Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI constituent une continuation des ANNALES DE LA SOCIÉTÉ POLONAISE DE MATHÉMATIQUE (vol. I-XXV) fondées en 1921 par Stanisław Zaremba.

Les ANNALES POLONICI MATHEMATICI publient, en langues des congrès internationaux, des travaux consacrés à l'Analyse Mathématique, la Géométrie et la Théorie des Nombres. Chaque volume paraît en 3 fascicules.

Les manuscrits dactylographiés sont à expédier à l'adresse:
Rédaction des ANNALES POLONICI MATHEMATICI
KRAKÓW (Pologne), ul. Solskiego 30.

Toute la correspondance concernant l'échange et l'administration est à expédier à l'adresse:
ANNALES POLONICI MATHEMATICI
WARSZAWA 10 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

Le prix de ce fascicule est 2 $.
Les ANNALES sont à obtenir par l'intermédiaire de
ARS POLONA
WARSZAWA 5 (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)

Sur les comitants algébriques des tenseurs

par S. Gołąb (Kraków)

Bien que la notion du comitant figure chez les auteurs antérieurs (p. ex. chez R. Weitzenböck [1]), c'est la théorie moderne des objets géométriques qui a permis de préciser cette notion d'une façon suffisante [2].

Etant donné un objet Ω de composantes $\Omega_1, \ldots, \Omega_m$, chaque système de fonctions

$$\Omega_j^* = \Psi_j(\Omega_1, \ldots, \Omega_m), \quad j = 1, \ldots, M$$

est appelé comitant (algébrique) de l'objet Ω. Si Ω est un objet géométrique et les fonctions Ψ_j sont tout à fait arbitraires, Ω^* n'est pas, en général, un objet géométrique. Nous appelons Ω^* *comitant géométrique* si Ω^* est un objet géométrique [3].

Le problème principal de la théorie des comitants d'objets géométriques consiste à déterminer, pour les objets d'un type donné T_1, tous les comitants qui sont les objets d'un type donné T_2.

On peut chercher, par exemple, pour les comitants d'un tenseur d'ordre donné tous les comitants qui sont des densités. Pour les vecteurs (contravariants ou covariants) ce problème n'admet qu'une solution triviale, c'est-à-dire, sous le pseudogroupe général des transformations des coordonnées, les comitants cherchés n'existent pas (en faisant abstraction d'une densité triviale, identiquement nulle). Mais pour les tenseurs d'ordre supérieur il en est tout à fait autrement. Dans ce cas ces comitants existent en général. Une étude systématique dans cette direction a été initiée par moi, il y dejà quelque temps au moyen d'une méthode analytique (cette méthode sera d'ailleurs illustrée dans la suite par un exemple) qui suppose la régularité de classe C^1 de la fonction cherchée qui est la solution d'une équation fonctionnelle correspondante, et qui consiste à transformer l'équation primitive en un système d'équations différentielles partielles du premier ordre. Il est cependant bien connu que l'ensemble des solutions d'une équation fonctionnelle peut être plus ou moins vaste, suivant la classe de régularité des solutions cherchées. Or, dans le cas d'un tenseur mixte a_λ^ν de l'espace à deux dimensions, M. J. Aczél a remarqué [3] qu'en cherchant les comitants scalaires (qui sont un cas particulier des comitants densités) nous obtenons des solutions qui ne sont pas fonctions seulement de la trace $S = a_1^1 + a_2^2$ et du déterminant $D = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$; ce dernier fait est une conséquence de l'hypothèse que le comitant cherché est une fonction de classe C^1 de quatre éléments qui sont les composantes du tenseur a_λ^ν.

Un problème plus général s'est donc posé: celui de trouver les comitants sans aucunes restrictions portant sur la régularité des fonctions qui interviennent dans l'équation fonctionnelle. Pour le moment ce problème général est résolu (par des méthodes algébriques) pour les tenseurs du second ordre. Notamment, pour le tenseur mixte a_λ^ν dans l'espace à un nombre arbitraire de dimensions, la forme générale des comitants a été déterminée d'une part par MM. M. Kucharzewski et C. Olech, d'autre part (simultanément et indépendamment) par MM. J. Aczél et M. Hosszú, pour les tenseurs covariants $a_{\lambda\mu}$ par M. A. Zajtz.

