Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI constituent une continuation des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE (vol. I-XXV) fondées en 1921 par Stanisław Zaremba.

Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à l'Analyse Mathématique, la Géométrie et la Théorie des Nombres. Chaque volume paraît en 3 fascicules.

Les manuscrits dactylographiés sont à expédier à l'adresse:
Rédaction des ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW (Pologne), ul. Solskiego 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expédier à l'adresse:
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSZAWA 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

Le prix de ce fascicule est 2 $.
Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de
ARS POLONA
WARSZAWA 5 (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1961)

Sur les moyennes arithmétiques, géométriques et harmoniques des distances mutuelles des points d'un ensemble*

par F. Leja (Kraków)

1. Certaines fonctions d'ensemble liées aux moyennes. Soit E un ensemble compact de points d'un espace cartésien R, $\omega(p,q)$ une fonction continue de deux points p et q variables dans R, remplissant, quels que soient p et q, les conditions

$$\omega(p,q)\geqslant 0,\qquad \omega(p,p)=0,\qquad \omega(p,q)=\omega(q,p)$$

et $p^{(n)}$ un système de $n+1$ points quelconques $p_0, p_1, \ldots, p_n$ de E. Posons

$$(1)\qquad A(p^{(n)})=\sum_{i\neq k}\omega(p_i,p_k),$$

$$G(p^{(n)})=\prod_{i\neq k}\omega(p_i,p_k),\qquad H(p^{(n)})=\sum_{i\neq k}1/\omega(p_i,p_k),$$

où la somme $\sum_{i\neq k}$ et le produit $\prod_{i\neq k}$ sont étendus à toutes les valeurs $0,1,\ldots,n$ de i et $k\neq i$, et formons les moyennes

$$(2)\qquad a(p^{(n)})=\frac{A(p^{(n)})}{n(n+1)},\qquad g(p^{(n)})=[G(p^{(n)})]^{1/n(n+1)},\qquad h(p^{(n)})=\frac{n(n+1)}{H(p^{(n)})}.$$

On sait que ces quantités satisfont aux inégalités [1]

$$0\leqslant h(p^{(n)})\leqslant g(p^{(n)})\leqslant a(p^{(n)})\leqslant M,$$

où M est la plus grande des valeurs $\omega(p,q)$ lorsque p et q varient dans E.

Désignons par

$$(3)\qquad a_n(E,\omega),\qquad g_n(E,\omega),\qquad h_n(E,\omega)\qquad (n=1,2,\ldots)$$

les bornes supérieures des moyennes (2) lorsque le système $p^{(n)}$ varie arbitrairement dans E. Chacune des suites (3) est monotone, non croissante avec n.

* Conférence faite à la Section de Łódź de la Soc. Pol. de Math. en 1957.

[1] On suppose que $h(p^{(n)})=0$ si pour certaines valeurs de i et k $\omega(p_i,p_k)=0$.

En effet, soit, par exemple, $q^{(n)} = \{q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ un système de points de E tel que $a^{(n)}(q^n) = a_n(E, \omega)$. Posons

$$A^{(i)}(q^{(n)}) = \sum_{k=0 (k\neq i)}^{n} \omega(q_i, q_k) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

et supposons que $A^{(0)}(q^{(n)}) = \min\limits_{(i)} A^{(i)}(q^{(n)})$. Alors $nA^{(0)}(q^{(n)}) \leqslant A^{(0)}(q^{(n)}) + A(q_1, \ldots, q_n)$ et par suite

$$\frac{A^{(0)}(q^{(n)})}{n} \leqslant \frac{A(q_1, \ldots, q_n)}{n(n-1)} \leqslant a_{n-1}(E, \omega)$$

et, comme

$$a_n(E, \omega) = \frac{A(q^{(n)})}{n(n+1)} = \frac{2A^{(0)}(q^{(n)}) + A(q_1, \ldots, q_n)}{2n + n(n-1)} \leqslant \frac{A(q_1, \ldots, q_n)}{n(n-1)},$$

