where $PR_i = \dfrac{x\sin(\pi i/n)}{\sin(\gamma+\pi i/n)}$ (fig. 1). Hence

$$u_i(x,0,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_i}^{\pi} \frac{z\,d\gamma}{\left[\dfrac{x^2\sin^2(\pi i/n)}{\sin^2[\gamma+\pi(i+1)/n]}+z^2\right]^{1/2}} - $$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\varphi_{i+1}}^{\pi} \frac{z\,d\gamma}{\left[\dfrac{x^2\sin^2(\pi i/n)}{\sin^2(\gamma+\pi(i+1)/n)}+z^2\right]^{1/2}}$$

so that we have $u_i(\varrho x, 0, \varrho z) = u_i(x,0,z)$ for $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Similarly $u_i(\varrho x, 0, \varrho z) = u_i(x, 0, z)$ for $i = n, n+1, \ldots, 2n-1$, q. e. d.

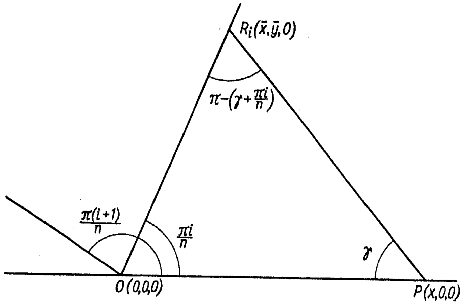


Fig. 1

## References

[1] M. Krzyżański, *O rozwiązaniu zagadnienia Dirichleta w półprzestrzeni*, Zesz. Nauk. U. J., Mat-Fiz-Chem 3 (1957), p. 41-46.

[2] M. Tsuji, *On the limits of indetermination of bounded harmonic functions*, Jap. Journ. Math. 15 (1938), p. 19-26.

*Reçu par la Rédaction le 19. 5. 1959*

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)

# Sur un théorème de C. E. Langenhop et G. Seifert

par Z. Opial (Kraków)

**1.** Considérons l'équation différentielle non-linéaire du second ordre

$$x''+f(x)x'+g(x) = p(t), \tag{1}$$

équivalente, comme on le sait, au système de deux équations différentielles du premier ordre

$$x' = y-F(x), \quad y' = -g(x)+p(t), \tag{2}$$

où $F(0) = 0$ et $F'(x) = f(x)$.

Désignons par $\lambda_0$ la racine (unique) de l'équation transcendante

$$\ln\lambda = (\pi+2\operatorname{arcctg}\sqrt{4\lambda-1})/\sqrt{4\lambda-1}. \tag{3}$$

Il est facile de vérifier que c'est un nombre positif un peu plus grand que 3.

Relativement aux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, définies et continues dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, admettons l'hypothèse suivante:

Hypothèse (M). Il existe deux nombres finis $a$ et $b$ $(a<b)$ tels que dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ la fonction $g(x)$ soit de classe $C^1$, strictement croissante, et

$$f(x)\geqslant m>0, \quad 0\leqslant g'(x)\leqslant l<\lambda_0 m^2 \quad (a\leqslant x\leqslant b). \tag{4}$$

Supposons de plus que $p(t)$ soit une fonction continue dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Evidemment, à toute solution $x(t)$ de l'équation (1) correspond une solution $\big(x(t), y(t)\big)$ du système (2) avec $y(t) = x'(t)+F\big(x(t)\big)$. Désignons par $P$ la bande du plan $(x, y)$ déterminée par les inégalités $a\leqslant x\leqslant b$, $|y|<+\infty$. Convenons de dire qu'une solution $x(t)$ de l'équation (1) ou, ce qui revient au même, que la solution correspondante $\big(x(t), y(t)\big)$ du système (2) est *$P$-bornée* dans un intervalle $(t_1, t_2)$, si $a\leqslant x(t)\leqslant b$ quel que soit $t\in(t_1, t_2)$.

