{-te Reihe}, \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \gamma = 1, 2, \ldots, p,$$

ist. Um die Produkte

$$A \cdot {}_{\varrho}u, \qquad \varrho = p+1, \ldots, m,$$

zu berechnen, multiplizieren wir die σ-te Reihe der Matrix A durch die Spalte der Matrix ${}_{\varrho}u$ $(\sigma = p+1, \ldots, n;\ \varrho = p+1, \ldots, m)$. Dann erhalten wir

$$A^{\sigma'}_{\nu} \cdot {}_{\varrho}u^{\nu} = B^{\sigma}_1 \cdot {}_{\varrho}u^1 + B^{\sigma}_2 \cdot {}_{\varrho}u^2 + \ldots + B^{\sigma}_p \cdot {}_{\varrho}u^p + B^{\sigma}_{\sigma} \cdot {}_{\varrho}u^{\sigma}.$$

Wegen (16) und (30) folgt

46) $$A^{\sigma'}_{\nu} \cdot {}_{\varrho}u^{\nu} = {}_{\varrho}\lambda^{\alpha} (B^{\sigma}_1 \cdot {}_{\alpha}u^1 + B^{\sigma}_2 \cdot {}_{\alpha}u^2 + \ldots + B^{\sigma}_p \cdot {}_{\alpha}u^p + B^{\sigma}_{\sigma} \cdot {}_{\alpha}u^{\sigma}) = 0, \qquad \alpha = 1, \ldots, p.$$

Aus (37) und (40) ergibt sich weiter

(47) $$A \cdot {}_{\varrho}u = \left\| \begin{matrix} {}_{\varrho}\lambda^1 \\ {}_{\varrho}\lambda^2 \\ \vdots \\ {}_{\varrho}\lambda^p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow p\text{-te Reihe}, \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \qquad \varrho = p+1, p+2, \ldots, m.$$

Wird jetzt die Matrix (41) in die Gleichung (6) statt A eingesetzt, so ergibt es sich wegen (45) und (47), daß jede Funktion, die diese Gleichung erfüllt, folgende Form

$$f({}_1u, \ldots, {}_mu) = f\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & {}_{p+1}\lambda^1 & \ldots & {}_m\lambda^1 \\ 0 & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & {}_{p+1}\lambda^p & \ldots & {}_m\lambda^p \\ 0 & \ldots & & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

haben muß. Bezeichnen wir die rechte Seite dieser Gleichung mit

$$\varphi({}_\varrho\lambda^a), \qquad a = 1, 2, \ldots, p, \qquad \varrho = p+1, \ldots, m,$$

so kann die Funktion f in der Form (18) dargestellt werden. Also ist der Beweis des Satzes 1 im Falle $p < n$ beendet.

II. Fall:

$$p = n.$$

In diesem Falle existieren die Zahlen (27) nicht. Die Matrix B ist der Einheitsmatrix gleich. Um den Satz 1 in diesem Falle zu beweisen, genügt es die Matrix C an Stelle A in die (6) einzusetzen.

Beweis des Satzes 2. Setzen wir in die Gleichung (6) an Stelle ${}_\mu u^\nu$ die Kroneckerschen Symbole

$${}_\mu u^\nu = {}_\mu\delta^\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m,$$

ein, so erhalten wir die Gleichung

$$f(A_\nu^{\nu_1'}\delta_1^\nu, A_\nu^{\nu_2'}\delta_2^\nu, \ldots, A_\nu^{\nu_m'}\delta_m^\nu) = f(\delta_1^{\nu_1}, \ldots, \delta_m^{\nu_m}).$$

Daraus folgt weiter

$$f(A_1^{\nu_1'}, A_2^{\nu_2'}, \ldots, A_m^{\nu_m'}) = C. \tag{48}$$

Die letzte Beziehung soll für beliebige linear unabhängige

$$A_1^{\nu_1'}, A_2^{\nu_2'}, \ldots, A_m^{\nu_m'}$$

gelten. Werden die Veränderliche $A_\mu^{\nu'}$ in (48) mit ${}_\mu u^\nu$ bezeichnet, so ergibt sich aus (48), daß die Funktion $f({}_1u, \ldots, {}_mu)$ konstant sein muß, falls alle Vektoren ${}_1u, \ldots, {}_mu$ linear unabhängig sind. Der Satz ist also bewiesen worden.

§ 3. Einige Anwendungen. Als Anwendung der obenbewiesenen Sätze werden wir zuerst die skalaren Komitanten der Punkte in dem n-dimensionalen affinen Raume bestimmen.

Es seien $m+1$ Punkte

$$p_1({}_1x^\nu), \ldots, p_{m+1}({}_{m+1}x^\nu), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

gegeben. Eine skalare Komitante dieser Punkte nennen wir jede Funktion

$$F({}_\varkappa x^\nu), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n, \qquad \varkappa = 1, 2, \ldots, m+1,$$

der Koordinaten dieser Punkte, die bei jeder affinen Transformation

$$x^{\nu'} = A_\nu^{\nu'} x^\nu + B^{\nu'} \tag{49}$$

mit nichtverschwindender Determinante

$$\operatorname{Det}\|A_\nu^{\nu'}\| \neq 0 \tag{50}$$

ungeändert bleibt. Das bedeutet, daß F die folgende Gleichung

$$F(A_\nu^{\nu'}{}_\varkappa x^\nu + B^{\nu'}) = F({}_\varkappa x^\nu) \tag{51}$$

für beliebige ${}_\varkappa x^\nu$, $B_\nu^{\nu'}$ und diejenige $A_\nu^{\nu'}$, die der Bedingung (50) genügen, erfüllen soll.