on a $a_n(E, \omega) \leqslant a_{n-1}(E, \omega)$ pour $n = 2, 3, \ldots$

Les limites

$$(4) \qquad \lim a_n(E, \omega) = a(E, \omega), \quad \lim g_n(E, \omega) = g(E, \omega), \quad \lim h_n(E, \omega) = h(E, \omega)$$

seront dites respectivement *écart arithmétique*, *écart géométrique* et *écart harmonique* de l'ensemble E par rapport à la fonction $\omega(p, q)$ dite *distance généralisée* des points p et q. Il est clair que

$$0 \leqslant h(E, \omega) \leqslant g(E, \omega) \leqslant a(E, \omega) \leqslant M.$$

L'écart $g(E, |pq|)$ par rapport à la distance cartésienne $|pq|$ se réduit au diamètre transfini de E introduit par M. Fekete et l'écart $h(E, |pq|)$ se réduit au diamètre transfini introduit par G. Pólya et G. Szegö [1].

Exemple 1. Soit C la circonférence de rayon r et $\omega(p, q) = |pq|$ la distance cartésienne des points p et q. Alors

$$(5) \qquad a(C, |pq|) = \frac{4}{\pi} r, \quad g(C, |pq|) = r, \quad h(C, |pq|) = 0.$$

En effet, les moyennes $a(p^{(n)})$, $g(p^{(n)})$, $h(p^{(n)})$ atteignent leurs maxima lorsque les points $p_0, p_1, \ldots, p_n$ sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans C. Comme $|p_0 p_k| = 2r \sin k\frac{\pi}{n+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, on a

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{n} |p_0 p_k| = 2r \sum_{k=1}^{n} \sin k \frac{\pi}{n+1},$$

$$(7) \qquad \sum_{k=1}^{k} \frac{1}{|p_0 p_k|} = \frac{1}{2r} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin k\pi/(n+1)}$$

et, comme

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \frac{\sin n\varphi/2}{\sin\varphi/2} \sin(n+1)\frac{\varphi}{2},$$

la somme (6) est égale à $2r \operatorname{ctg} \pi/2(n+1)$. D'autre part, on a $\sum\limits_{i\neq k} |p_i p_k| = (n+1) \sum\limits_{1}^{n} |p_0 p_k|$ et

$$a_n(C, |pq|) = \frac{1}{n(n+1)} (n+1) 2r \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{4r}{\pi} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\pi/2(n+1)}{\sin\pi/2(n+1)} \cos\pi/2(n+1)$$

ce qui entraîne la première des formules (5).

Pareillement, comme $\sum\limits_{i\neq k} |p_i p_k|^{-1} = (n+1) \sum\limits_{k=1}^{n} |p_0 p_k|^{-1}$ il résulte de (6) que

$$h_n(C, |pq|) = \frac{2rn}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin k\pi/(n+1)}}.$$

Soit m un nombre entier positif $< n$ et $N = N(m, \varepsilon)$ un indice tel qu'on ait

$$\frac{k\pi(n+1)}{\sin k\pi/(n+1)} > 1 - \varepsilon \quad \text{pour} \quad n > N \quad \text{et} \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Alors, si $n > N$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin k\pi/(n+1)} > \sum_{k=1}^{m} \frac{k\pi/(n+1)}{\sin k\pi/(n+1)} \cdot \frac{n+1}{k\pi} > (1-\varepsilon) \frac{n+1}{\pi} \sum_{1}^{m} \frac{1}{k}$$

et par suite

$$h_n(C, |pq|) < \frac{2\pi rn}{(1-\varepsilon)(n+1)} \cdot \frac{1}{\sigma_n} \quad \text{où} \quad \sigma_m = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{m},$$

ce qui entraîne la dernière des formules (5), car σ_m peut être arbitrairement grand.

