ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)

Das Doppelverhältnis als Lösung einer Funktionalgleichung

von J. Aczél (Debrecen), S. Gołąb (Kraków), M. Kuczma (Kraków) und E. Siwek (Kraków)

In allen Lehrbüchern der analytischen projektiven Geometrie wird der Begriff des Doppelverhältnisses von vier Punkten einer Geraden in künstlicher Weise eingeführt und zwar als Quotient der einfachen Verhältnissen von zwei Punktetripeln. Als der natürlichste, obwohl nicht der einfachste, Weg scheint uns der folgende zu sein. Da nach dem Fundamentalsatze der projektiven Geometrie jedes Tripel (p_1, p_2, p_3) von drei verschiedenen Punkten einer Geraden in ein anderes beliebiges Tripel (p_1', p_2', p_3') von drei verschiedenen Punkten durch eine projektive Transformation überführt werden kann, so kann es keine skalare Invariante von kolinearen Punktetripeln angesichts der projektiven Transformationen geben. Es entsteht also die Frage nach der Existenz von skalaren Invarianten der Quadrupel von kolinearen Punkten. Der natürlichste Weg zur Lösung dieser Frage ist wohl der folgende.

Es seien 4 verschiedene Punkte p_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ einer projektiven Geraden gegeben. Wir bezeichnen mit x_i die affine Koordinate des Punktes p_i. Bei einer beliebigen projektiven Transformation, die in der Form

$$x_i' = \frac{a+bx_i}{1+cx_i} \tag{1}$$

mit den drei wesentlichen Parametern a, b, c gegeben sei, geht das Quadrupel $Q(p_1, p_2, p_3, p_4)$ in $Q'(p_1', p_2', p_3', p_4')$ über. Setzen wir voraus, daß I eine skalare Invariante von Q gegenüber den Transformationen (1) ist, so bedeutet es analytisch, daß eine Funktionen f von vier Veränderlichen

$$I = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

existiert, welche der folgenden Funktionalgleichung

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f\left[\frac{a+bx_1}{1+cx_1}, \frac{a+bx_2}{1+cx_2}, \frac{a+bx_3}{1+cx_3}, \frac{a+bx_4}{1+cx_4}\right] \tag{2}$$

genügt. Genauer gesagt, wir setzen voraus, daß die Gleichung (2) für alle Zahlenquadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) von der Eigenschaft

(3) $$x_i \neq x_k \quad \text{für} \quad i \neq k \quad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

und für alle Zahlentripel (a, b, c) von der Eigenschaft

(4) $$ac - b \neq 0$$

erfüllt sein soll (die letzte Ungleichung folgt aus der Voraussetzung, daß die Transformation (1) umkehrbar ist).

Die Funktionalgleichung (2) werden wir *ohne irgendwelche Regularitätsannahmen* über die gesuchte Funktion f lösen.

I Methode. Wir setzen in (2)

(5) $$x_1 = -1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1, \quad x_4 = x$$

und

(6) $$\frac{a+bx_i}{1+cx_i} = u_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

ein. Dabei setzen wir voraus, daß

(7) $$x \neq -1, 0, +1$$

und

$$u_i \neq u_k \quad \text{für} \quad i \neq k$$

ist. Die Werte u_i wollen wir nun als gegebene ansehen, während a, b, c, x als Unbekannten betrachtet werden sollen. Wir haben also das folgende System

(8) $$\frac{a-b}{1-c} = u_1, \quad a = u_2, \quad \frac{a+b}{1+c} = u_3, \quad \frac{a+bx}{1+cx} = u_4$$

zu lösen. Das geht einfach vor. Setzen wir $a = u_2$ in die erste und dritte Gleichung (8), so erhalten wir

(9) $$u_2 - b = u_1 - u_1 c, \quad u_2 + b = u_3 + u_3 c.$$

Da u_3 voraussetzungsgemäß von u_1 verschieden ist, so bekommen wir aus (9)

(10) $$b = \frac{u_2(u_1+u_3) - 2u_1u_3}{u_3 - u_1}, \quad c = \frac{2u_2 - (u_1+u_3)}{u_3 - u_1}.$$

Setzt man dies in die vierte Gleichung (8) ein, so erhält man ohne Schwierigkeit

(11) $$x = \frac{(u_4-u_2)(u_3-u_1)}{(u_1+u_3)(u_2+u_4) - 2(u_1u_3+u_2u_4)}.$$

Wir haben also

(12) $$f(u_1, u_2, u_3, u_4) = f[-1, 0, +1, F(u_1, u_2, u_3, u_4)],$$

wo mit F die rechte Seite von (11) bezeichnet wurde:

(13) $$F(u_1, u_2, u_3, u_4) \overset{\text{df}}{=} \frac{(u_4-u_2)(u_3-u_1)}{(u_1+u_3)(u_2+u_4) - 2(u_1u_3+u_2u_4)}.$$