Setzt man in der Gleichung (51)

$$A_\nu^{\nu'} = \delta_\nu^{\nu'}$$

ein, so ergibt sich

$$F({}_\varkappa x^{\nu'} + B^{\nu'}) = F({}_\varkappa x^\nu). \tag{52}$$

Werden dann in (52)

$$B^{\nu'} = -x_1^{\nu'}$$

eingesetzt, so folgt daraus, daß man die Funktion F in der Form

$$F({}_\varkappa x^\nu) = f({}_2x^{\nu_1} - {}_1x^{\nu_1}, {}_3x^{\nu_2} - {}_1x^{\nu_2}, \ldots, {}_{m+1}x^{\nu_m} - {}_1x^{\nu_m})$$

darstellen kann, wo die Funktion f durch die Beziehung

$$f({}_1u^{\nu_1}, \ldots, {}_mu^{\nu_m}) = F(0, \ldots, 0, {}_1u^{\nu_1}, \ldots, {}_mu^{\nu_m})$$

definiert ist.

Da die Zahlen ${}_\varkappa u^\nu \stackrel{\text{df}}{=} {}_{\varkappa+1}x^\nu - {}_1x^\nu$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, m)$ sich bei der affinen Transformation (49) ändern, wie die Koordinaten eines kontravarianten Vektors ${}_\varkappa u^{\nu'} = A_\nu^{\nu'} \cdot {}_\varkappa u^\nu$, muß die Funktion f die Gleichung (6) erfüllen. Die Funktion f soll also eine skalare Komitante der m kontravarianten Vektoren

$${}_1u, \ldots, {}_mu$$

sein. Infolgedessen kann man sie mit Hilfe der Sätze 1 und 2 bestimmen. Auf diese Weise erhalten wir nachstehenden Folgerungen, welche die skalaren Komitanten der $m+1$ Punkte im n-dimensionalen affinen Raume betreffen.

Folgerung 1. Es seien in einem n-dimensionalen affinen Raume $m+1$ Punkte

(53) $$p_1({}_1x^\nu), \ldots, p_{m+1}({}_{m+1}x^\nu), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

gegeben, die in einer p-dimensionalen aber in keiner $(p-1)$-dimensionalen Hyperebene liegen. Man kann annehmen, daß diese Hyperebene durch die $p+1$ ersten von den Punkten (53) eindeutig bestimmt ist. Die Zahl p muß der Ungleichung

$$0 \leqslant p \leqslant m$$

genügen.

1) Ist $1 \leqslant p < m$, so hat eine jede skalare Komitante der Punkte (53) folgende Form:

$$F({}_1x^{\nu_1}, \ldots, {}_{m+1}x^{\nu_{m+1}}) = \varphi({}_\varrho\lambda^\alpha),$$

wo φ beliebige Funktionen bedeuten und ${}_\varrho\lambda^\alpha$ durch die Gleichung

$${}_{\varrho+1}x^\nu - {}_1x^\nu = {}_\varrho\lambda^\alpha({}_{\alpha+1}x^\nu - {}_1x^\nu)$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, p, \quad \varrho = p+1, \ldots, m, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

definiert sind.

2) Ist entweder $p = 0$ oder $p = m$, so ist eine jede skalare Komitante der Punkte (53) eine Konstante.

Aus dieser Folgerung ergibt sich, daß es keine nichttrivialen Komitanten eines Punktes oder zwei Punkte gibt.

Es seien jetzt drei Punkte p_1, p_2, p_3 gegeben $(m = 2)$. Sind sie nicht auf einer Gerade gelegen, so haben sie auf Grund der Folgerung 1 keine nichttriviale Komitante. Nehmen wir also an, daß sie auf einer Gerade liegen und

$$p_1 \neq p_2$$

ist. Dann gibt es eine Zahl λ, welche die Beziehung

(54) $${}_3x^\nu - {}_1x^\nu = \lambda({}_2x^\nu - {}_1x^\nu)$$

erfüllt. In diesem Falle erhalten wir aus der Folgerung 1 die nachstehende

Folgerung 2. Jede skalare Komitante von drei kolinearen Punkten besitzt die Form

(55) $$F({}_1x^{\nu_1}, {}_2x^{\nu_2}, {}_3x^{\nu_3}) = \varphi(\lambda),$$

wo λ durch (54) definiert ist. Wenn z. B. ${}_2x^1 \neq {}_1x^1$ ist, so kann man die Zahl λ aus (54) berechnen,

$$\lambda = \frac{{}_3x^1 - {}_1x^1}{{}_2x^1 - {}_1x^1},$$

und folglich (55) in der Form

$$F({}_1x^{\nu_1}, {}_2x^{\nu_2}, {}_3x^{\nu_3}) = \varphi\left(\frac{{}_3x^1 - {}_1x^1}{{}_2x^1 - {}_1x^1}\right)$$

darstellen. Setzen wir in der letzten Beziehung

$$\varphi(u) = u$$

(möglichst einfachste Funktion), so erhalten wir den aus der analytischen Geometrie bekannten Ausdruck für das einfache Verhältnis von drei kolinearen Punkten. Die Folgerung 2 stellt also die Bestätigung der wohlbekannten Tatsache aus der affinen Geometrie dar. Unserem Wissen nach ist es noch nicht bewiesen worden, daß es außer dieser Invarianten keine anderen wesentlich verschiedenen gibt.

Literaturverzeichnis

[1] J. A. Schouten und D. J. Struik, *Einführung in die neueren Methoden der Differentialgeometrie*, Groningen 1935.

[2] M. Kucharzewski, *Über die Funktionalgleichung* $f(A)f(B) = f(A \cdot B)$, Publ. Math. Debrecen 6 (3-4) (1959).

Reçu par la Rédaction le 20. 3. 1960