Avant que ces derniers résultats soient rédigés et publiés, j'expose ci-dessous les résultats auxquels je suis parvenu au moyen d'une méthode analytique en me basant sur des hypothèses de régularité plus forte. Pour des raisons, exposées plus haut, j'omets les démonstrations en me bornant seulement à donner une esquisse de la démonstration dans un cas particulier.

Soit un tenseur général $a_{\lambda\mu}$, c'est-à-dire ni symétrique ni antisymétrique, dans l'espace à deux dimensions. La recherche d'un comitant-densité du tenseur $a_{\lambda\mu}$ conduit à une équation fonctionnelle pour la fonction inconnue

$$f(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22});$$

cette équation résulte de l'hypothèse que le comitant doit être une densité de poids $(-p)$ et de la formule d'après laquelle se transforment les composantes du tenseur $a_{\lambda\mu}$ quand on passe d'un système de coordonnées à un autre.

Si nous désignons les dérivées de premier ordre de la transformation par λ, μ, ϱ, σ et si nous adoptons, pour simplifier, les notations

$$x_1 = a_{11}, \quad x_2 = a_{12}, \quad x_3 = a_{21}, \quad x_4 = a_{22},$$

l'équation fonctionnelle mentionnée plus haut aura la forme

$$\begin{aligned}(1)\qquad & \eta\,|\lambda\sigma - \mu\varrho|^p f(x_1, x_2, x_3, x_4) \\ & = f[\lambda^2 x_1 + \lambda\varrho(x_2+x_3) + \varrho^2 x_4,\ \lambda\mu x_1 + \lambda\sigma x_2 + \mu\varrho x_3 + \varrho\sigma x_4,\ \lambda\mu x_1 + \\ & \quad + \mu\varrho x_2 + \lambda\sigma x_3 + \varrho\sigma x_4,\ \mu^2 x_1 + \mu\sigma(x_2+x_3) + \sigma^2 x_4],\end{aligned}$$

où $\eta = 1$ pour les densités de Weyl et $\eta = \operatorname{sgn}(\lambda\sigma - \mu\varrho)$ pour les densités ordinaires. L'équation (1) doit être vérifiée identiquement par rapport aux variables x_1, x_2, x_3, x_4 (qui peuvent prendre toutes les valeurs possibles, ce qui résulte de la loi de transformation des composantes d'un tenseur) et par rapport aux variables λ, μ, ϱ, σ avec la seule restriction

$$(2)\qquad \lambda\sigma - \mu\varrho \neq 0.$$

THÉORÈME 1. *Si la fonction $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ est de classe C^1 et si elle vérifie l'équation* (1), *elle a la forme*

$$(3)\qquad f = \Theta\,|x_3 - x_2|^p\,\Phi\left[\frac{x_1 x_4 - x_2 x_3}{(x_3 - x_2)^2}\right],$$

où Φ est une fonction arbitraire de classe C^1 d'une seule variable, et Θ est égal à 1, *ou bien à* $\operatorname{sgn}(x_3 - x_2)$.

Démonstration. Nous différentions l'équation (1) par rapport à λ, μ, ϱ, σ et ensuite nous posons

$$(4)\qquad \lambda = \sigma = 1, \quad \mu = \varrho = 0.$$

Ces opérations étant exécutées, nous obtenons quatre équations partielles linéaires du premier ordre (il est à remarquer que les expressions qui figurent au second membre de l'équation (1) deviennent, après la substitution (4), tout simplement x_1, x_2, x_3, x_4). Si nous introduisons les notations

$$(5)\qquad f_i \stackrel{\mathrm{df}}{=} \partial f/\partial x_i \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

les équations en question prennent la forme

$$(6)\qquad \begin{aligned} pf &= 2x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3, & 0 &= x_1 f_2 + x_1 f_3 + (x_2 + x_3) f_4, \\ 0 &= (x_2 + x_3) f_1 + x_4 f_2 + x_4 f_3, & pf &= x_2 f_2 + x_3 f_3 + 2x_4 f_4. \end{aligned}$$

