ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)

Sur les solutions presque-périodiques d'une classe d'équations différentielles

par Z. Opial (Kraków)

Considérons le système d'équations différentielles

$$X' = f(t, X), \tag{0.1}$$

où X désigne le vecteur $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $f(t, X)$ est une fonction vectorielle $\big(f_1(t, x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(t, x_1, \ldots, x_n)\big)$ définie et continue dans l'ensemble $R\times D$, R désignant la droite réelle $-\infty < t < +\infty$ et D étant un ensemble ouvert de l'espace euclidien à n dimensions R^n.

Dans la présente note je me propose d'établir, sous certaines conditions imposées au second membre du système (0.1), qui vont être précisées dans la suite, une condition nécessaire et suffisante pour qu'une solution bornée $X(t)$ de ce système soit presque-périodique. De ce théorème général (théorème 1) il sera facile de déduire un critère (théorème 2) de presque-périodicité des solutions du système (0.1) établi récemment par G. H. Meisters [7], ainsi que quelques autres théorèmes de ce type. L'un d'eux (théorème 5) nous permettra ensuite de réduire certains problèmes d'existence des solutions presque-périodiques à des problèmes topologiques relatifs à certaines suites de transformations topologiques.

I. Notions et propositions préliminaires

1. Une fonction vectorielle $X(t) = \big(x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$, définie et continue sur toute la droite réelle R, est appelée *presque-périodique* si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre $l(\varepsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longuer $l(\varepsilon)$ contienne au moins une presque-période de $X(t)$, relative à ε, c'est-à-dire un nombre τ tel que l'on ait

$$|X(t+\tau)-X(t)| < \varepsilon \qquad (-\infty < t < +\infty),$$

où — comme d'habitude — $|X|$ désigne la longueur euclidienne du vecteur X. Il est immédiat que si la fonction vectorielle $X(t)$ est presque-périodique, il en est de même de chacune de ses composantes $x_1(t), \ldots, x_n(t)$, et inversement.

Nous dirons pareillement qu'une suite de vecteurs $\{X_k\} = \{(x_1^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ est *presque-périodique* si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre $l(\varepsilon)$, également positif, tel que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contienne au moins un nombre entier τ tel que l'on ait

$$|X_k - X_{k+\tau}| < \varepsilon \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Pour qu'une suite $\{X_k\}$ de vecteurs soit presque-périodique, il faut et il suffit que chacune des suites de nombres $\{x_i^{(k)}\}$ $(i = 1, \ldots, n)$ soit presque-périodique.

2. Dans toute la suite nous supposerons que la fonction vectorielle $f(t, X)$ satisfait à l'hypothèse suivante:

HYPOTHÈSE (M). Pour tout point $X_0 \epsilon D$ la fonction $f(t, X_0)$ est presque-périodique et pour tout ensemble compact $E \subset D$ la fonction $f(t, X)$ est uniformément continue dans l'ensemble $R \times E$.

On a la proposition suivante, facile à démontrer (cf. L. Amerio [1]):

PROPOSITION 1. *Si la fonction $f(t, X)$ satisfait à l'hypothèse* (M), *pour tout ensemble compact $E \subset D$ la restriction de $f(t, X)$ à l'ensemble $R \times E$ est une fonction presque-périodique uniformément par rapport à E, c'est-à-dire à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un $l(\varepsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contienne au moins un τ tel que*

$$|f(t+\tau, X) - f(t, X)| < \varepsilon,$$

quels que soient $X \epsilon E$ et $t \epsilon R$.

Une fonction numérique $f(t)$ d'une variable réelle t, définie et continue sur toute la droite R, est dite normale si de toute suite

$$f(t+h_1), f(t+h_2), f(t+h_3), \ldots,$$

où les h sont des nombres réels arbitraires, on peut extraire une autre suite

$$f(t+k_1), f(t+k_2), f(t+k_3), \ldots$$

qui converge uniformément dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ vers une fonction limite. D'après un théorème bien connu de Bochner, toute fonction presque-périodique $f(t)$ est normale et réciproquement. Il est immédiat que le même théorème est aussi valable pour des fonctions vectorielles $X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$.

En s'appuyant sur la proposition 1 et en répétant sans aucun changement essentiel la première partie de la démonstration de J. Favard du théorème cité de Bochner (cf. J. Favard [3] ou [4], Ch. III, n^os 6 et 7) on obtient la démonstration de la proposition suivante:

PROPOSITION 2. *Si la fonction $f(t, X)$ satisfait à l'hypothèse* (M), *pour tout ensemble compact $E \subset D$ la restriction de $f(t, X)$ à l'ensemble $R \times E$ est une fonction normale uniformément par rapport à E, c'est-à-dire de toute suite*

$$f(t+h_1, X), f(t+h_2, X), f(t+h_3, X), \ldots, \tag{1.1}$$

où les h sont des nombres réels arbitraires, on peut extraire une autre suite

$$f(t+k_1, X), f(t+k_2, X), f(t+k_3, X), \ldots \tag{1.2}$$

qui converge uniformément dans l'ensemble $R \times E$ vers une fonction limite.

3. Supposons, une fois pour toutes, que la fonction $f(t, X)$ satisfasse à l'hypothèse (M). Soit $h_1, h_2, h_3, \ldots$ une suite de nombres réels telle que la suite de fonctions $f(t+h_1, X), f(t+h_2, X), \ldots$ converge dans $R \times D$ vers une fonction limite $f^*(t, X)$, uniformément dans tout ensemble $R \times E$, où E est un sous-ensemble compact de l'ensemble D. La fonction limite $f^*(t, X)$ satisfait évidemment à l'hypothèse (M) et l'on peut, à côté de l'équation (0.1), envisager le système

$$X' = f^*(t, X). \tag{0.1*}$$

Nous désignerons par $\mathcal{H}$ l'ensemble de tous les systèmes (0.1*) obtenus de cette manière du système (0.1).

Soit $h_1, h_2, h_3, \ldots$ une suite arbitraire de nombres réels et $E_1, E_2, E_3, \ldots$ une suite de sous-ensembles compacts de l'ensemble D tels que

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \ldots \quad \text{et} \quad D = \sum_{i=1}^{n} E_i^0. [1]$$

En vertu de la proposition 2, de la suite de fonctions (1.1) on peut extraire une autre suite (1.2) qui converge uniformément dans l'ensemble $R \times E_1$ vers une fonction limite. De même, de la suite (1.2) on peut extraire une suite partielle qui converge uniformément dans l'ensemble $R \times E_2$; de cette dernière suite on peut de nouveau extraire une autre suite qui converge uniformément dans l'ensemble $R \times E_3$ et ainsi de suite. La suite diagonale convergera évidemment dans tout l'ensemble $R \times D$ vers une fonction limite $f^*(t, X)$ et cette convergence sera uniforme dans tout ensemble $R \times E$, E étant un sous-ensemble arbitraire compact de l'ensemble D. On peut donc énoncer la proposition suivante:

[1] Nous désignons par E_i^0 l'intérieur de l'ensemble E_i.

Proposition 3. *Si la fonction $f(t, X)$ satisfait dans l'ensemble $R\times D$ à l'hypothèse* (M), *de toute suite de fonctions* (1.1) *on peut extraire une suite qui converge dans cet ensemble vers une fonction limite $f^*(t, X)$, second membre d'un système de l'ensemble $\mathcal{H}$. Cette convergence est uniforme dans tout ensemble $R\times E$, quel que soit le sous-ensemble compact E de l'ensemble D.*

4. Hypothèse (K). Nous dirons que la fonction $f(t, X)$, définie et continue dans l'ensemble $R\times D$ et y vérifiant l'hypothèse (M), satisfait à l'hypothèse (K), si pour tout système d'équations (0.1^*) de l'ensemble $\mathcal{H}$ on a l'unicité des solutions, c'est-à-dire si pour tout point (t, X) de l'ensemble $R\times D$ chacun des systèmes de l'ensemble $\mathcal{H}$ admet une solution passant par ce point et une seule.

Il est facile de démontrer les deux propositions suivantes:

Proposition 4. *Si la fonction $f(t, X)$ satisfait dans l'ensemble $R\times D$ à l'hypothèse* (M) *et vérifie dans cet ensemble la condition de Lipschitz*

$$(1.3)\qquad |f(t, X_1)-f(t, X_2)|\leqslant A|X_1-X_2|,$$

où $A>0$, $X_1, X_2\epsilon D$ et $t\epsilon R$, la fonction $f(t, X)$ satisfait à l'hypothèse (K).