Dans la présente note je me propose d'établir d'abord deux théorèmes généraux sur l'unicité et la stabilité des solutions de l'équation (1), $P$-bornées dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, et d'en déduire ensuite quelques théorèmes d'existence et de stabilité des solutions presque-périodiques de l'équation envisagée, en généralisant ainsi un théorème de C. E. Langenhop et G. Seifert [5].

**2.** LEMME. *Si la fonction $p(t)$ est bornée dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, pour toute solution $x(t)$ de l'équation (1), P-bornée dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, il existe un nombre positif $A$ tel que*

$$|x'(t)| \leqslant A, \quad |y(t)| \doteq |x'(t)+F(x(t))| \leqslant A \tag{5}$$

*quel que soit $t$.*

En effet, l'équation (1) étant linéaire en $x'$, de l'inégalité $a \leqslant x(t) \leqslant b$, supposée satisfaite dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, il résulte que la dérivée $x'(t)$ est également bornée dans le même intervalle (cf. p. ex. Z. Opial [11]). Dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ la fonction $F(x)$ est évidemment bornée. Donc, pour un nombre $A$ suffisamment grand les inégalités (5) sont vérifiées.

**3.** THÉORÈME 1. *Si les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfont à l'hypothèse (M), l'équation (1) ne peut admettre plus d'une solution P-bornée dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.*

Démonstration. Remarquons d'abord que, sans restreindre la généralité, on peut admettre $m=1$ puisque le cas général s'y ramène lorsque l'on introduit la nouvelle variable indépendante $s = mt$ en remplaçant en même temps les fonctions $f(x)$, $g(x)$ et $p(t)$ respectivement par $f(x)/m$, $g(x)/m^2$ et $p(s/m)/m^2$.

Il suffit évidemment de démontrer que le système (2) ne peut admettre plus d'une solution $P$-bornée dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Pour la démonstration par l'absurde supposons le contraire et désignons par $(x_1(t), y_1(t))$, $(x_2(t), y_2(t))$ deux solutions du système (2) pour lesquelles

$$a \leqslant x_1(t) \leqslant b, \quad a \leqslant x_2(t) \leqslant b \quad (-\infty < t < +\infty). \tag{6}$$

Posons pour tout $t$:

$$u(t) = x_2(t) - x_1(t) \quad \text{et} \quad v(t) = y_2(t) - y_1(t).$$

Les fonctions $u(t)$ et $v(t)$ satisfont au système d'équations différentielles linéaires

$$u' = v - a(t)u, \quad v' = -b(t)u, \tag{7}$$

où

$$a(t) = \big(F(x_2(t)) - F(x_1(t))\big)/\big(x_2(t) - x_1(t)\big),$$

$$b(t) = \big(g(x_2(t)) - g(x_1(t))\big)/\big(x_2(t) - x_1(t)\big),$$



si $x_1(t) \neq x_2(t)$, et $a(t) = f(x_1(t))$, $b(t) = g'(x_1(t))$, si $x_1(t) = x_2(t)$. Les fonctions $u(t)$ et $b(t)$ sont continues dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ et elles y satisfont, en raison des inégalités (4) (où nous admettons $m=1$) et (6), aux inégalités

$$1 < a(t) \leqslant L, \quad 0 \leqslant b(t) \leqslant l < \lambda_0 \quad (-\infty < t < +\infty), \tag{8}$$

où $L$ est égale à la borne supérieure de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$. Notons enfin une circonstance importante, à savoir qu'en vertu de l'hypothèse que la fonction $g(x)$ est strictement croissante la fonction $b(t)$ ne peut s'annuler que si $x_1(t) = x_2(t)$. Autrement dit, le coefficient $b(t)$ peut s'annuler seulement dans le cas où $u(t) = 0$.

Pour obtenir une contradiction avec l'hypothèse (6), il suffit évidemment de prouver que $\limsup_{t\to-\infty} u(t) = +\infty$. Nous allons esquisser la démonstration de ce fait.