La seconde des formules (5) résulte du fait que

$$\prod_{k=1}^{n} |p_0 p_k| = (n+1) r^n \quad \text{et} \quad g_n(C, |pq|) = r \sqrt[n]{n+1}.$$

Exemple 2. Soit R l'espace des deux variables complexes x et y et AA' le segment rectiligne joignant les points A et A'. Désignons par $[pq]$ la distance triangulaire des points p et q, c'est-à-dire l'expression $[pq] = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - y_1 x_2|$, où (x_1, y_1) sont les coordonnées de p et (x_2, y_2) celles de q. On peut prouver que les trois écarts du segment AA' par rapport à la distance triangulaire s'expriment par les formules

$$(8) \qquad a(AA', [pq]) = \tfrac{1}{4}[AA'], \quad g(AA', [pq]) = \tfrac{1}{8}[AA'], \quad h(AA', [pq]) = 0.$$

2. Conditions pour que les écarts soient positifs. Il est clair que, quel que soit E, les trois écarts (4) s'annulent si la fonction $\omega(p, q)$ est identiquement nulle. W. Ottenbreit a démontré [2] que l'écart géométrique $g(E, \omega)$ s'annule, quel que soit ω, si l'ensemble E, supposé compact, est dénombrable. Néanmoins:

1. *L'écart arithmétique $a(E, \omega)$ est toujours positif si E contient deux points p_0 et q_0 en lesquels $\omega(p_0, q_0) > 0$.*

En effet, soit $p^{(n)} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ un système de $n+1 = 2\nu$ points dont ν sont identiques à p_0 et tous les autres à q_0. Alors $\sum_{k=1}^{n} \omega(p_0, p_k) \geqslant \nu\omega(p_0, q_0)$, $A(p^{(n)}) \geqslant (n+1)\nu\omega(p_0, q_0)$ et

$$a(p^{(n)}) \geqslant \frac{\nu}{n}\,\omega(p_0, q_0) = \frac{n+1}{2n}\,\omega(p_0, q_0)$$

ce qui prouve l'inégalité $a(E, \omega) \geqslant \frac{1}{2}\omega(p_0, q_0)$.

2. *L'écart géométrique $g(E, |pq|)$ est positif si la projection de E sur une droite quelconque contient un segment arbitrairement petit (en particulier, si E contient un continu).*

Ce fait est bien connu [3]. Si la projection de E contient un segment AB de longueur $|AB|$ on a

$$g(E, |pq|) \geqslant g(AB, |pq|) = \tfrac{1}{4}|AB|.$$

3. *L'écart harmonique $h(E, |pq|)$ est positif si la projection de E sur un plan quelconque contient un domaine plan.*

En effet, supposons que la projection de E sur le plan des variables x et y contienne le carré Q défini par les inégalités

$$\{0 \leqslant x \leqslant d,\ 0 \leqslant y \leqslant d\} \quad (d > 0).$$

Partageons Q en n^2 carrés et soient p_{ik} $(i, k = 0, 1, \ldots, n)$ leurs sommets de coordonnées

$$p_{ik} = \left(\frac{i}{n}\,d, \frac{k}{n}\,d\right) \quad (i, k = 0, 1, \ldots, n). \tag{9}$$

Le nombre de ces points étant $(n+1)^2$, posons $N+1 = (n+1)^2$, désignons par $p^{(N)}$ le système (9) et formons la moyenne

$$h(p^{(N)}) = \frac{N(N+1)}{H(p^{(N)})} \quad \text{où} \quad H(p^{(N)}) = \sum_{(i,k,i',k')} \frac{1}{|p_{ik}p_{i'k'}|}$$

la sommation $\sum_{(i,k,i',k')}$ étant étendue à toutes les valeurs de $i, k, i', k' = 0, 1, \ldots, n$ pour lesquelles $(i'-i)^2+(k'-k)^2 > 0$. Puisque $N(N+1) = n(n+1)^2(n+2)$ et que

$$|p_{ik}p_{i'k'}| = \frac{d}{n}\sqrt{(i'-i)^2+(k'-k)^2},$$

on a

$$h(p^{(N)}) = \frac{(n+1)^2(n+2)}{s_n}\,d, \quad \text{où} \quad s_n = \sum_{i,k,i',k'} \frac{1}{\sqrt{(i'-i)^2+(k'-k)^2}}.$$