Proposition 5. *Si la fonction $f(t, X)$ satisfait dans l'ensemble $R\times D$ à l'hypothèse* (M) *et remplit dans cet ensemble la condition de Osgood*

$$(1.4)\qquad |f(t, X_1)-f(t, X_2)|\leqslant w(|X_1-X_2|),$$

où $w(u)$ est une fonction continue et positive pour $u>0$ et telle que

$$(1.5)\qquad \int_0^1\frac{du}{w(u)}=+\infty,$$

la fonction $f(t, X)$ satisfait à l'hypothèse (K).

La proposition 4 constituant un cas particulier de la proposition 5, il suffit de s'occuper de cette dernière. Or, on voit facilement que, pour tout système (0.1^*) de l'ensemble $\mathcal{H}$, son second membre $f^*(t, X)$ satisfait également à la condition (1.4). Mais, avec (1.5), c'est une condition suffisante de l'unicité des solutions d'un tel système, et, par suite, la proposition 5 se trouve ainsi démontrée.

5. Le problème se pose de savoir si l'unicité des solutions du système (0.1) n'entraîne pas forcément l'unicité des solutions de chacun des systèmes (0.1^*) appartenant à l'ensemble $\mathcal{H}$, ou, ce qui revient au même, si l'unicité des solutions d'au moins un système de l'ensemble $\mathcal{H}$ n'a pas pour conséquence l'unicité des solutions de tout autre système de cet ensemble. Il est facile de montrer qu'il n'en est rien, même dans le cas le plus simple où le système (0.1) se réduit à une seule équation différentielle scalaire.

En effet, considérons d'abord l'équation différentielle

$$(1.6)\qquad x'=g(t, x)$$

où la fonction $g(t, x)$ est définie dans tout le plan (t, x), continue, périodique par rapport à t de période π et telle que

(i) $g(t, x)=0$ pour $-\pi/2\leqslant t\leqslant 0$, $|x|<+\infty$ et $0\leqslant t\leqslant\pi/2$, $x\leqslant 0$;
(ii) $g(t, x)=2x\cdot\mathrm{ctg}\,t$ pour $0\leqslant t\leqslant\pi/2$ et $0\leqslant x\leqslant\sin^2 t$;
(iii) $g(t, x)=2\sin t\cos t$ pour $0\leqslant t\leqslant\pi/2$ et $\sin^2 t\leqslant x$.

De cette définition il résulte que $g(t, x)$ est une fonction de classe C^1 partout dans le plan P des variables t et x, sauf l'ensemble G composé d'une infinité dénombrable de points $(k\pi, 0)$, où $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$ Il est facile de vérifier que l'équation (1.6) admet une infinité de solutions passant par le point $(0, 0)$, qui sont toutes définies dans l'intervalle $\langle 0, \pi/2\rangle$ par la formule

$$x(t, C)=C\sin t^2 t\qquad (0\leqslant C\leqslant 1).$$

Il en est de même de tout autre point de l'ensemble G, tandis que par tout point de l'ensemble $P-G$ il passe une solution et une seule (localement) de l'équation (1.6).

A côté de l'équation (1.6) envisageons l'équation

$$(1.7)\qquad x'=g(t, x)+p(t),$$

où $p(t)$ est une fonction continue dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et négative en tout point de l'ensemble G. Il est facile de voir que dans cette hypothèse il y a unicité des solutions de l'équation (1.7). C'est évident pour tout point qui n'appartient pas à l'ensemble G et, quant aux points de cet ensemble, cela résulte du fait que, en vertu de la partie (i) de la définition de $g(t, x)$, toute solution de l'équation (1.7) passant par un point $(k\pi, 0)$ $(k=0, \pm1, \pm2, \ldots)$ doit satisfaire dans un voisinage suffisamment petit du point $k\pi$ à l'équation $x'=p(t)$.

Considérons enfin l'équation

$$(1.8)\qquad x'=g(t, x)+q(t),$$

où $q(t)$ est une fonction définie et continue dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, périodique de période 2 et telle que

$$(1.9)\qquad q(t)<0\qquad (0<t<2);$$

$$(1.10)\qquad q(t)=-\sin^3 t\qquad (0\leqslant t\leqslant\pi/2).$$

Il est facile de vérifier que sous ces hypothèses l'équation (1.8) admet deux solutions différentes passant par le point (0,0), définies dans l'intervalle $(0, \pi/2)$ respectivement par les formules

$$x_1(t) = \cos t \sin^2 t > 0, \qquad x_2(t) = -\int_0^t \sin^3 u\,du = -\tfrac{2}{3} + \cos t - \tfrac{1}{3}\cos^3 t < 0$$

ainsi qu'une infinité d'autres solutions $x(t)$ satisfaisant dans l'intervalle $(0, \pi/2)$ aux inégalités $x_2(t) \leqslant x(t) \leqslant x_1(t)$. En tout autre point de l'ensemble G il y a unicité des solutions de l'équation (1.8) car, en vertu de l'inégalité (1.9) et de l'irrationalité du nombre π, on a $q(k\pi) < 0$ quel que soit k entier.

Soit maintenant $k_1, k_2, k_3, \ldots$ une suite arbitraire de nombres entiers choisis de telle sorte que l'on ait, pour i tendant vers l'infini:

(1.11) $$k_i\pi \to 1 (\operatorname{mod} 2).$$

Cela étant, prenons la suite d'équations

(1.8_i) $$x' = g(t+k_i\pi, x) + q(t+k_i\pi) = g(t, x) + q(t+k_i).$$

En passant à la limite, pour i tendant vers l'infini, on en déduit, en vertu de (1.11), l'équation

(1.8^*) $$x' = g(t, x) + q(t+1).$$

Mais, il est aisé de voir, que la fonction $q(t+1)$ est négative en tout point $k\pi$, quel que soit k entier. Donc, d'après ce que nous avons dit à propos de l'équation (1.7), il y a unicité des solutions de l'équation (1.8^*), bien qu'il n'en soit pas de même de l'équation primitive (1.8).

6. Soit $f(t, X)$ une fonction satisfaisant dans l'ensemble $R\times D$ à l'hypothèse (M) et soit $\{X_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ une suite presque-périodique de vecteurs de l'espace E^n. Soit enfin E un sous-ensemble compact de l'ensemble D. D'après la proposition 2, la restriction de la fonction $f(t, X)$ à l'ensemble $R\times E$ est une fonction presque-périodique uniformément par rapport à E, ce qui veut dire que l'ensemble des presque-périodes, relatives à tout nombre ε positif, communes à toutes les fonctions $f(t, X_0)$ $(X_0 \epsilon E)$, est dense sur la droite R. De là et de la démonstration du théorème que la somme de deux fonctions presque-périodiques est également presque-périodique on déduit facilement la proposition suivante dont la démonstration détaillée a été donnée par G. H. Meisters dans la note citée plus haut ([7], Lemma 2).

PROPOSITION 6. *Si la fonction $f(t, X)$ satisfait dans l'ensemble $R\times D$ à l'hypothèse* (M) *et $\{X_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ est une suite presque-périodique de points de l'espace E^n, pour tout sous-ensemble compact E de l'ensemble D et tout ε positif il existe un $l(\varepsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contienne au moins un nombre entier τ tel que*

(1.12) $$|f(t+\tau, X) - f(t, X)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |X_{k+\tau} - X_k| < \varepsilon$$

quels que soient $X \epsilon E$, k entier et $t \epsilon R$.

Dans le cas particulier où l'on prend une suite, manifestement presque-périodique, de vecteurs qui sont tous égaux à un vecteur donné on déduit immédiatement de la proposition 6 les deux propositions suivantes:

PROPOSITION 7 ([2]). *Si la fonction vectorielle $X(t)$ est presque-périodique, à tout ε positif on peut faire correspondre un $l(\varepsilon)$ positif tel que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contienne au moins un nombre entier τ tel que*

$$|X(t+\tau) - X(t)| < \varepsilon,$$

quel que soit $t \epsilon R$.

PROPOSITION 8. *Si la fonction $f(t, X)$ satisfait dans l'ensemble $R\times D$ à l'hypothèse* (M), *pour tout sous-ensemble compact E de D et tout $\varepsilon > 0$ il existe un $l(\varepsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contienne au moins un nombre entier τ tel que*

$$|f(t+\tau, X) - f(t, X)| < \varepsilon,$$

quels que soient $X \epsilon E$ et $t \epsilon R$.