Envisageons à cet effet le système auxiliaire d'équations différentielles

$$u' = v - u, \quad v' = -\lambda_0 u \tag{9}$$

et désignons par $T$ la trajectoire de ce système qui passe par le point $P(1, 1)$. En se servant de l'équation (3) on peut facilement vérifier que la courbe $T$ coupe le demi-axe négatif des $v$ au point $Q(0, -1)$. Désignons par $T_0$ la partie de $T$ comprise entre les points $P$ et $Q$. Soit enfin $S$ le segment $(0 \leqslant u \leqslant 1,\ v = 1)$. Cela étant, désignons par $C$ la courbe fermée, composée de $S$, $T_0$ et des arcs symétriques de $S$ et $T_0$ par rapport à l'origine.

Toute demi-droite issue de l'origine coupe la courbe $C$ en un point et un seul. On peut donc construire une fonction $G(u, v)$ homogène de degré 1, égale à 1 sur la courbe $C$. En comparant les systèmes (7), (9) et en tenant compte des inégalités (8) il est facile de voir que la fonction $h(t) = G(u(t), v(t))$ est décroissante au sens strict dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Il en résulte l'existence des limites $\lim_{t\to+\infty} h(t)$, $\lim_{t\to-\infty} h(t)$. On montre sans peine que

$$\lim_{t\to+\infty} h(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to-\infty} h(t) = +\infty. \tag{10}$$

La première de ces relations signifie que l'on a

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \lim_{t\to+\infty} v(t) = 0. \tag{11}$$

En vertu des inégalités (6), on a

$$|u(t)| = |x_2(t) - x_1(t)| \leqslant |a| + |b|. \tag{12}$$

Donc, d'après la seconde des relations (10) et la définition de la fonction $G(u, v)$, on a $\lim_{t\to-\infty} v(t) = +\infty$, ou bien $\lim_{t\to-\infty} v(t) = -\infty$. Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait $\lim_{t\to-\infty} v(t) = +\infty$. On a alors, en raison de (7), (8) et (12):

$$\lim_{t\to-\infty} u'(t) = \lim_{t\to-\infty} \big(v(t) - a(t)u(t)\big) = \lim_{t\to-\infty} v(t) = +\infty,$$

ce qui est en contradiction avec l'inégalité (12).

Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

**4.** Supposons maintenant que les solutions $\big(x_1(t), y_1(t)\big)$, $\big(x_2(t), y_2(t)\big)$ du système (2) soient $P$-bornées non pas dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, mais seulement dans un intervalle $(c, +\infty)$. Dans ce cas, en se bornant à cet intervalle, on peut répéter la démonstration du théorème 1 et obtenir ainsi les relations (11). Mais, ces relations étant vérifiées, on a

$$\lim_{t\to+\infty} \big(x_1'(t) - x_2'(t)\big) = \lim_{t\to+\infty} \big(y_1(t) - y_2(t)\big) - \lim_{t\to+\infty} \Big(F\big(x_1(t)\big) - F\big(x_2(t)\big)\Big) = 0.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Supposons que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfassent à l'hypothèse* (M). *Soient $x_1(t)$ et $x_2(t)$ deux solutions de l'équation* (1), *$P$-bornées dans un intervalle* $(c, +\infty)$. *On a alors*

$$\lim_{t\to+\infty} \big(x_1'(t) - x_2'(t)\big) = \lim_{t\to+\infty} \big(x_1(t) - x_2(t)\big) = 0.$$

**5.** Convenons de dire qu'un ensemble compact $K$ du plan $(x, y)$ dont la frontière est une courbe simple fermée, est une borne relative du système (2), si pour tout $c$ et toute solution $\big(x(t), y(t)\big)$ de ce système telle que $\big(x(c), y(c)\big) \in K$, on a aussi $\big(x(t), y(t)\big) \in K$ quel que soit $t \geqslant c$. Il est immédiat que si l'ensemble $K$ est une borne relative du système (2), il existe au moins une solution de ce système pour laquelle $\big(x(t), y(t)\big) \in K$ quel que soit $t$. Si, de plus, la fonction $p(t)$ est supposée périodique de période $\omega$, une simple application du théorème bien connu de Brouwer sur l'existence d'un point invariant des transformations topologiques, prouve l'existence d'au moins une solution périodique de ce système ayant la même période $\omega$.