L'intégration de ce système ne présente pas de difficultés. Nous partons de la deuxième équation (qui est homogène). Le système correspondant des équations ordinaires est

$$\frac{dx_1}{0} = \frac{dx_2}{x_1} = \frac{dx_3}{x_1} = \frac{dx_4}{x_2 + x_3}.$$

Les membres intérieurs donnent

$$x_3 - x_2 = C_1.$$

L'égalité des deuxième et quatrième membres conduit à la relation

$$\frac{dx_4}{dx_2} = \frac{x_2 + x_3}{x_1}$$

ce qui, rapproché de la relation précédente, donne

$$\frac{dx_4}{dx_2} = \frac{2x_2+C_1}{x_1}.$$

Après l'intégration nous obtenons donc

$$x_4 = \frac{x_2^2}{x_1}+\frac{C_1x_2}{x_1}+C_2$$

ou bien

$$\frac{x_1x_4-x_2x_3}{x_1} = C_2.$$

Nous pouvons donc écrire

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = g\left(x_1, x_3-x_2, \frac{x_1x_4-x_2x_3}{x_1}\right). \tag{7}$$

De (7) nous tirons

$$f_1 = g_1+\frac{x_2x_3}{x_1^2}g_3, \quad f_2 = -g_2-\frac{x_3}{x_1}g_3, \quad f_3 = g_2-\frac{x_2}{x_1}g_3.$$

En substituant ces relations dans la troisième équation (6) nous obtenons

$$x_1^2g_1-(x_1x_4-x_2x_3)g_3 = 0.$$

En intégrant cette équation nous obtenons $x_1x_4-x_2x_3 = C$, et nous pouvons écrire

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = h(x_3-x_2, x_1x_4-x_2x_3). \tag{8}$$

Nous avons ensuite

$$f_1 = x_4h_2, \quad f_2 = -h_1-x_3h_2, \quad f_3 = h_1-x_2h_2, \quad f_4 = x_1h_2.$$

En substituant les dernières relations dans la première équation (6) nous obtenons

$$(x_3-x_2)h_1+2(x_1x_4-x_2x_3)h_2 = ph.$$

Le système correspondant des équations ordinaires est de la forme

$$\frac{d(x_3-x_2)}{x_3-x_2} = \frac{d(x_1x_4-x_2x_3)}{2(x_1x_4-x_2x_3)} = \frac{dh}{ph}.$$

L'intégration de ce système conduit au résultat suivant. Les deux premiers membres donnent

$$\frac{x_1x_4-x_2x_3}{(x_3-x_2)^2} = C_1.$$

En égalant les membres extrêmes nous obtenons

$$\frac{h}{|x_3-x_2|^p} = C_2.$$

et finalement

$$h = f = \Theta|x_3-x_2|^p\,\Phi\left[\frac{x_1x_4-x_2x_3}{(x_3-x_2)^2}\right], \tag{9}$$

où $\Theta = 1$ on bien $\Theta = \operatorname{sgn}(x_3-x_2)$.

Réciproquement, on démontre sans difficulté que chaque fonction f de la forme (9), où Φ est une fonction arbitraire de classe C^1, satisfait non seulement au système (6), mais aussi à l'équation fonctionnelle (1).

Le théorème se trouve ainsi démontré. Pour $p = 0$ nous avons la formule donnant les comitants scalaires.