II. Critères de presque-periodicité des solutions du système (0.1)

1. A l'aide des notions et propositions auxiliaires exposées dans le paragraphe précédent il est facile d'énoncer et de démontrer un critère général de presque-périodicité d'une solution du système d'équations différentielles (0.1). On a notamment le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Supposons que la fonction vectorielle $f(t, X)$ satisfasse dans l'ensemble $R\times D$ aux hypothèses* (M) *et* (K). *Soit $X(t)$ une solution du système* (0.1), *définie sur toute la droite R et dont la trajectoire $X = X(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ est contenue dans un sous-ensemble compact E de l'ensemble D. Dans ces conditions, pour que la solution $X(t)$ soit une fonction presque-périodique, il faut et il suffit que la suite de vecteurs $X_k = X(k)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ soit presque-périodique.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire, ce qui résulte immédiatement de la proposition 7. Il nous reste donc à démontrer qu'elle est suffisante. Admettons donc que la suite $X_k = X(k)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ soit presque-périodique et que l'on ait

(2.1) $$X(t) \epsilon E,$$

([2]) Voir aussi A. S. Besicovitch [2], p. 54.

quel que soit $t \in R$. En vertu de la proposition 6, à tout ε positif on peut faire correspondre un $l(\varepsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$ contienne au moins un nombre entier τ tel que l'on ait les inégalités (1.12), quels que soient $X \in E$, k entier et $t \in R$. Nous allons montrer qu'à tout η positif on peut faire correspondre un ε également positif de telle sorte que l'on ait

$$|X(t+\tau)-X(t)| < \eta,$$

pour tout nombre entier τ pour lequel on a les inégalités (1.12). Il en résultera que la fonction $X(t)$ est presque-périodique. Pour la démonstration par l'absurde, supposons le contraire. Il existe alors un η_0 positif, deux suites de nombres entiers $\{k_p\}$, $\{\tau_p\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ et une suite $\{s_p\}$ de nombres contenus dans l'intervalle $\langle 0, 1)$ telles que

$$(2.2)\qquad |X(k_p+\tau_p+s_p)-X(k_p+s_p)| \geqslant \eta_0 \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

bien que l'on ait, pour tout $X \in E$ et tout $t \in R$, les inégalités

$$(2.3)\qquad |f(t+\tau_p, X)-f(t, X)| < 1/p \quad \text{et} \quad |X(k_p+\tau_p)-X(k_p)| < 1/p \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

Introduisons deux suites de fonctions en posant

$$Y_p(t) = X(k_p+t) \quad \text{et} \quad Z_p(t) = X(k_p+\tau_p+t).$$

On a alors, en vertu des inégalités (2.2) et (2.3)

$$(2.4)\qquad |Y_p(s_p)-Z_p(s_p)| \geqslant \eta_0 \quad (0 \leqslant s_p < 1,\ p = 1, 2, \ldots)$$

et

$$(2.5)\qquad |Y_p(0)-Z_p(0)| < 1/p \quad (p = 1, 2, \ldots).$$

D'autre part, en raison de la relation (2.1), on a évidemment

$$(2.6)\qquad Y_p(t) \in E, \quad Z_p(t) \in E \quad (-\infty < t < +\infty,\ p = 1, 2, \ldots).$$

Les fonctions $Y_p(t), Z_p(t)$ satisfont aux équations intégrales suivantes

$$(2.7)\qquad \begin{aligned} Y_p(t) &= Y_p(0)+\int_0^t f\big(k_p+u,\ Y_p(u)\big)\,du, \\ Z_p(t) &= Z_p(0)+\int_0^t f\big(k_p+\tau_p+u,\ Z_p(u)\big)\,du. \end{aligned}$$

De l'hypothèse (M) et des relations (2.6) il résulte que les fonctions sous les signes d'intégration sont bornées sur toute la droite R par une constante indépendante de p, ce qui signifie que les fonctions $Y_p(t)$ et $Z_p(t)$ sont équicontinues dans le même ensemble. Donc, des suites $\{Y_p(t)\}$, $\{Z_p(t)\}$ on peut extraire des suites qui convergent uniformément dans tout ensemble compact. Pour ne pas compliquer les notations, admettons que ce soient les suites $\{Y_p(t)\}$, $\{Z_p(t)\}$ elles-mêmes qui possèdent cette propriété. On a par conséquent

$$(2.8)\qquad \lim_{p\to+\infty} Y_p(t) = Y(t), \quad \lim_{p\to+\infty} Z_p(t) = Z(t),$$

uniformément dans tout ensemble compact, donc, en particulier, dans l'intervalle $\langle 0, 1\rangle$.

D'après la proposition 3, de la suite de fonctions $\{f(t+k_p, X)\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ on peut extraire une suite partielle qui converge dans l'ensemble $R\times D$ vers une fonction limite $f^*(t, X)$, la convergence étant uniforme dans l'ensemble $R\times E$. Pour ne pas compliquer les notations, supposons que ce soit la suite envisagée elle-même qui est convergente. De la première des inégalités (2.3) il résulte que la suite $\{f(t+k_p+\tau_p, X)\}$ converge dans l'ensemble $R\times E$ vers la fonction $f^*(t, X)$ et que cette convergence est uniforme.

En vertu de l'hypothèse (M) et des relations (2.6), les suites $\{f(k_p+t, Y_p(t))\}$, $\{f(k_p+\tau_p+t, Z_p(t))\}$ convergeront respectivement vers $f^*(t, Y(t))$ et $f^*(t, Z(t))$, uniformément dans tout ensemble compact de la droite R. En passant à la limite dans les relations (2.7), on en obtient pour les fonctions limites $Y(t)$ et $Z(t)$ les équations intégrales suivantes

$$Y(t) = Y(0)+\int_0^t f^*\big(u,\ Y(u)\big)\,du, \qquad Z(t) = Z(0)+\int_0^t f^*\big(u, Z(u)\big)\,du.$$

Mais, en raison des inégalités (2.5), on a évidemment $Y(0) = Z(0)$. Cela signifie que les fonctions $Y(t)$ et $Z(t)$ sont solutions du système (0.1*), passant par le même point $\big(0, Y(0)\big) = \big(0, Z(0)\big)$; en vertu de l'hypothèse (K), il en résulte que l'on a $Y(t) \equiv Z(t)$ sur toute la droite R, ce qui est incompatible avec les inégalités (2.4).

Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

2. C'est seulement dans la dernière partie de la démonstration du théorème 1 que nous avons utilisé l'hypothèse (K) de l'unicité des solutions de tout système (0.1*) appartenant à l'ensemble $\mathfrak{H}$, hypothèse qui a mené à une contradiction avec les inégalités (2.4). Il est facile de voir que l'on obtiendrait la même contradiction si l'on savait seulement que $Y(t) = Z(t)$ pour tout $t \geqslant 0$. Autrement dit, dans l'énoncé de l'hypothèse (K) on pourrait remplacer la condition de l'unicité des solutions de tout système (0.1*) appartenant à $\mathfrak{H}$ par celle de l'unicité à droite des solutions des systèmes envisagés. En changeant en peu la première partie de la démonstration (notamment en écrivant dans les inégalités (2.2) $(k_p+1)-(1-s_p)$ au lieu de k_p+s_p etc.) on pourrait, de même substituer à l'hypothèse de l'unicité à droite celle de l'unicité à gauche.

3. Dans le cas où la fonction $f(t, X)$ satisfait à la condition de Lipschitz (1.3), de la proposition 5 et du théorème précédent on déduit le théorème de G. H. Meisters.

THÉORÈME 2. *Supposons que la fonction $f(t, X)$ satisfasse dans l'ensemble $R\times D$ à l'hypothèse* (M) *et à la condition* (1.3). *Soit $X(t)$ une solution du système* (0.1), *définie dans tout l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$ *et telle que la fermeture de la trajectoire $X = X(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ soit contenue dans l'ensemble D. Dans ces conditions, pour que la solution $X(t)$ soit une fonction presque-périodique, il faut et il suffit que la suite de vecteurs $X_k = X(k)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ soit presque-périodique.*

Afin de pouvoir appliquer le théorème 1, il reste à montrer que la fermeture de la trajectoire $X = X(t)$ est un ensemble compact ou, ce qui revient au même, que la solution $X(t)$ est bornée sur toute la droite R. Or, cette propriété de la solution $X(t)$ a été démontrée par G. M. Meisters dans la note citée [7].