Le passage du cas où la fonction $p(t)$ est supposée périodique à celui où l'on admet qu'elle est presque-périodique n'est pas simple. Dans les théorèmes connus sur l'existence des solutions presque-périodiques du système envisagé on impose toujours aux fonctions $f(x)$ et $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ certaines inégalités supplémentaires plus ou moins restrictives (cf. p. ex. G. E. H. Reuter [12], A. Halanay [4], Z. Opial [10]). Récemment C. E. Langenhop et G. Seifert [5] ont établi un nouveau théorème de ce type que l'on peut énoncer comme il suit:



*Si l'ensemble $K \subset P$ est une borne relative du système* (2), *si la fonction $p(t)$ est presque-périodique et si les fonctions $f(x)$, $g(x)$ satisfont aux inégalités*

$$f(x) \geqslant m > 0, \qquad 0 < g'(x) \leqslant l < m^2 \qquad (a \leqslant x \leqslant b,\ x \neq 0),$$

*le système* (2) *admet une solution presque-périodique $\big(x(t), y(t)\big)$ et une seule telle que $\big(x(t), y(t)\big) \in K$ quel que soit $t$. Cette solution est asymptotiquement stable par rapport à l'ensemble $K$ en ce sens que, pour tout $c$ et toute solution $\big(x_1(t), y_1(t)\big)$ du système* (2) *telle que $\big(x_1(c), y_1(c)\big) \in K$, on a nécessairement*

$$\lim_{t\to+\infty} \big(x_1(t) - x(t)\big) = \lim_{t\to+\infty} \big(y_1(t) - y(t)\big) = 0. \tag{13}$$

C. E. Langenhop et G. Seifert ont en même temps démontré que sous certaines hypothèses la construction effective d'une borne relative du système (2) est bien possible (cf. le théorème 4 ci-dessous).

Il est facile de voir que les théorèmes 1 et 2 nous permettront de généraliser d'une certaine manière le théorème cité de C. E. Langenhop et G. Seifert.

**6.** THÉORÈME 3. *Supposons que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfassent à l'hypothèse* (M). *Si la fonction $p(t)$ est presque-périodique et le système* (2) *admet une solution $\big(x(t), y(t)\big)$ $P$-bornée dans tout l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$, *les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont presque-périodiques. Par conséquent, si l'équation* (1) *admet une solution $x(t)$ $P$-bornée dans tout l'intervalle* $(-\infty, +\infty)$, *la fonction $x(t)$ est presque-périodique et il en est de même de ses dérivées $x'(t)$, $x''(t)$.*

D é m o n s t r a t i o n. La fonction $p(t)$ étant presque-périodique est à plus forte raison bornée dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. Il en résulte, en vertu du lemme, que la fonction $y(t)$ est elle aussi bornée $-|y(t)| \leqslant A$. Cela étant, il est immédiat que chacun des systèmes

$$x' = y - F(x), \qquad y' = -g(x) + p^*(t) \tag{$2^*$}$$

qui s'obtient du système (2) en y remplaçant la fonction $p(t)$ par une limite uniforme (dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$) d'une suite $\{p(t+h_n)\}$ des translatées de la fonction $p(t)$, admet au moins une solution $\big(x^*(t), y^*(t)\big)$ contenue entièrement dans l'ensemble $a \leqslant x \leqslant b$, $|y| \leqslant A$, donc, à plus forte raison, $P$-bornée dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. En vertu du théorème 1, cette solution est unique, quel que soit le système ($2^*$). Donc, il suffit d'appliquer le théorème de L. Amerio [1] (cf. aussi [5]) pour en conclure que la solution $\big(x(t), y(t)\big)$ du système (2) est presque-périodique.

De la formule $x'(t) = y(t) - F\big(x(t)\big)$ on déduit que la fonction $x'(t)$ est aussi presque-périodique. Enfin, la dérivée seconde $x''(t)$ est presque-périodique, en tant que somme de telles fonctions.