Lorsque i et i' parcourent les valeurs $0, 1, \ldots, n$, la différence $|i'-i|$ admet $n+1$ fois la valeur 0, $2n$ fois la valeur 1 (pour $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $i' = i+1$ et $i = 1, 2, \ldots, n$, $i' = i-1$) et, en général, $2(n+1-\alpha)$ fois la valeur $\alpha = 1, 2, \ldots, n$. Il s'ensuit que la somme s_n contient $4(n+1-\alpha)\times$ $\times(n+1-\beta)$ termes $1/\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ pour $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ et $\beta = 0, 1, \ldots, n$; par suite

$$h(p^{(N)}) = \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{d}{4I_n}, \tag{10}$$

où

$$I_n = \sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=0}^{n} \frac{\big(1-\alpha/(n+1)\big)\big(1-\beta/(n+1)\big)}{\sqrt{\big(\alpha/(n+1)\big)^2+\big(\beta/(n+1)\big)^2}}\cdot\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Lorsque $n \to \infty$, la suite I_n tend vers l'intégrale

$$I = \int_0^1\int_0^1 \frac{(1-x)(1-y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \ln(1+\sqrt{2}) - \tfrac{1}{3}(\sqrt{2}-1) = 0{,}719\ldots < 1,$$

$h(p)^{(N)}$ tend vers $d/4I$ et, comme $h_N(Q, |pq|) \geqslant h(p^{(N)})$, on trouve

$$h(Q, |pq|) \geqslant \frac{d}{4}.$$

3. Trois fonctions extrémales liées aux moyennes. Soit p un point variable dans l'espace R et $p^{(n)} = \{p_0, p_1, \ldots, p_n\}$ un système de $n+1$ points différents quelconques de E. Formons, pour $i = 0, 1, \ldots, n$, les fonctions de p

$$a^{(i)}(p, p^{(n)}) = \frac{1}{n}\sum_{j=0 (j\neq i)}^{n} [\omega(p, p_j) - \omega(p_i, p_j)],$$

$$g^{(i)}(p, p^{(n)}) = \left[\prod_{j=0 (j\neq i)}^{n} \frac{\omega(p, p_j)}{\omega(p_i, p_j)}\right]^{1/n}, \tag{11}$$

$$h^{(i)}(p, p^{(n)}) = \frac{n}{\sum_{j=0 (j\neq i)}^{n} [\omega(p, p_j)^{-1} - \omega(p_i, p_j)^{-1}]}$$

et posons pour $n = 1, 2, \ldots$

$$a_n(p) = a_n(p, E, \omega) = \inf_{p^{(n)} \epsilon E} \{\max_{(i)} a^{(i)}(p, p^{(n)})\},$$

$$(12) \qquad g_n(p) = g_n(p, E, \omega) = \inf_{p^{(n)} \epsilon E} \{\max_{(i)} g^{(i)}(p, p^{(n)})\},$$

$$h_n(p) = h_n(p, E, \omega) = \inf_{p^{(n)} \epsilon E} \{\max_{(i)} h^{(i)}(p, p^{(n)})\}.$$

Par exemple la prémière de ces fonctions est la borne inférieure de la plus grande des quantités $a^{(i)}(p, p^{(n)})$, $i = 0, 1, \ldots, n$, lorsque, le point p et le nombre n étant fixés, le système $p^{(n)}$ varie dans E. Je dis que:

4. *La suite $a_n(p)$, $n = 1, 2, \ldots$, tend en tout point p de R vers une limite déterminée finie*

$$(13) \qquad \lim_{n\to\infty} a_n(p) = a(p, E, \omega).$$

Démonstration. La suite $\{a_n(p)\}$ jouit en tout point p de la propriété suivante

$$(14) \qquad (\mu+\nu) a_{\mu+\nu}(p) \geqslant \mu a_\mu(p) + \nu a_\nu(p) \quad \text{pour} \quad \mu, \nu = 1, 2, \ldots$$