4. Dans le cas où la fonction $f(t, X)$ satisfait à la condition de Osgood (1.4), la proposition 5 nous permet de déduire du théorème 1 le théorème suivant:

THÉORÈME 3. *Supposons que la fonction $f(t, X)$ satisfasse dans l'ensemble $R\times D$ à l'hypothèse* (M) *et à la condition* (1.4) *où la fonction positive $w(u)$ vérifie la relation* (1.5). *Soit $X(t)$ une solution du système* (0.1), *définie dans tout l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$ *et dont la trajectoire est contenue dans un sous-ensnemble compact E de l'ensemble D. Dans ces conditions, pour que la solution $X(t)$ soit une fonction presque-périodique, il faut et il suffit que la suite $X_k = X(k)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ soit presque-périodique.*

III. Compléments des théorèmes précédents

1. Soit $f(t)$ une fonction presque-périodique. On sait que la donnée des valeurs de cette fonction dans un intervalle $(a, +\infty)$, a étant un nombre fini arbitraire, nous permet de déterminer cette fonction dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Il suffit de remarquer à cet effet que l'on a uniformément dans tout cet intervalle

$$f(t) = \lim_{k\to+\infty} f(t+\tau_k),$$

où $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ est une suite arbitraire de presque-périodes de la fonction $f(t)$, relatives à $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, respectivement et telles que $\lim\limits_{k\to+\infty} \tau_k = +\infty$. Autrement dit, pour une fonction presque-périodique, la seule connaissance de sa restriction à n'importe quel intervalle infini suffit pour déterminer la fonction elle-même, et, par conséquent, en déduire toutes ses propriétés. Mais on doit savoir à l'avance que la fonction donnée, définie sur un intervalle infini, est une restriction à cet intervalle d'une fonction presque-périodique, ou, ce qui revient au même, qu'elle admet un prolongement presque-périodique sur tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Cela nous mène automatiquement au problème de savoir quelles sont les conditions auxquelles doit satisfaire une fonction définie et continue sur un intervalle infini, pour qu'elle admette un tel prolongement. Nous allons montrer que la solution de ce problème est bien simple.

Par analogie avec ce que nous venons de dire à propos des fonctions presque-périodiques on peut poser un pareil problème pour les solutions presque-périodiques d'un système d'équations différentielles (0.1): quelles sont les conditions sous lesquelles une solution $X(t)$ de ce système, définie dans un intervalle infini, se laisse prolonger sur tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ en une solution presque-périodique du même système? Dans le n° 4 du présent paragraphe nous allons montrer comment la solution de ce problème s'obtient de celle du problème précédent.

2. Pour fixer les idées, nous nous bornerons aux considérations relatives à l'intervalle $(0, +\infty)$, mais il sera évident que des considérations analogues s'appliquent aussi dans le cas d'un intervalle infini quelconque.

Nous dirons qu'une fonction vectorielle $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$ définie et continue dans l'intervalle $(0, +\infty)$, est *presque-périodique* dans l'intervalle $(0, +\infty)$, si à tout ε positif on peut faire correspondre un $l(\varepsilon) > 0$ tel que tout intervalle de longueur $l(\varepsilon)$, contenu dans l'intervalle $(0, +\infty)$, contienne au moins un nombre τ tel que

$$|f(t+\tau)-f(t)| \leqslant \varepsilon,$$

quel que soit t positif.

A l'aide de cette définition il est facile de formuler, sous forme de la proposition suivante, la réponse à la question posée dans le n° précédent.

PROPOSITION 9. *Pour qu'une fonction vectorielle $f(t)$, définie et continue dans l'intervalle* $(0, +\infty)$, *admette un prolongement presque-périodique sur tout l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$, *il faut et il suffit qu'elle soit presque-périodique dans l'intervalle* $(0, +\infty)$.

Cette proposition résulte de la théorie de M. Fréchet des fonctions asymptotiquement presque-périodiques (cf. [5]). Il est aussi facile d'en donner une démonstration directe([3]).

La condition est manifestement nécessaire, il reste donc à démontrer qu'elle est aussi suffisante. Il suffit évidemment de démontrer que chacune des composantes $f_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$ de la fonction vectorielle $f(t)$ admet un prolongement presque-périodique; c'est pourquoi nous pouvons admettre sans restriction de la généralité que $f(t)$ est une fonction numérique.

([3]) Je dois cette démonstration à M. Cz. Olech.

Supposons donc que la fonction numérique $f(t)$ soit presque-périodique dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et choisissons de façon arbitraire une suite $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ des presque-périodes relatives à $2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \ldots$ respectivement. Posons $s_n = \tau_1 + \ldots + \tau_n$. On voit aussitôt (critère de Cauchy) que, lorsque n tend vers l'infini, la suite des fonctions $\{f(t+s_n)\}$ tend (uniformément dans tout intervalle $(a, +\infty)$, quel que soit a) vers une fonction

$$f^*(t) = \lim_{n\to\infty} f(t+s_n), \tag{3.1}$$

définie dans tout l'intervale $(-\infty, +\infty)$. Pour tout t et toute presque-période $\tau > 0$ de la fonction $f(t)$, relative à ε, on a

$$\begin{aligned} |f^*(t+\tau)-f^*(t)| &\leqslant \limsup_{n\to\infty}\big(|f^*(t+\tau)-f(t+\tau+s_n)|+|f^*(t)-f(t+s_n)|+ \\ &+|f(t+s_n)-f(t+s_n+\tau)|\big) = \limsup_{n\to\infty}|f(t+s_n)-f(t+s_n+\tau)|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Cela signifie que τ est une presque-période de la fonction $f^*(t)$, relative à ε. En remplaçant dans (3.2) t par $t-\tau$ on voit qu'il en est de même du nombre $-\tau$. Il en résulte que la fonction $f^*(t)$ est presque-périodique. Cela étant on peut, en vertu du théorème de Bochner, extraire de la suite $\{f^*(t-s_n^*)\}$ une suite qui converge, uniformément dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, vers une .onction presque-périodique $\bar{f}(t)$. Or, d'après la relation (3.1), on a nécessairement $\bar{f}(t) = f(t)$, quel que soit t positif.

La proposition 9 se trouve ainsi démontrée.

Remarquons que le prolongement, dont nous venons de démontrer l'existence, est déterminé d'une manière univoque, ce qui résulte immédiatement de la propriété des fonctions presque-périodiques rappelée au début du n° précédent.

3. Un résultat analogue à la proposition 9 est aussi vrai pour des suites presque-périodiques. Convenons de dire qu'une suite $\{X_k\}$ $(k = 0, +1, +2, \ldots)$ est presque-périodique si à tout ε positif on peut faire correspondre un $l(\varepsilon)$ tel que tout sous-intervalle de l'intervalle $(0, +\infty)$ de longueur $l(\varepsilon)$, contienne au moins un nombre entier τ tel que

$$|X_{k+\tau}-X_k| < \varepsilon \quad (k = 0, +1, +2, \ldots).$$

Proposition 10. *Pour qu'une suite de vecteurs $\{X_k\}$ $(k = 0, +1, \ldots)$ de l'espace R^n admette un prolongement en une suite presque-périodique $\{\bar{X}_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \bar{X}_k = X_k$ pour $k = 0, +1, +2, \ldots)$, il faut et il suffit que la suite $\{X_k\}$ $(k = 0, +1, \ldots)$ soit presque-périodique.*

La condition est manifestement nécessaire. Pour démontrer qu'elle est aussi suffisante, il suffit de se borner aux suites numériques. Admettons donc que la suite de nombres $\{a_k\}$ $(k = 0, +1, \ldots)$ soit presque-périodique. En posant dans tout intervalle $\langle k, k+1\rangle$ $(k = 0, +1, \ldots)$

$$f(t) = a_k + (t-a_k)(a_{k+1}-a_k),$$

on obtient, comme il est facile de vérifier (cf. aussi J. Seynsche [8]) une fonction presque-périodique dans l'intervalle $(0, +\infty)$. Désignons par $\bar{f}(t)$ son prolongement presque-périodique sur tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et posons

$$\bar{a}_k = \bar{f}(k) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

En vertu de la proposition 7, les nombres $\bar{a}_k$ ainsi définis forment une suite presque-périodique, qui constitue manifestement un prolongement de la suite donnée.