Remarque. Dans les considérations précédentes nous avons divisé par x_2+x_3, x_3-x_2, $x_1x_4-x_2x_3$. Or, on a $x_2+x_3 \neq 0$ et $x_3-x_2 \neq 0$ à cause de l'hypothèse que le tenseur n'est ni symétrique ni antisymétrique. Si nous avions $x_1x_4-x_2x_3 = 0$, alors dans chaque autre système de coordonnées on aurait $x_1x_4-x_2x_3 = 0$ puisque le déterminant $D = x_1x_4-x_2x_3$ se transforme comme une densité. Dans ce cas le raisonnement précédent est en défaut, mais alors, en partant de la relation (7), nous pouvons écrire

$$f = g(x_1, x_3-x_2)$$

et nous parvenons, comme dans le général, au résultat

$$f = \Theta C|x_3-x_2|^p, \tag{10}$$

où C est une constante arbitraire. Dans ce cas les comitants scalaires non triviaux n'existent pas.

En ce qui concerne les tenseurs symétriques resp. antisymétriques, nous avons les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME 2. *Les seuls comitants-densités (de poids $-p$) d'un tenseur $a_{\lambda\mu}$ symétrique ou antisymétrique sont les comitants de la forme*

$$f(a_{\lambda\mu}) = \eta C|D|^{p/2}, \tag{11}$$

où

$$D = \det a_{\lambda\mu}. \tag{12}$$

C est une constante arbitraire, $\eta = 1$ ou $\eta = \operatorname{sgn} D$.

Du théorème précédent il s'ensuit, en particulier, qu'un tenseur symétrique ne possède pas de comitants scalaires non triviaux. Si $D = 0$ le tenseur ne possède pas, de plus, de comitants-densités non triviaux.

Pour un tenseur antisymétrique il en résulte, en particulier, la non-existence de comitants scalaires ainsi que, pour un espace à nombre impair de dimensions, la non-existence des comitants-densités non triviaux, car dans ce cas nous avons $D = 0$.

Travaux cités

[1] R. Weitzenböck, *Invariantentheorie*, Groningen 1923, p. 29.

[2] S. Gołąb, *Sur quelques points concernant la notion du comitant*, Ann. Soc. Pol. Math. 17 (1938), p. 177-192.

[3] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

Reçu par la Rédaction le 27. 4. 1959

ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
IX (1960)

On some linear functional equations

by J. Kordylewski and M. Kuczma (Kraków)

Introduction. In the present paper we discuss some particular cases of functional equations of the type

(1) $$A_0(x)\varphi[f^n(x)]+A_1(x)\varphi[f^{n-1}(x)]+\ldots+A_n(x)\varphi(x) = F(x),$$

where $\varphi(x)$ is the required function, and $f(x)$, $F(x)$ and $A_i(x)$ are known functions. $f^k(x)$ denotes here the k-th iteration of the function $f(x)$, i. e.

$$f^0(x) = x,$$

$$\begin{aligned} f^{k+1}(x) &= f[f^k(x)], \\ f^{k-1}(x) &= f^{-1}[f^k(x)], \end{aligned} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

We call the number n the order of equation (1).

Equations of type (1) were treated by M. Ghermănescu [1], [2]. However, we consider different problems from those he dealt with.

We shall discuss equation (1) in an interval $\langle a, b\rangle$ where a and b are two consecutive roots of the equation

(2) $$f(x) = x.$$

We shall assume that the function $f(x)$ is a homeomorphism of the interval $\langle a, b\rangle$ onto itself, and the functions $F(x)$ and $A_i(x)$ are complex-valued functions of the real variable, continuous in the interval $\langle a, b\rangle$.

The object of our research will be the number of solutions (¹) of equation (1) that are continuous in the intervals (a, b), $(a, b\rangle$, or $\langle a, b)$. It turns out that although equation (1) always possesses infinitely many solutions continuous in the interval (a, b), in some cases there may exist at most one solution continuous in the interval $(a, b\rangle$ or $\langle a, b)$. These results are a continuation of our previous research ([3], [4], [5], [6]).

(¹) By a solution of equation (1) we shall understand a complex-valued function $\varphi(x)$ of the real variable, defined in a certain interval and satisfying equation (1) in this interval. In the case of a real-valued function we shall always write "real solution".