Remarque 1. En vertu du théorème 1, l'équation (1) ne peut admettre plus d'une solution presque-périodique $P$-bornée dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$. D'autre part, le théorème 2 nous dit que cette solution presque-périodique est asymptotiquement stable par rapport à la bande $P$ en ce sens que, pour toute solution $x_1(t)$ de l'équation (1), $P$-bornée dans un intervalle $(c, +\infty)$, on doit avoir

$$(14)\qquad \lim_{t\to+\infty}\big(x_1(t)-x(t)\big) = \lim_{t\to+\infty}\big(x_1'(t)-x'(t)\big) = 0.$$

Remarque 2. Soit $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ une suite arbitraire de presque-périodes de la fonction $p(t)$, relatives à $1, 1/2, 1/3, \ldots$ respectivement. Des inégalités

$$(15)\qquad |p(t+\tau_n)-p(t)| \leqslant 1/n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

il résulte que la suite des fonctions $\{p(t+\tau_n)\}$ converge uniformément dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ vers la fonction $p(t)$. La suite des couples de fonctions $\{(x(t+\tau_n), y(t+\tau_n))\}$, dont chacun est une solution du système correspondant

$$x' = y-F(x), \qquad y' = -g(x)+p(t+\tau_n)$$

tend dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ vers $(x(t), y(t))$. Par un raisonnement déjà classique, dû à J. Favard, on démontre que cette convergence est uniforme (cf. J. Favard [2] ou [3], Ch. III, ou L. Amerio [1]).

Bien plus, $\{h_n\}$ étant une suite arbitraire de nombres réels tels que la suite $\{p(t+h_n)\}$ converge uniformément dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ vers une fonction $p^*(t)$, la suite $\{(x(t+h_n), y(t+h_n))\}$ tend uniformément dans tout cet intervalle vers la solution $(x^*(t), y^*(t))$ du système limite $(2^*)$. Il en résulte, en particulier, qu'à tout $\varepsilon$ positif on peut faire correspondre un $\delta$, également positif, tel que toute presque-période de la fonction $p(t)$ relativement à $\delta$ soit en même temps une presque-période des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ relativement à $\varepsilon$ (cf. Z. Opial [9]). En effet, supposons le contraire. Il existe alors deux suites de nombres $\{t_n\}$ et $\{\tau_n\}$ et un $\varepsilon_0$ positif tels que

$$(16)\qquad |x(t_n+\tau_n)-x(t_n)|+|y(t_n+\tau_n)-y(t_n)| \geqslant \varepsilon_0$$

bien que l'on ait les inégalités (15). Mais les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $p(t)$ sont presque-périodiques, donc, d'après un théorème bien connu de Bochner (cf. J. Favard [3], p. 77 et suiv.) ce sont des fonctions normales. Par conséquent, de la suite $\{t_n+\tau_n\}$ on peut extraire une suite partielle $\{t_n'+\tau_n'\}$ telle que la suite $\{p(t+t_n'+\tau_n')\}$ converge uniformément dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ vers une fonction $p^*(t)$. Des inégalités (15) il résulte que la suite $\{p(t+\tau_n')\}$ converge elle aussi vers $p^*(t)$. D'après ce que nous avons dit ci-dessus, les suites de solutions $\{(x(t+t_n'+\tau_n'), y(t+t_n'+\tau_n'))\}$, $\{(x(t+t_n'), y(t+t_n'))\}$ des systèmes

$$x' = y-F(x), \qquad y' = -g(x)+p(t+t_n'+\tau_n');$$

$$x' = y-F(x), \qquad y' = -g(x)+p(t+t_n')$$

convergent vers la solution $(x^*(t), y^*(t))$ du système limite $(2^*)$ ce qui est en contradiction avec les inégalités (16).