4. Revenons à l'étude du système d'équations différentielles (0.1), dont le second membre satisfait à l'hypothèse (M) dans un ensemble $R\times D$. Supposons que ce système ait une solution $X(t)$, définie et presque-périodique dans l'intervalle $(0, +\infty)$, et telle que la demi-trajectoire $X = X(t)$ $(0 \leqslant t < +\infty)$ soit contenue dans un sous-ensemble compact E de l'ensemble D. D'après la proposition 9, la fonction $X(t)$ admet un prolongement presque-périodique $\bar{X}(t)$ sur tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. On a évidemment $\bar{X}(t)\in E$, quel que soit t. Nous allons montrer que $\bar{X}(t)$ est, elle aussi, une solution du système (0.1).

En effet, soit $\{\tau_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ une suite arbitraire de presque-périodes de la fonction $\bar{X}(t)$, relatives respectivement à $1/k$, et telles que l'on ait

$$\lim_{k\to+\infty} \tau_k = +\infty. \tag{3.3}$$

On a alors

$$\bar{X}(t) = \lim_{k\to+\infty} \bar{X}(t+\tau_k) \tag{3.4}$$

uniformément dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. D'après la proposition 3, de la suite $\{f(t+\tau_k, X)\}$ on peut extraire une suite partielle $\{f(t+\tau_k', X)\}$ qui converge dans l'ensemble $R\times D$ vers une fonction $f^*(t, X)$, uniformément dans l'ensemble $R\times E$. D'autre part, en vertu de l'hypothèse que $\bar{X}(t)$ est, pour $t \geqslant 0$, une solution du système (0.1) et de la relation (3.3), pour tout $c < 0$ fixe, on a

$$\bar{X}(t+c+\tau_k') = \bar{X}(c+\tau_k') + \int_0^t f\big(s+c+\tau_k', \bar{X}(s+c+\tau_k')\big)\,ds \quad (t \geqslant 0), \tag{3.5}$$

pourvu que k soit suffisamment grand. En passant à la limite dans la relation (3.5), pour k tendant vers l'infini, on en tire, tenant compte de (3.4)

$$\overline{X}(t+c) = \overline{X}(c)+\int_0^t f^*\big(s+c,\,\overline{X}(s+c)\big)\,ds \qquad (t \geqslant 0),$$

ce qui signifie que dans l'intervalle $(c, +\infty)$ la fonction $\overline{X}(t)$ est une solution du système

$$(0.1^*) \qquad X' = f^*(t, X).$$

Le nombre c étant arbitraire, on en conclut que $\overline{X}(t)$ est une solution du système (0.1^*) dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, c'est-à-dire

$$(3.6) \qquad \overline{X}(t) = \overline{X}(0)+\int_0^t f^*\big(s,\,\overline{X}(s)\big)\,ds \qquad (-\infty < t < +\infty).$$

Mais les suites de fonctions $\{\overline{X}(t-\tau_k')\}$, $\{f^*(t-\tau_k', X)\}$ convergent, pour k tendant vers l'infini, respectivement vers $\overline{X}(t)$ et $f(t, X)$. Donc, en écrivant l'égalité (3.6) sous la forme

$$\overline{X}(t-\tau_k') = \overline{X}(-\tau_k')+\int_0^t f^*\big(s-\tau_k',\,\overline{X}(s-\tau_k')\big)\,ds$$

et en passant à la limite, on en tire

$$\overline{X}(t) = \overline{X}(0)+\int_0^t f\big(s,\,\overline{X}(s)\big)\,ds \qquad (-\infty < t < +\infty)$$

ce qui veut dire que la fonction $\overline{X}(t)$ est une solution du système (0.1) dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Nous avons donc démontré le théorème suivant:

Théorème 4. *Supposons que la fonction $f(t, X)$ satisfasse dans un ensemble $R\times D$ à l'hypothèse* (M). *Soit $X(t)$ une solution du système* (0.1) *définie et presque-périodique dans l'intervalle $(0, +\infty)$, et telle que la demi-trajectoire $X = X(t)$ $(t \geqslant 0)$ soit contenue dans un sous-ensemble compact de l'ensemble D. Dans ces conditions le prolongement presque-périodique $\overline{X}(t)$ de la fonction $X(t)$ sur tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ est une solution presque-périodique du système* (0.1).

5. Les propositions auxiliaires du présent paragraphe et le théorème 4 nous permettent d'énoncer le théorème 1 sous une forme plus simple.

Théorème 5. *Supposons que la fonction $f(t, X)$ satisfasse dans l'ensemble $R\times D$ aux hypothèses* (M) *et* (K). *Soit $X(t)$ une solution du système* (0.1), *définie dans l'intervalle $(0, +\infty)$ et telle que la demi-trajectoire $X = X(t)$ $(t \geqslant 0)$ soit contenue dans un sous-ensemble compact E de l'ensemble D. Dans ces conditions, pour que $X(t)$ soit la restriction à l'intervalle $(0, +\infty)$ d'une solution presque-périodique $X(t)$ du système* (0.1), *il faut et il suffit que la suite de vecteurs $X_k = X(k)$ $(k = 0, +1, +2, \ldots)$ soit presque-périodique.*

Démonstration. La condition étant évidemment nécessaire, il nous reste à démontrer qu'elle est suffisante, ce qui est bien simple. En effet, en reprenant sans aucun changement les raisonnements de la démonstration du théorème 1, on démontre que la solution $X(t)$ est une fonction presque-périodique dans l'intervalle $(0, +\infty)$. De là et du théorème 4 il s'ensuit que son prolongement presque-périodique sur tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ est une solution presque-périodique du système envisagé.

Il va sans dire que l'on pourrait aussi modifier de même les énoncés des théorèmes 2 et 3.

Les théorèmes 4 et 5 nous permettent de remplacer la recherche des solutions presque-périodiques d'un système d'équations différentielles par celle des solutions presque-périodiques dans l'intervalle $(0, +\infty)$, ou dans n'importe quel intervalle infini. En d'autres termes, dans l'étude des solutions presque-périodiques d'un système d'équations différentielles on peut toujours se borner à l'intervalle $(0, +\infty)$.

6. Dans les énonces des théorèmes 1, 3, 4 et 5 intervient l'hypothèse que la trajectoire (respectivement la demi-trajectoire positive) de la solution envisagée est contenue dans un sous-ensemble compact de l'ensemble ouvert D. Il n'est pas difficile de voir que sans elle, par exemple, le théorème 3 cesse d'être vrai. Cela tient au fait qu'une fonction presque-périodique peut atteindre sa borne inférieure ou supérieure en un seul point, comme le montre l'exemple de la fonction

$$\varphi(t) = \cos t+\cos\sqrt{2}\,t,$$

qui est partout inférieure à 2, sauf au point 0 où elle est égale à 2. Donc, si l'on envisage l'équation différentielle

$$x' = -\sin t-\sqrt{2}\sin\sqrt{2}\,t,$$

en se bornant à l'ensemble: $-\infty < t < +\infty$, $-2 < x < 2$, on voit immédiatement qu'elle admet une solution presque-périodique dans l'intervalle $(1, +\infty)$, à savoir la fonction $\varphi(t)$, dont le prolongement presque-périodique sur tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ n'est plus solution de cette équation.

Cet exemple nous montre de quel type sont les difficultés qui peuvent se présenter si l'on omet l'hypothèse que la solution envisagée est contenue dans un sous-ensemble compact de l'ensemble D. Il est cependant facile de caractériser les systèmes d'équations différentielles (0.1) à second membre presque-périodique, pour lesquels la solution $X(t)$ est contenue dans un sous-ensemble compact de D toutes les fois que la suite de vecteurs $X_k = X(k)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ possède cette propriété.

Hypothèse (L). Convenons de dire que la fonction vectorielle $f(t, X)$, définie dans un ensemble $R\times D$ et y satisfaisant à l'hypothèse (M), vérifie l'hypothèse (L) si pour tout système (0.1*) appartenant à l'ensemble $\mathcal{H}$ toutes ces solutions sont définies dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ tout entier.

Nous allons montrer que si la fonction $f(t, X)$ satisfait dans un ensemble $R\times D$ à l'hypothèse (L), aucune solution du système (0,1) ne peut s'approcher trop vite de la frontière de l'ensemble D, ce qui peut être exprimé sous forme du théorème suivant:

Théorème 6. *Supposons que la fonction vectorielle $f(t, X)$ satisfasse dans un ensemble $R\times D$ aux hypothèses* (M) *et* (L). *Soit $\{E_k\}$ une suite de sous-ensemble compacts de l'ensemble D tels que*

$$(3.7)\qquad E_k \subset E_{k+1}, \quad D = \sum_{k=1}^{\infty} E_k^0 \quad \text{et} \quad d(E_k, D-E_{k+1}) > 0,$$

où $d(A, B)$ désigne la distance des ensembles A et B.