En effet, soit $q^{(\mu+\nu)} = \{q_0, q_1, \ldots, q_{\mu+\nu}\}$ un système de $\mu+\nu+1$ points de E pour lesquels

$$(15) \qquad a_{\mu+\nu}(p) = \max_{(i)} a^{(i)}(p, q^{(\mu+\nu)}).$$

Cherchons le maximum de la somme $A(p, q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_\nu})$, où p est fixé et les points q_{i_k} parcourent le système $q^{(\mu+\nu)}$. On peut supposer que ce maximum est égal à $A(p, q_{\mu+1}, \ldots, q_{\mu+\nu})$; par suite, on a

$$A(p, q_{\mu+1}, \ldots, q_{\mu+\nu}) \geqslant A(p, q_i, q_{\mu+1}, \ldots, q_{k-1}, q_{k+1}, \ldots, q_{\mu+\nu})$$

pour $i = 0, 1, \ldots, \mu$ et $k = \mu+1, \ldots, \mu+\nu$. En rayant les termes égaux on en déduit l'inégalité

$$\frac{1}{n}\sum_{j=\mu+1}^{\mu+\nu} [\omega(p, q_j) - \omega(q_i, q_j)] \geqslant \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=i,\mu+1,\ldots,\mu+\nu \\ (j\neq k)}} [\omega(p, q_j) - \omega(q_k, q_j)]$$

ou en d'autres termes $a^{(i)}(p, q^{(\nu)}) \geqslant a^{(k)}(p, q^{(\nu)})$, où $q^{(\nu)} = \{q_i, q_{\mu+1}, \ldots, q_{\mu+\nu}\}$; la dernière inégalité a lieu pour $i = 0, 1, \ldots, \mu$ et $k = \mu+1, \ldots, \mu+\nu$, d'où l'on conclut que

$$(16) \qquad a^{(i)}(p, q^{(\nu)}) \geqslant a_\nu(p) \quad \text{pour} \quad i = 0, 1, \ldots, \mu.$$

Mais, d'après (15) on a pour $i = 0, 1, \ldots, \mu$

$$(\mu+\nu) a_{\mu+\nu}(p) = \sum_{j=0}^{\mu} [\omega(p, q_j) - \omega(q_i, q_j)] + \sum_{j=\mu+1}^{\mu+\nu} [\omega(p, q_j) - \omega(q_i, q_j)]$$
$$\geqslant \mu a^{(i)}(p, q^{(\mu)}) + \nu a^{(i)}(p, q^{(\nu)}),$$

où $q^{(\mu)} = \{q_0, q_1, \ldots, q_\mu\}$, $q^{(\nu)} = \{q_i, q_{\mu+1}, \ldots, q_{\mu+\nu}\}$; par suite

$$(\mu+\nu) a_{\mu+\nu}(p) \geqslant \mu \max_{(i)} a^{(i)}(p, q^{(\mu)}) + \nu a_\nu(p)$$

ce qui prouve notre assertion (14).

Il résulte de (14) que la limite (13), finie ou infinie, existe. Puisque

$$a_n(p) \leqslant \max_{(i)} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n} [\omega(p, p_j) - \omega(p_i, p_j)] \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n} \omega(p, p_j) \leqslant M(p)$$

où $M(p) = \max_{q \epsilon E} \omega(p, q)$, la limite (13) est finie, c. q. f. d.