Nous avons donc démontré que toute presque-période de la fonction $p(t)$ est une presque-période de la solution $(x(t), y(t))$ du système (2). Autrement dit, la convergence de la suite $\{(x(t+\tau_n), y(t+\tau_n))\}$ vers $(x(t), y(t))$ est uniforme par rapport à toute suite $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ de presque-périodes de la fonction $p(t)$, relatives à $1, 1/2, 1/3, \ldots$ respectivement.

Il en résulte, en particulier, que si la fonction $p(t)$ est périodique de période $\omega$, les fonctions $x(t)$, $y(t)$ sont également périodiques et de même période.

7. Dans le cas particulier où la fonction $p(t)$ est supposée périodique on déduit du théorème 3 et les remarques précédentes le corollaire suivant:

Corollaire 1. *Supposons que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfassent à l'hypothèse* (M). *Si la fonction $p(t)$ est périodique de période $\omega$ et l'équation* (1) *admet une solution $x(t)$ $P$-bornée dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, la fonction $x(t)$ est périodique de période $\omega$. Pour toute solution $x_1(t)$ de cette équation, $P$-bornée dans un intervalle $(c, +\infty)$, on a les relations* (14).

On a de même:

Corollaire 2. *Si l'ensemble $K\subset P$ est une borne relative du système* (2), *si la fonction $p(t)$ est presque-périodique et les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfont à l'hypothèse* (M), *le système* (2) *admet une solution presque-périodique et une seule $(x(t), y(t))$, contenue entièrement dans $K$. La solution $(x(t), y(t))$ est asymptotiquement stable par rapport à l'ensemble $K$, car pour tout $c$ et toute solution $(x_1(t), y_1(t))$ du système envisagé, telle que $(x_1(c), y_1(c))\in K$, on a les égalités* (13), *et, par conséquent, les égalités* (14).

Enfin, on peut énoncer le théorème suivant qui constitue une généralisation directe du théorème de C. E. Langenhop et G. Seifert.

Théorème 4. *Supposons que la fonction $p(t)$ soit presque-périodique et $|p(t)|\leqslant k$ quel que soit $t$. Admettons de plus qu'il existe quatre nombres $a<c<0<d<b$ tels que $g(d) = k$, $g(c) = -k$ et*

$$(17)\qquad k < \big(F(b)-F(d)\big)f(x)+g(a), \qquad k < \big(F(c)-F(a)\big)f(x)-g(b)$$

*dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$. Supposons enfin que les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ satisfassent à l'hypothèse* (M).

*Dans ces conditions l'équation* (1) *admet une solution presque-périodique, asymptotiquement stable par rapport à une borne relative $K$ du système correspondant* (2).

En effet, comme l'ont démontré C. E. Langenhop et G. Seifert, les inégalités (17) permettent de construire un ensemble $K$, contenu dans la bande $P$: $a \leqslant x \leqslant b$, $|y| < +\infty$, qui est une borne relative du système (2). Par conséquent, le théorème 4 résulte immédiatement du corollaire 2.

**8.** Signalons enfin la possibilité d'une généralisation facile des théorèmes et des corollaires précédents (comparer à ce sujet les travaux de C. Olech [6], [7] et [8]). Supposons notamment que la dérivée $g'(x)$ satisfasse dans l'intervalle $\langle a, b\rangle$ à l'inégalité

$$\lambda_1 \cdot m^2 < g'(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{18}$$

où $\lambda_1$ est une constante positive. Nous pouvons d'ailleurs admettre, comme nous l'avons fait dans la démonstration du théorème 1, que $m = 1$. Alors, dans la construction de la courbe $C$ qui y intervient, nous pouvons remplacer le segment $S$: $0 \leqslant u \leqslant 1$, $v = 1$, par la portion de la trajectoire du système d'équations

$$u' = v - u, \qquad v' = -\lambda_1 u \tag{19}$$

passant par le point $P(1, 1)$ qui est contenue entre ce point et le point $R(0, r)$ où cette trajectoire coupe le demi-axe positif des $v$. Ensuite, au lieu du système (9), on peut envisager le système

$$u' = v - u, \qquad v' = -\lambda_2 u \tag{20}$$

et choisir la constante $\lambda_2$ de telle sorte que la trajectorie du système (20) passant par le point $P$ coupe le demi-axe négatif des $v$ au point $(0, -r)$. Cela étant, en reprenant le raisonnement du n° 3, on démontre facilement que si la dérivée $g'(x)$ satisfait à la condition (18) et si

$$g'(x) < \lambda_2 m^2 \qquad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{21}$$

le théorème 1 reste vrai, et, par conséquent, il en est de même des thèorèmes 2, 3 et 4, ainsi que des corollaires 1 et 2.