Ceci étant admis, pour tout nombre entier positif k et tout nombre positif T, il existe un nombre entier l tel que, quels que soient c et la solution $X(t)$ du système (0.1) *tels que $X(c)\in E_k$, on ait forcément*

$$X(t) \in E_l \qquad (c \leqslant t \leqslant c+T).$$

Démonstration. Pour la démonstration par l'absurde supposons le contraire. Il existe alors un indice k_0, un nombre positif T_0, deux suites de points $\{t_p\}$, $\{t_p'\}$ et une suite $\{X_p(t)\}$ de solutions du système (0.1) tels que

$$(3.8)\qquad X_p(t_p) \in E_{k_0}, \quad X_p(t_p') \in D-E_p, \quad t_p < t_p' \leqslant t_p+T_0 \quad (p = k_0+1, \ldots).$$

Pour tout couple p, q de nombres entiers supérieurs à k_0, désignons par (t_p, t_p+d_{pq}) le plus grand voisinage à droite du point t_p dans lequel $X_p(t)\in E_q$. Dans chacun des ensembles $R\times E_k$ la fonction $f(t, X)$ est bornée, donc, pour tout q fixe, la borne inférieure des nombres d_{pq} est positive. Posons

$$d_q = \liminf_{p\to+\infty} d_{pq} \qquad (q = k_0+1, \ldots).$$

De la remarque précédente il s'ensuit que l'on a $d_q > 0$ et, en vertu de la première des relations (3.7)

$$d_q \leqslant d_{q+1} \qquad (q = k_0+1, \ldots).$$

Sans restreindre la généralité nous pouvons admettre que

$$(3.9)\qquad \lim_{p\to+\infty} d_{pq} = d_q \qquad (q = k_0+1, \ldots)$$

sinon, on pourrait remplacer la suite $\{X_p(t)\}$ par une suite partielle choisie de telle sorte que l'on ait (3.9). Des relations (3.8) il résulte immédiatement que pour tout $q > k_0$

$$(3.10)\qquad d_q < \lim_{q\to+\infty} d_q = d \leqslant T_0;$$

d'autre part, quel que soit $p > k_0$, on a

$$(3.11)\qquad X_p(t+t_p) = X_p(t_p) + \int_0^t f\big(s+t_p, X_p(s+t_p)\big)\,ds.$$

D'après la proposition 3, de la suite $\{f(t+t_k, X)\}$ on peut extraire une sous-suite qui converge dans tout l'ensemble $R\times D$ vers une fonction limite $f^*(t, X)$, uniformément dans chacun des ensembles $R\times E_k$. Pour ne pas compliquer les notations, supposons que ce soit la suite $\{f(t+t_k, X)\}$ elle-même qui possède cette propriété. De la définition des nombres d_q, de l'hypothèse (M) et des égalités (3.11) il résulte que dans chacun des intervalles $\langle 0, d_q-1/2\rangle$ $(q = k_0+1, \ldots)$ les fonctions $X_p(t+t_p)$ sont équicontinues et bornées dans leur ensemble. Donc, en remplaçant, s'il y a lieu, la suite $\{X_p(t+t_p)\}$ par une suite partielle convenablement choisie, on peut admettre que dans tout l'intervalle $\langle 0, d)$ la suite $\{X(t+t_p)\}$ converge vers une fonction limite $\overline{X}(t)$. Par un passage à la limite, de (3.11) on tire

$$\overline{X}(t) = \overline{X}(0) + \int_0^t f^*\big(s, X(s)\big)\,ds \qquad (0 \leqslant t < d).$$

D'autre part, en vertu de la définition des nombres d_q, on doit avoir

$$(3.12)\qquad \overline{X}(d_q) \in E_q\overline{(D-E_q)}$$

ce qui signifie que la suite de points $\{X(d_q)\}$ ne peut avoir de points d'accumulation que sur la frontière de l'ensemble D. Mais, des relations (3.10) et de l'hypothèse (L) il résulte que la fonction $X(t)$ est aussi définie au point d de sorte que l'on doit avoir

$$\lim_{q\to+\infty} \overline{X}(d_q) = \overline{X}(d),$$

ce qui est en contradiction avec les relations (3.12).

7. Dans le cas où l'ensemble D est identique à tout l'espace R^n, du théorème 6 on déduit immédiatement le corollaire suivant:

Corollaire 1. *Si la fonction vectorielle $f(t, X)$ est définie dans tout l'espace $R\times E^n$ et y satisfait aux hypothèses* (M) *et* (L), *à tout couple* (N, T) *de nombres positifs on peut faire correspondre un $L > 0$ tel que, quels que soient $c\in R$ et solution $X(t)$ du système* (0.1) *satisfaisant à l'inégalité*

$$|X(c)| \leqslant N, \tag{3.13}$$

on ait l'inégalité

$$|X(t)| \leqslant L \quad (c \leqslant t \leqslant c+T). \tag{3.14}$$

8. Supposons que la fonction $f(t, X)$ satisfasse dans un ensemble $R\times D$ aux hypothèses (M), (L), et soit $X(t)$ une solution du système (0.1), définie — par hypothèse — dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Si la trajectoire $X = X(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ est contenue dans un sous-ensemble compact E de l'ensemble D, il en est évidemment de même de la suite de points $X_k = X(k)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Inversement, si cette suite est contenue dans un sous-ensemble compact E de l'ensemble D, on peut construire à partir de $E_l = E$ une suite d'ensembles compacts satisfaisant aux conditions (3.7) et appliquer ensuite à cette suite et $T = l$ le théorème 6 d'où il résulte que la trajectoire $X = X(t)$ est contenue, elle aussi, dans un sous-ensemble compact de l'ensemble D. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Théorème 7. *Si la fonction vectorielle $f(t, X)$ satisfait dans un ensemble $R\times D$ aux hypothèses* (M) *et* (L), *alors, pour que la trajectoire $X = X(t)$ $(-\infty < t < +\infty)$ d'une solution du système* (0.1) *soit contenue dans un sous-ensemble compact de l'ensemble D, il faut et il suffit qu'il en soit de même de la suite de points $X_k = X(k)$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.*

IV. Quelques problèmes topologiques

1. Supposons pour l'instant que le second membre du système (0.1) soit une fonction périodique par rapport à t, de période l. On connaît le rôle que jouent dans les problèmes d'existence des solutions périodiques d'un tel système les théorèmes topologiques sur l'existence des points invariants des transformations topologiques.

Pour simplifier, admettons que l'ensemble D soit identique à l'espace E^n tout entier et que toute solution du système (0.1) soit définie dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. En admettant de plus l'hypothèse de l'unicité des solutions de ce système, désignant par $S(t; X)$ la solution qui, pour $t = 0$, passe par le point $X\in E^n$ et posant

$$Y = S(l; X), \tag{4.1}$$

on obtient une transformation topologique qui transforme tout l'espace E^n en un sous-ensemble de celui-ci. Pour que le système (0.1) admette une solution périodique de période l, il faut et il suffit que la transformation (4.1) admette au moins un point invariant, c'est-à-dire qu'il existe un $X_0\in E^n$ tel que

$$X_0 = S(l; X_0).$$

2. Revenons maintenant au cas où le second membre du système (0.1) est presque-périodique. Le théorème 5 nous permettra de réduire certains problèmes d'existence des solutions presque-périodiques d'un tel système à des problèmes topologiques analogues au problème d'existence des points invariants d'une transformation topologique du type (4.1). Nous allons d'abord formuler ces problèmes tout à fait indépendamment de la théorie des équations différentielles et ce n'est qu'alors que nous montrerons leurs liaisons avec cette théorie. Nous nous bornerons à les énoncer dans certains cas particulièrement simples, sous quelques hypothèses supplémentaires non essentielles, de sorte que leurs extensions aux cas plus généraux seront évidentes.

Convenons de dire qu'une suite de transformations topologiques $\{U_k(X)\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ de l'espace E^n en lui-même est presque-périodique si à tout ε positif et tout ensemble compact E on peut faire correspondre un nombre $l(\varepsilon, E)$ tel que tout sous-intervalle de l'intervalle $(0, +\infty)$ de longueur $l(\varepsilon, E)$ contienne au moins un nombre entier τ tel que

$$|U_{k+\tau}(X) - U_k(X)| < \varepsilon, \tag{4.2}$$

quels que soient $X\in E$ et k entier positif.