Setzt man kurz

(14) $$\varphi(x) \overset{\text{df}}{=} f(-1, 0, +1, x),$$

so kann die Gleichung (12) in folgender Form umgeschrieben werden

(15) $$f(u_1, u_2, u_3, u_4) = \varphi[F(u_1, u_2, u_3, u_4)].$$

Bemerken wir, daß

(16) $$ac - b = \frac{2(u_2-u_1)(u_2-u_3)}{u_3 - u_1}$$

und folglich von Null verschieden ist. Um zum klassischen Resultat zu gelangen setzen wir

(17) $$\Phi(s) \overset{\text{df}}{=} \varphi\left(\frac{s+1}{2s}\right).$$

Die leichte Rechnung ergibt dann

(18) $$\frac{F+1}{2F} = \frac{(u_4-u_1)(u_3-u_2)}{(u_4-u_2)(u_3-u_1)} = \frac{u_4-u_1}{u_4-u_2} : \frac{u_3-u_1}{u_3-u_2}.$$

Mann erkennt gleich, daß die rechte Seite von (18) eben das Doppelverhältnis von vier Punkten mit den Koordinaten (u_1, u_2, u_3, u_4) darstellt

(19) $$\frac{F+1}{2F} = D(u_1, u_2, u_3, u_4).$$

Wir haben also

(20) $$I = f(u_1, u_2, u_3, u_4) = \Phi(D)$$

und folglich haben wir bewiesen, daß *die einzigen skalaren Invarianten von vier Punkten einer Geraden gegenüber der projektiven Transformationen die Funktionen des Doppelverhältnisses sind.*

II. Methode. Statt Spezialisierung der drei Veränderlichen auf der linken Seite der Gleichung (2) werden wir nun durch Spezialisierung der Parameter a, b, c schrittweise die erwünschte Formel gewinnen. Zunächst setzen wir

$$a = -x_1, \quad b = 1, \quad c = 0 \quad (\text{es ist hier } ac - b = -1 \neq 0).$$

Dies ergibt

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = g(x_2-x_1, x_3-x_1, x_4-x_1) \tag{21}$$

wo kurz

$$g(u_1, u_2, u_3) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(0, u_1, u_2, u_3) \tag{22}$$

gesetzt wurde. Durch Einsetzen von (21) in (2) erhält man für g die folgende Funktionalgleichung

$$g(x_2-x_1, x_3-x_1, x_4-x_1)$$
$$= g\left\{\frac{a+bx_2}{1+cx_2} - \frac{a+bx_1}{1+cx_1}, \frac{a+bx_3}{1+cx_3} - \frac{a+bx_1}{1+cx_1}, \frac{a+bx_4}{1+cx_4} - \frac{a+bx_1}{1+cx_1}\right\}.$$

Setzt man der Reihe nach

$$b = \frac{1}{x_2-x_1}, \quad c = 0 \quad \left(\text{es ist hier } ac-b = \frac{1}{x_1-x_2} \neq 0\right),$$

so erhält man daraus

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = g(x_2-x_1, x_3-x_1, x_4-x_1) = h\left(\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}, \frac{x_4-x_1}{x_2-x_1}\right), \tag{23}$$

wo kurz

$$h(u_1, u_2) \stackrel{\mathrm{df}}{=} g(1, u_1, u_2) \tag{24}$$

gesetzt wurde. Durch Einsetzen von (23) in (2) bekommt man

$$h\left[\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}, \frac{x_4-x_1}{x_2-x_1}\right] = h\left[\frac{1+cx_2}{1+cx_3}\cdot\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}, \frac{1+cx_2}{1+cx_4}\cdot\frac{x_4-x_1}{x_2-x_1}\right].$$

Jetzt setzen wir in die rechte Seite

$$c = \frac{(x_4-x_2)(x_2-x_1)-(x_3-x_2)(x_4-x_1)}{x_2(x_3-x_2)(x_4-x_1)-x_3(x_4-x_2)(x_2-x_1)}$$

ein. Dies ergibt

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = h\left(\frac{1}{D}, \frac{D}{2D-1}\right),$$

wo für D — wie früher — das Doppelverhältnis von (x_1, x_2, x_3, x_4) steht. Setzt man endlich

$$\Phi(u) \stackrel{\mathrm{df}}{=} h\left(\frac{1}{u}, \frac{u}{2u-1}\right),$$

so erhält man eben (20). Hiermit ist das Ziel unserer Note erreicht.

Bemerkung. Bei beiden Methoden haben wir durch gewisse Ausdrücke dividiert. Dies benötigt die zusätzliche Voraussetzung, daß diese Ausdrücke von Null verschieden sind. Diese Einschränkung (die entsprechenden Ausdrücke verschwinden für gewisse Quadrupel (u_1, u_2, u_3, u_4) bzw. (x_1, x_2, x_3, x_4) von Elementen u_i bzw. x_i, von denen jede zwei voneinander verschieden sind) lässt sich beseitigen indem man die Spezialisierung der Veränderlichen etwas modifiziert, z. B. statt (5) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = x$ nimmt.

Reçu par la Rédaction le 8. 6. 1959