5. *Si l'écart $g(E, \omega)$ est positif, la suite $\{g_n(p)\}$ tend en tout point p de R vers une limite finie*

$$(17) \qquad \lim_{n\to\infty} g_n(p) = g(p, E, \omega)$$

et si $h(E, \omega) > 0$ la suite $\{h_n(p)\}$ tend aussi vers une limite finie

$$(18) \qquad \lim_{n\to\infty} h_n(p) = h(p, E, \omega).$$

En effet, les suites $\{g_n(p)\}$ et $\{h_n(p)\}$ satisfont aux inégalités

$$(19) \qquad g_{\mu+\nu}^{\mu+\nu}(p) \geqslant g_\mu^\mu(p) g_\nu^\nu(p) \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots)$$

$$(20) \qquad \frac{\mu+\nu}{h_{\mu+\nu}(p)} \leqslant \frac{\mu}{h_\mu(p)} + \frac{\nu}{h_\nu(p)} \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots)$$

dont la démonstration est analogue à celle de (14). L'existence des limites (17) et (18), finies ou infinies, résulte des inégalités (19) et (20). La conclusion que ces limites sont finies résulte de l'hypothèse que les écarts $g(E, \omega)$ et $h(E, \omega)$ ne s'annulent pas.

Les formules (13), (17) et (18) font correspondre à chaque ensemble fermé et borné E trois fonctions $a(p, E, \omega)$, $g(p, E, \omega)$ et $h(p, E, \omega)$ du point p dans l'espace R, dites *fonctions extrémales* par rapport à E et ω.

Désignons par $D_\infty(E)$ le domaine non borné de R contenu dans l'ensemble complémentaire de E. On sait [3] que, si R est le plan et $\omega(p, q)$ se réduit à la distance cartésienne $|pq|$ des points p et q, la fonction $\operatorname{Log} g(z, E, |pq|)$ du point z est harmonique dans $D_\infty(E)$ et se réduit à la fonction de Green de ce domaine avec un pôle à l'infini. La nature des fonctions extrémales $a(z, E, |pq|)$, $g(z, E, |pq|)$ et $h(z, E, |pq|)$ dans un espace cartésien quelconque sera étudiée dans une note prochaine.

Travaux cités

[1] G. Pólya und G. Szegö, *Über den transfiniten Durchmesser von ebenen und räumlichen Punktmengen*, J. für Math. 165 (1931), p. 4-49.

[2] W. Ottenbreit, *Metody obliczania średnic pozaskończonych i rozwartości zbiorów*, Supplément aux Annales Soc. Pol. Math. 23 (1950), p. 1-103.

[3] F. Leja, *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Ann. Soc. Pol. Math. 12 (1933), p. 57-71.

Reçu par la Rédaction le 15. 6. 1958

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1961)

Problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation parabolique dans une région non bornée

par M. Tryjarska (Warszawa)

Le problème aux limites aux dérivées tangentielles pour l'équation du type parabolique de la forme:

$$\hat{D}(u) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} a_{\alpha\beta}(A, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_{\alpha=1}^{n} b_\alpha(A, t)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + c(A, t)u - \frac{\partial u}{\partial t}$$
$$= F\left(A, t, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$$

a été posé et résolu par W. Pogorzelski [2] dans une région bornée à n dimensions et dans un intervalle fini de temps t.

Le sujet de ce travail est le même problème aux limites pour l'équation:

$$\hat{D}(u) = F(A, t, u) \tag{1}$$

dans une région non bornée Ω, située à l'extérieur d'une certaine surface fermée S et pour un intervalle fini de la variable t. Sur la surface S on définit q champs de directions tangentielles:

$$\{s_P^{(1)}\}, \{s_P^{(2)}\}, \ldots, \{s_P^{(q)}\} \qquad (P \in S,\ 1 \leqslant q \leqslant n-1).$$

Il s'agit de déterminer une telle fonction $u(A, t)$ qui:

1° vérifie l'équation (1) en tout point intérieur du domaine:

$$A \in \Omega, \qquad t \in (0, T); \tag{2}$$

2° vérifie la condition initiale:

$$\lim_{t\to 0} u(A, t) = 0 \tag{3}$$

en tout point intérieur $A \in \Omega$;

3° satisfait à une condition limite aux dérivées tangentielles de la forme:

$$\frac{du}{dT_P} + g(P, t)u(P, t) = G[P, t, u(P, t), u_{s_{P(1)}}(P, t), \ldots, u_{s_{P(q)}}(P, t)] \tag{4}$$