En partant d'une suite de transformations $\{U_k(X)\}$ nous pouvons envisager la suite de transformations itérées $\{T_k(X)\}$, définies par les formules

$$T_k(X) = U_{k-1}(X)\ldots U_1(X)\,U_0(X) \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4.3}$$

et par la convention $T_0(X) = X$.

Désignons par B la boule unité $|X| \leqslant 1$ de l'espace E^n et par $U_k^{-1}(X)$, $T_k^{-1}(X)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ les transformations inverses de $U_k(X)$ et $T_k(X)$ respectivement.

Problème 1. *Soit $\{U_k(X)\}$ une suite presque-périodique de transformations topologiques de l'espace E^n telles que*

$$U_k(B) \subset B \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.4}$$

Existe-t-il au moins un point X_0 appartenant à B tel que la suite de points $\{T_k(X_0)\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ soit presque-périodique?

Remarquons que si, pour tout coupte de nombres entiers positifs k et l, $U_k(X) = U_l(X)$, la solution du problème 1 est affirmative, car de la relation (4.4) et du théorème bien connu de Brouwer il résulte l'existence d'au moins un point invariant X_0, commun à tous les $U_k(X)$, donc tel que

$$X_0 = T_0(X_0) = T_1(X_0) = T_2(X_0) = \ldots$$

Problème 2. *Soit $\{U_k(X)\}$ une suite presque-périodique de transformations topologiques de l'espace R^n telles que*

$$U_k(B) \supset B \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{4.5}$$

Existe-t-il au moins un point X_0 pour lequel la suite de points $\{T_k(X_0)\}$ soit contenue dans la boule B et presque-périodique?

Dans le cas où la suite $\{U_k(X)\}$ est composée de transformations identiques entre elles, le problème 2 est également résolu par le théorème de Brouwer, appliqué cette fois non pas à la transformation $U_0(X)$, mais à $U_0^{-1}(X)$. Il est à remarquer que, pour une suite quelconque de transformations topologiques, des relations (4.5) résulte l'existence d'au moins un point X_0 pour lequel la suite $\{T_k(X_0)\}$ est contenue dans la boule B. Cela résulte du théorème bien connu que l'intersection

$$C = \prod_{k=0}^{\infty} T_k^{-1}(B)$$

d'une suite d'ensembles fermés et tels que $T_{k+1}^{-1}(B) \subset T_k^{-1}(B)$ ne peut être vide.

3. Dans le cas d'une solution négative des problèmes précédents il ne serait pas dépourvu d'intérêt pour la théorie des systèmes d'équations différentielles d'étudier les problèmes suivants, qui en diffèrent par quelques hypothèses supplémentaires et qui, par conséquent, admettraient une solution affirmative s'il en était de même pour les problèmes 1 et 2.

Problème 3. *Soit $\{U_k(X)\}$ une suite presque-périodique de transformations topologiques de l'espace R^n dans lui-même telles que l'on ait les relations* (4.3) *et que pour tout couple de points X_1, X_2 de la boule B*

$$\lim_{k\to+\infty} |T_k(X_1) - T_k(X_2)| = 0. \tag{4.6}$$

Dans ces conditions, existe-t-il dans la boule B au moins un point X_0 pour lequel la suite de points $\{T_k(X_0)\}$ soit presque-périodique?

Notons que sous les hypothèses du problème 3 il existe au plus un point X_0 pour lequel la suite $\{T_k(X_0)\}$ est presque-périodique, car pour deux suites presque-périodiques $\{T_k(X_0)\}$ et $\{T_k(X_0')\}$ l'égalité

$$\lim_{k\to+\infty} |T_k(X_0) - T_k(X_0')| = 0$$

n'est possible que lorsque ces suites sont identiques.

Problème 4. *Soit $\{U_k(X)\}$ une suite presque-périodique de transformations topologiques de l'espace R^n en lui-même telles que l'on ait les relations* (4.5) *et qu'il existe un point et un seul X_0 pour lequel*

$$T_k(X_0) \in B \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Dans ces conditions, la suite $\{T_k(X_0)\}$ est-elle nécessairement presque-périodique?

4. Envisageons enfin le cas où R^n est un plan ou une droite.

Problème 5. *Soit $\{U_k(X)\}$ une suite presque-périodique de transformations topologiques de l'espace R^2 en lui-même, préservant l'orientation. Supposons qu'il existe un point X_0 pour lequel la suite $\{T_k(X_0)\}$ est bornée. Dans ces conditions, existe-t-il au moins un point $\overline{X}_0$ tel que la suite $\{T_k(\overline{X}_0)\}$ soit presque-périodique?*

Si toutes les transformations de la suite envisagée sont identiques à une transformation $U(X)$, on a

$$T_k(X) = U^k(X) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \tag{4.7}$$

et la solution du problème 5 est affirmative, ce qui résulte d'un théorème de Brouwer sur les translations généralisées dans l'espace R^2 (cf. J. Massera [6]).

Enfin, pour $n = 1$, posons le problème suivant, qui semble beaucoup plus simple que le précédent.

Problème 6. *Soit $\{U_k(X)\}$ une suite presque-périodique de transformations topologiques de la droite R en elle-même, préservant l'ordre et telles qu'il existe un point X_0 pour lequel la suite $T_k(X_0)$ est bornée. Existe-t-il alors au moins un point $\overline{X}_0$ tel que la suite $\{T_k(\overline{X}_0)\}$ soit presque-périodique?*

Dans le cas où l'on a les égalités (4.7), la solution affirmative au problème 6 s'obtient par une légère modification d'un raisonnement de J. Massera ([6], Th. 1).

5. Revenons maintenant au système d'équations différentielles (0.1). Supposons, pour simplifier, que la fonction vectorielle $f(t, X)$ soit définie dans tout l'espace à $n+1$ dimensions $R \times R^n$ et qu'elle y satisfasse aux hypothèses (M), (K) et (L). Cela étant, par tout point (t_0, X) de l'espace $R \times R^n$ il passe une solution et une seule du système (0.1), et cette solution est définie dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Désignons-la par $S(t; t_0, X)$

et introduisons la suite $\{U_k(X)\}$ de transformations topologiques de l'espace R^n en lui-même, définies par les formules

$$(4.8)\qquad Y = U_k(X) \equiv Y = S(k+1; k, X) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Il s'ensuit que, pour la suite de transformations ainsi définies, les transformations $T_k(X)$ peuvent être définies ou bien par les relations (4.3), ou bien par des formules équivalentes

$$(4.9)\qquad Y = T_k(X), \quad Y = S(k; 0, X) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Notons que dans le cas particulier où la fonction $f(t, X)$ est périodique par rapport à t, de période 1, toutes les transformations de la suite (4.8) sont identiques à la transformation $U(X) = U_0(X)$, et , par conséquent, les transformations $T_k(X)$ s'obtiennent toutes à l'aide de la formule (4.7).

Il est facile de démontrer que sous les hypothèses que nous avons imposées à la fonction $f(t, X)$, la suite de transformations (4.8) est presque-périodique dans le sens de la définition donnée au n° 2 du présent paragraphe. Il suffit à cet effet de montrer qu'à tout ε positif et tout $N > 0$ on peut faire correspondre un $l(\varepsilon, N) > 0$ tel que tout intervalle contenu dans l'intervalle $(0, +\infty)$ de longueur $l(\varepsilon, N)$ contienne au moins un nombre entier τ tel que

$$(4.10)\qquad |S(k+1+\tau; k+\tau, X) - S(k+1; k, X)| < \varepsilon,$$

pour tout $|X| \leqslant N$ et tout nombre entier non négatif k.

D'après le corollaire 1, il existe un nombre $L > 0$ tel que, pour tout k entier $\geqslant 0$ et tout $|X| \leqslant N$, on a l'inégalité

$$(4.11)\qquad |S(k+t; k, X)| \leqslant L \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

En vertu de l'hypothèse (M) et de la proposition 8, à tout nombre η positif on peut faire correspondre un nombre $l(\eta)$ tel que tout intervalle de longueur $l(\eta)$ contienne au moins un nombre entier τ tel que

$$(4.12)\qquad |f(t+\tau, X) - f(t, X)| < \eta,$$

quels que soient $t \in R$ et $|X| \leqslant L$. Nous allons montrer qu'à tout ε positif on peut faire correspondre un η, également positif, de telle sorte que pour tout nombre entier positif τ, l'inégalité (4.12) ait pour conséquence l'inégalité (4.10). Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe alors un ε_0 positif, deux suites de nombres entiers non négatifs $\{\tau_p\}$ et $\{k_p\}$ $(p = 1, 2, \ldots)$ et une suite $\{X_p\}$ de points de la boule $|X| \leqslant N$ tels que

$$(4.13)\qquad |S(k_p+\tau_p+1; k_p+\tau_p, X_p) - S(k_p+1; k_p, X_p)| \geqslant \varepsilon_0 \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

bien que l'on ait

$$(4.14)\qquad |f(t+\tau_p, X) - f(t, X)| < 1/p \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

quels que soient $t \in R$ et $|X| \leqslant L$.