Les systèmes (19) et (20) sont bien simples et s'intègrent d'une manière bien connue; c'est pourquoi le problème d'un choix convenable de la valeur de $\lambda_2$ correspondante à un $\lambda_1$ donné est toujours celui d'un calcul élémentaire plus ou moins fastidieux. Nous nous contenterons donc d'en donner les résultats finaux en omettant les calculs intermédiaires.

Désignons les nombres $4\lambda_1 - 1$, $4\lambda_2 - 1$ respectivement par $\Delta_1$ et $\Delta_2$.



Premier cas: $\lambda_1 > 1/4$. Dans ce cas on détermine $\lambda_2$ en résolvant l'équation transcendante semblable à l'équation (3):

$$\ln\lambda_2 = \ln\lambda_1 + \frac{2}{\sqrt{\Delta_1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\Delta_1} + \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}}(\pi + 2\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\Delta_2}). \tag{22}$$

Ainsi, par exemple, pour $\lambda_1 = 1$ on obtient l'équation

$$\ln\lambda_2 = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4\lambda_2 - 1}}(\pi + 2\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{4\lambda_2 - 1}),$$

d'où il est facile de conclure que $\lambda_2 > 6$.

On a évidemment $\lambda_2 > \lambda_1$. Donc, en remplaçant dans l'équation (22) $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\Delta_1}$ par $\pi/2$ et $\Delta_2$ par $\Delta_1$ on augmente son second membre, de sorte que pour la solution $\lambda_2'$ de l'équation ainsi simplifiée, donnée par la formule

$$\lambda_2' = \lambda_1 \exp\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta_1}}(2\pi + \operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\Delta_1})\right), \tag{23}$$

on a nécessairement l'inégalité $\lambda_2' \geqslant \lambda_2$. Mais de (23) il vient

$$\lim_{\lambda_1\to+\infty}(\lambda_2' - \lambda_1)/\sqrt{\lambda_1} = \pi,$$

donc, à plus forte raison

$$\limsup_{\lambda_1\to+\infty}(\lambda_2 - \lambda_1)/\sqrt{\lambda_1} \leqslant \pi. \tag{24}$$

Il en résulte, en particulier

$$\lambda_2 \leqslant \lambda_1 + p\sqrt{\lambda_1}, \tag{25}$$

où $p$ est un nombre positif suffisamment grand. De l'inégalité (25) il résulte que l'on diminue le second membre de l'équation (22) si l'on y remplace $(\pi + 2\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{\Delta_2})/\sqrt{\Delta_2}$ par $\pi/\sqrt{\Delta_1 + 4p\sqrt{\lambda_1}}$, de sorte que le nombre $\lambda_2''$ déterminé par la formule

$$\lambda_2'' = \lambda_1 \exp\left(\frac{2}{\sqrt{\Delta_1}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\Delta_1} + \frac{\pi}{\sqrt{\Delta_1 + 4p\sqrt{\lambda_1}}}\right) \tag{26}$$

est toujours inférieur à $\lambda_2$. Mais, de la formule (26) on déduit

$$\lim_{\lambda_1\to+\infty}(\lambda_2'' - \lambda_1)/\sqrt{\lambda_1} = \pi,$$

et, par conséquent

$$\liminf_{\lambda_1 \to +\infty} (\lambda_2 - \lambda_1)/\sqrt{\lambda_1} \geqslant \pi. \tag{27}$$