De la définition de $S(t; t_0, X)$ il vient

$$(4.15)\qquad \begin{aligned} &S(k_p+\tau_p+t; k_p+\tau_p, X_p) \\ &\quad = X_p + \int_0^t f\big(k_p+\tau_p+s, S(k_p+\tau_p+s; k_p+\tau_p, X_p)\big)\,ds, \\ &S(k_p+t; k_p, X_p) = X_p + \int_0^t f\big(k_p+s, S(k_p+s; k_p, X_p)\big)\,ds, \end{aligned}$$

et, en vertu de (4.11)

$$(4.16)\qquad |S(k_p+\tau_p+t; k_p+\tau_p, X_p)| \leqslant L, \quad |S(k_p+t; k_p, X_p)| \leqslant L \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

En remplaçant, s'il y a lieu, la suite de points $\{X_p\}$ par une suite partielle, nous pouvons admettre que la suite $\{X_p\}$ converge vers un point X_0 de la boule $|X| \leqslant N$. En extrayant de la suite de fonctions $\{f(t+k_p, X)\}$ une suite convergente vers une fonction $f^*(t, X)$ (cf. proposition 3), en profitant des inégalités (4.14) et (4.16), de la même façon que dans la démonstration du théorème 1 en passant à la limite dans les égalités (4.15), nous obtenons deux solutions du système d'équations différentielles

$$X' = f^*(t, X).$$

Elles passent, toutes les deux, par le point $(0, X_0)$ et, en vertu des inégalités (4.13), admettent pour $t = 1$ des valeurs différentes, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse (K).

Nous avons donc démontré le théorème suivant:

THÉORÈME 8. *Si la fonction vectorielle $f(t, X)$ est définie dans tout l'espace $R \times R^n$ et y satisfait aux hypothèses* (M), (K) *et* (L), *la suite de transformations topologiques $\{U_k(X)\}$, définies par les formules* (4.8), *est presque-périodique.*

6. Grâce au théorème 8 il est maintenant facile de ramener certains problèmes d'existence de solutions presque-périodiques d'un système d'équations différentielles à second membre presque-périodique aux problèmes topologiques formulés aux n^{os} 2, 3 et 4 du présent paragraphe. Chacun de ces problèmes d'existence des solutions presque-périodiques correspondra à un problème d'existence des solutions périodiques d'un système (0.1) à second membre périodique, déjà résolu par l'affirmative par les théorèmes de Brouwer sur l'existence des points invariants des transformations topologiques.

Supposons une fois pour toutes que la fonction vectorielle $f(t, X)$ soit définie dans tout l'espace $R\times R^n$ et y satisfasse aux hypothèses (M), (K) et (L).

1. Admettons de plus que, pour tout point X de la boule unité B et tout $t_0 \geqslant 0$, on ait $S(t; t_0, X)\epsilon B$, quel que soit $t \geqslant t_0$, ou, autrement dit, que pour $t \geqslant 0$ aucune solution du système (0.1) ne puisse quitter l'ensemble B. Il est d'ailleurs facile de démontrer qu'il en est de même dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, puisque la fonction $f(t, X)$ satisfait à l'hypothèse (M). Dans ce cas la suite de transformations $\{U_k(X)\}$, définies par les formules (4.8), est presque-périodique et vérifie les relations (4.4). Supposons pour l'instant que le problème 1 admette une solution affirmative. Cela voudrait dire, en raison des formules (4.9), qu'il existe un point $X_0 \epsilon B$ pour lequel la suite $\{S(k; 0, X_0)\}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ est presque-périodique. En vertu du théorème 5, il en résulterait que la fonction $S(t; 0, X_0)$ est une solution presque-périodique du système (0.1). On aurait donc un théorème d'existence des solutions presque-périodiques analogue au théorème bien connu d'existence d'une solution périodique d'un système d'équations différentielles à second membre périodique dans le cas où les transformations $U_0(X) = U_1(X) = U_2(X) = \ldots$ satisfont à la relation (4.4).

2. Supposons que, pour tout point X appartenant à B et tout $t_0 \geqslant 0$, on ait $S(t; t_0, X)\epsilon B$, quel que soit $t \epsilon (0, t_0)$, ce qui signifie que pour $t \geqslant 0$ aucune solution du système (0.1) ne puisse pénétrer dans la boule B. Dans ces conditions la suite de transformations topologiques (4.8) est presque-périodiques et vérifie les relations (4.5). Donc, si la solution du problème topologique 2 était positive, on pourrait en conclure, de même que dans le cas précédent, que le système d'équations différentielles (0.1) admet au moins une solution presque-périodique, contenue dans la boule B. On aurait alors un théorème analogue à un théorème bien connu sur l'existence d'une solution périodique d'un système d'équations différentielles à second membre périodique.

3. Mais il peut arriver que les solutions des problèmes 1 et 2 soient négatives et, par conséquent, les théorèmes correspondants sur l'existence des solutions presque-périodiques du système (0.1) pourraient être faux. Dans ce cas on pourrait espérer obtenir des théorèmes vrais en ajoutant aux hypothèses déjà admises d'autres hypothèses supplémentaires. Ainsi, par exemple, si la solution du problème 4 était positive, de l'hypothèse que le système (0.1) satisfait aux conditions formulées sous 2 et n'admet qu'une solution $X(t)$ contenue dans la boule B, il résulterait que $X(t)$ est une fonction presque-périodique. Rappelons qu'il en est bien ainsi si la fonction $f(t, X)$ satisfait à l'hypothèse (M) et si chacun des systèmes (0.1*) de l'ensemble $\mathcal{H}$ n'admet qu'une seule solution contenue dans la boule B (cf. L. Amerio [1]).

4. Une solution affirmative du problème 5 conduirait au théorème suivant: *si, pour un système de deux équations différentielles*

$$x_1' = f_1(t, x_1, x_2), \qquad x_2' = f_2(t, x_1, x_2), \tag{4.17}$$

défini dans tout l'espace $R\times R^2$, *la fonction vectorielle* $f(t, X) = \big(f_1(t, x_1, x_2), f_2(t, x_1, x_2)\big)$ *vérifie les hypothèses* (M), (K) *et* (L) *et si le système* (4.17) *admet une solution bornée dans l'intervalle* $(0, +\infty)$, *il existe au moins une solution presque-périodique de ce système.*

Ce théorème constituerait une extension aux systèmes presque-périodiques (4.17) d'un théorème de J. Massera (cf. [6], Th. 2), relatif à l'existence d'une solution périodique du système (4.17) à second membre périodique.

5. Enfin, si le problème 6 admettait une solution positive, on pourrait en conclure que si la fonction $f(t, x)$, définie dans tout l'espace $R\times R$, satisfait aux hypothèses (M), (K) et (L) et si l'équation différentielle

$$x' = f(t, x) \tag{4.18}$$

admet une solution bornée dans l'intervalle $(0, +\infty)$, il existe au moins une solution presque-périodique de cette équation, ce qui donnerait de nouveau une extension aux équations (4.18) presque-périodiques d'un théorème connu pour les équations à second membre périodique (cf. J. Massera [5], Th. 1).

Travaux cités

[1] L. Amerio, *Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati*, Ann. Mat. Pura ed Appl. 39 (1955), p. 97-119.

[2] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, New York 1954.

[3] J. Favard, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques*, Acta Math. 55 (1928), p. 31-81.

[4] — *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*, Paris 1933.

[5] M. Fréchet, *Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques continues*, C. R. Acad. Sci. Paris 213 (1941), p. 520-521.

[6] J. Massera, *On the periodic solutions of differential systems*, Duke Math. Journal 17 (1950), p. 457-475.

[7] G. H. Meisters, *On almost periodic solutions of a class of differential equations*, Proc. Am. Math. Soc. 10 (1959), p. 113-119.

[8] I. Seynsche, *Zur theorie der fastperiodischen Zahlfolgen*, Rend. Circ. Mat. Palermo 55 (1931), p. 395-421.

Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1959