En rapprochant les inégalités (24) et (27) on trouve enfin que, pour $\lambda_1$ tendant vers l'infini, la limite du quotient $(\lambda_2-\lambda_1)/\sqrt{\lambda_1}$ existe et est égale à $\pi$. Il en résulte, en particulier, que la différence $\lambda_2-\lambda_1$ tend vers l'infini lorsque $\lambda_1$ croît indéfiniment et que l'on a la formule asymptotique

$$\lambda_2 \sim \lambda_1 + \pi\sqrt{\lambda_1}.$$

Deuxième cas: $0 < \lambda_1 < 1/4$. Dans ce cas on détermine d'abord le nombre $T_0$, donné par la formule

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{-\Delta_1}} \ln \frac{1-\sqrt{-\Delta_1}}{1+\sqrt{-\Delta_1}}.$$

Cela étant, on calcule le nombre

$$v_0 = \frac{\sqrt{-\Delta_1}+(1-2\lambda_1)}{2\sqrt{-\Delta_1}} \exp \frac{-1+\sqrt{-\Delta_1}}{2} T_0 + \frac{\sqrt{-\Delta_1}-(1-2\lambda_1)}{2\sqrt{-\Delta_1}} \exp \frac{-1-\sqrt{-\Delta_1}}{2} T_0$$

et l'on résout ensuite l'équation transcendante

$$\lambda_2 = v_0^2 \exp \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}} (\pi + 2 \operatorname{arcctg} \sqrt{\Delta_2}).$$

Troisième cas: $\lambda_1 = 1/4$. Dans ce cas limite le nombre $\lambda_2$ est déterminé par l'équation

$$\ln \lambda_2 = -\ln 4 + 2 + \frac{1}{\sqrt{\Delta_2}} (\pi + 2 \operatorname{arcctg} \sqrt{\Delta_2})$$

qui s'obtient de l'equation (22) en faisant tendre $\lambda_1$ vers $1/4$ par des valeurs supérieures à $1/4$ et en tenant compte du fait que $\lim_{u\to 0+} \operatorname{arctg} u/u = 1$.



### Travaux cités


[1] L. Amerio, *Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non-lineari quasi-periodici, o limitati*, Ann. Mat. Pura ed Appl. 39 (1955), p. 97-119.

[2] J. Favard, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients presque-périodiques*, Acta Math. 51 (1928), p. 31-81.

[3] — *Leçons sur les fonctions presque-périodiques*, Paris 1933.

[4] A. Halanay, *Soluţii aproape-periodice ale sistemelor de ecuaţii diferenţiale neliniare*, Com. Acad. R. P. R. 6 (1956), p. 13-19.

[5] C. E. Langenhop, G. Seifert, *Almost periodic solutions of second order nonlinear differential equations with almost periodic forcing*, Proc. Am. Math. Soc. 10 (1959), p. 425-432.

[6] C. Olech, *On the characteristic exponents of the second order linear ordinary differential equations*, Bull. de l'Acad. Pol. des Sci., Sér. des sci. math., astr. et phys. 6 (1958), p. 543.

[7] — *Asymptotic behaviour of the solutions of the second order differential equations*, ibid. 7 (1959), p. 319-326.

[8] — *Estimates of the exponential growth of solutions of a second order ordinary differential equations*, ibid. 7 (1959), p. 487-494.

[9] Z. Opial, *Sur les solutions presque-périodiques des équations différentielles du premier et du second ordre*, Ann. Pol. Math. 7 (1959), p. 51-61.

[10] — *Sur les solutions périodiques et presque-périodiques de l'équation différentielle $x''+kf(x)x'+g(x) = kp(t)$*, Ann. Pol. Math. 7 (1960), p. 309-319.

[11] — *Sur la limitation des dérivées des solutions bornées d'un système d'équations différentielles du second ordre*, Ann. Pol. Math. (à paraître).

[12] G. E. H. Reuter, *On certain non-linear differential equation with almost periodic solutions*, Journ. London Math. Soc. 26 (1951), p. 215-221.


*Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1959*